УДК 517.958:533.7

МЕТОДЫ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. В. Хабиров[1,*]

[1] *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

[*] *e-mail: habirov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2024 г.
После доработки 01.11.2024 г.
Принята к публикации 01.11.2024 г.

Групповая классификация – основная задача группового анализа дифференциальных уравнений с произвольным элементом. Для уравнений идеальной газовой динамики со стационарным уравнением состояния задача решена методом перебора упрощений определяющих соотношений с помощью преобразований эквивалентности. Для уравнений состояния, зависящих от времени, перебор огромен и приходится использовать оптимальную систему подалгебр подалгебры, расширяющей ядро допускаемых алгебр. Комбинация обоих методов приводит к решению задачи групповой классификации релаксирующей газовой динамики.

Ключевые слова: газовая динамика, релаксирующее уравнение состояния, преобразования эквивалентности, определяющие соотношения, групповая классификация, оптимальная система подалгебр.

DOI: 10.31857/S0032823524060092 **EDN:** IGMBOH

1. Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики со стационарным уравнением состояния (произвольный элемент) развит в наибольшей мере [1, 2]. Найдена группа преобразований, оставляющих инвариантной систему уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). Найдена бесконечная псевдогруппа преобразований эквивалентности, не изменяющие вид системы уравнений газовой динамики, но меняющие лишь уравнение состояния [3]. С точностью до преобразований эквивалентности перечислены классы уравнений состояния, для которых допускаемая системой группа будет шире ядра (групповая классификация). В процессе вычисления алгебры Ли допускаемой группы [4], возникает линейное определяющее соотношение для функции, задающей уравнение состояния, с неопределенными коэффициентами. Некоторым коэффициентам можно придать явные значения с помощью преобразований эквивалентности. Перебор возможностей такого упрощения составляет метод групповой классификации.

Другой метод групповой классификации предложил Ю.А. Чиркунов [5]. Алгебра ядра допускаемых групп является идеалом для всех расширений. Дополнение алгебры ядра любого расширения является подалгеброй расширения. Эти подалгебры содержатся в алгебре преобразований эквивалентности. Для групповой классификации достаточно перечислить все подалгебры алгебры преобразований эквивалентности без ядра с точностью до внутренних автоморфизмов алгебры (оптимальная система подалгебр).

Для каждого расширения ядра построены оптимальные системы подалгебр. При этом можно указать цепочки вложенных друг в друга подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов [6]. Далее рассматривают подмодели, порождаемые подалгебрами: инвариантные, частично инвариантные и дифференциально инвариантные [2, 7]. Подмодели подвергают групповому анализу с целью получить возможно большее количество точных решений. Вложенным подалгебрам соответствуют вложенные подмодели. Решения одних подмоделей будут решениями других при выборе согласованных инвариантов [8]. Цель группового анализа – получение возможно большего числа точных решений и их аналитическое исследование. Исчерпание всех возможностей далеко от завершения.

Основная задача группового анализа – групповая классификация. Имеется прямой функциональный метод решение этой задачи: нахождение преобразований, изменяющих только произвольный элемент. В работе [9] излагается общая теория групповой классификации прямого и алгебраических методов с приложением к нелинейным волновым уравнениям с двумя независимыми переменными. Прямой метод возможен для дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, порядок уравнений должен быть небольшой. В этом случае дополнительно находят дискретные преобразования эквивалентности, не входящие в однопараметрические группы.

Обобщение классической газовой динамики дает уравнение состояния, зависящее от времени в силу реологии [10] или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды [11]. Газовая динамика с уравнением состояния, зависящим от времени, задает движение многофазной среды в целом с измеренным изменением внутренней энергии в результате физико-химических превращений в среде при внутренним и (или) внешнем воздействии. Решение задачи групповой классификации релаксирующей газовой динамики приводит к бесконечной группе преобразований эквивалентности и сводится к изучению совместности двух определяющих соотношений для функции, задающей уравнение состояния, одно из которых нелинейно. Групповая классификация уравнений состояния по преобразованиям эквивалентности выполнена алгебраическим методом в работе [12]. Возникает множество возможностей упрощения переопределенной системы определяющих соотношений. Нелинейное уравнение определяющих соотношений преобразуется преобразованиями эквивалентности к более простому виду в четырех взаимно исключающихся случаях в зависимости от значений коэффициентов. Групповая классификация одного такого случая рассмотрена в работе [13] методом перебора возможных упрощений линейного определяющего соотношения. Другой случай рассмотрен в работе [14] с помощью комбинаций метода перебора упрощений определяющих соотношений и метода построения оптимальной системы подалгебр алгебры расширений ядра. В настоящей работе рассматриваются два оставшихся случая упрощения переопределенной системы определяющих соотношений, тем самым окончательно решается задача групповой классификации релаксирующей газовой динамики. Совершенствуются методы решения основной задачи группового анализа – групповой классификации дифференциальных уравнений с произвольным элементом.

2. Уравнения газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния

Дифференциальные уравнения газовой динамики есть следствие законов сохранения массы, импульса и энергии [1]

$$V_t + \vec{u} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{u} \tag{2.1}$$

$$\vec{u}_t + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} + V \nabla p = 0 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_t + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\varepsilon + V p \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

где V – удельный объем ($\rho = V^{-1}$ – плотность), $\vec{u}$ – скорость частицы, ε – удельная внутренняя энергия, p – давление, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ – градиент. Уравнение состояния среды меняется со временем $\varepsilon = e\left(t, V, S\right)$.

В частице выполняется термодинамическое тождество

$$TdS = d\varepsilon + pdV + \mu dt$$

Здесь S – энтропия, $T = e_S > 0$ – температура, $\mu = -e_t$ – мощность выделенной или поглощенной энергии, $p = -e_V$, d – дифференциал. Вычисляя дифференциал вдоль мировой линии частицы $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, получим уравнение для энтропии

$$e_S DS + e_t = 0 \tag{2.3}$$

Групповую классификацию проводим для замкнутой системы уравнений (2.1)–(2.3), где $\nabla p = -e_{VV}\nabla V - e_{VS}\nabla S$. Произвольный элемент системы задан уравнением состояния с условиями

$$e_t \neq 0, e_S \neq 0, e_{VV} \neq 0$$
$$e_{x^j} = 0, e_{u^k} = 0;\ j,k = 1,2,3, \tag{2.4}$$

где x^j, u^k – декартовы координаты векторов $\vec{x}, \vec{u}$. Преобразования эквивалентности разыскиваются по правилам работы [4].

Уравнения (2.1)–(2.4) и уравнения на функцию e, возникающие в процессе вычисления, должны быть инвариантными. Для произвольного уравнения состояния алгебра Ли преобразований эквивалентности задается базисными операторами [12]

$$\{X_i\} = \partial_{\vec{x}}, \{X_{3+i}\} = t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}, \{X_{6+i}\} = \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}};\ i = 1,2,3$$

$$X_{10} = \partial_t \Rightarrow \mathit{\Pi}_1 : \tilde{t} = t + a,\ \tilde{e}(\tilde{t}, V, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} \Rightarrow \mathit{\Pi}_2 : \tilde{t} = bt,\ \overrightarrow{\tilde{x}} = b\vec{x},\ \tilde{e}(\tilde{t}, V, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{12} = V : \partial_V \Rightarrow \mathit{\Pi}_3 : \tilde{V} = d_1 V,\ \tilde{e}(t, \tilde{V}, S) = e(t, V, S)$$

$$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 2e\partial_e \Rightarrow \mathit{\Pi}_4 : \tilde{t} = ct,\ \overrightarrow{\tilde{u}} = c^{-1}\vec{u},\ \tilde{e} = c^{-2}e$$

$$X_{14} = V\partial_e \Rightarrow \mathit{\Pi}_5 : \tilde{e} = Vb_1 + e;\quad X_{15} = \partial_e \Rightarrow \mathit{\Pi}_6 : \tilde{e} = e + c_1$$

$$\langle \eta \rangle = \eta(t, S)\partial_S \Rightarrow \mathit{\Pi} : \tilde{S} = h(t, S)$$

Здесь $a, b \neq 0, c \neq 0, d_1, b_1, c_1$ – произвольные постоянные; $\eta(t,S), h(t,S)$ – произвольные функции.

Операторы $X_i;\ i = 1 \div 9$, образуют 9-мерную алгебру Ли L_9, которой соответствует допускаемая системой (2.1) – (2.3) группа преобразований с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). Для специальных классов уравнений состояния преобразования эквивалентности меняются [12], как и допускаемая группа преобразований.

3. Определяющие соотношения групповой классификации

Координаты оператора алгебры Ли, допускаемой системой (2.1)–(2.3)

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_V + \eta^S \partial_S$$

зависят от переменных $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S$. Продолжая оператор на производные $\dot{x}$ [5], действуем оператором на каждое уравнение системы в силу этих уравнений. Получим условия инвариантности, которые содержат некоторые производные в качестве свободных параметров. Приравнивая нулю коэффициенты при свободных параметрах (расщепление), получим переопределенную систему уравнений для координат оператора X. Интегрирование приводит к представлению для координат [13]

$$\xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \vec{\xi} = t\left(N\vec{x} + \vec{A}\right) + N_0\vec{x} + A_0 + \vec{\Omega}\times\vec{x} \tag{3.1}$$

$$\vec{\eta} = N\vec{x} + \vec{A} - \vec{u}\left(Nt + B - N_0\right) + \vec{\Omega}\times\vec{u},\ \eta^V = V\left(3Nt + E\right),\ \eta^S = \eta\left(t,S\right),$$

где $N, B, B_0, \vec{A}, N_0, \vec{A}_0, \vec{\Omega}, E$ – произвольные постоянные, $\eta(t,S)$ – произвольная функция, и к двум определяющим соотношениям

$$\gamma_S e_t = e_S\left(\gamma_t + \beta V + N\left(2e + 3Ve_V\right)\right) \tag{3.2}$$

$$e_t\left(Nt^2 + Bt + B_0\right) + Ve_V\left(3Nt + E\right) + e_S\eta\left(t,S\right) = \tag{3.3}$$
$$= 2e\left(N_0 - B - Nt\right) - V\beta\left(t\right) - \gamma\left(t,S\right),$$

где $\gamma(t,S), \beta(t)$ – произвольные функции.

Если функция $e(t,V,S)$ произвольная, то из (3.2), (3.3) следует, что функции β,γ и все постоянные равны нулю. Представление (3.1) определяет допускаемую алгебру L_9. Система (2.1)–(2.3) может допускать более широкую алгебру, если функция e удовлетворяет уравнениям типа (3.2) и (3.3) с некоторыми коэффициентами $\tilde{\gamma}(t,S), \tilde{\beta}(t), \tilde{N}, \tilde{N}_0, \tilde{B}, \tilde{B}_0, \tilde{E}$. В зависимости от коэффициентов уравнения типа (3.2) рассмотрим следующие случаи.

1°. $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} \neq 0$. Уравнение типа (3.2) принимает специальный вид

$$3Ve_V + 2e = -\tilde{\beta}\left(t\right)V + \tilde{\gamma}\left(t\right)$$

Групповая классификация этого случая поведена в работе [13].

2°. $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} = 0$. Преобразование эквивалентности Π преобразует уравнение типа (3.2) к виду

$$e_t = e_S\tilde{\beta}\left(t\right)V$$

Групповая классификация этого случая поведена в работе [14] методом построения оптимальной системы подалгебр алгебры расширения ядра.

3°. $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} \neq 0$. Уравнения типа (3.2), (3.3) преобразованиями эквивалентности приводятся к переопределенной системе вида

$$e_t = e_S\left(\tilde{\beta}V + 2e + 3Ve_V\right) \tag{3.4}$$

$$e_t\left(t^2 + k\right) + Ve_V\left(3t + n\right) + e_S\tilde{\eta}\left(t,S\right) = 2e\left(m - t\right) - V\tilde{\beta}\left(t\right) - S, \tag{3.5}$$

где $\tilde{\beta}(t), \tilde{\eta}(t,S)$ – произвольные функции; k,n,m – произвольные постоянные.

4°. $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma} = \Gamma, \tilde{\beta} = B_1$ – постоянные. Определяющее соотношение (3.2) выполняется тождественно: $N = 0,\ \gamma = \Gamma,\ \beta = B_1$.

Остается определяющее соотношение (3.3)

$$\left(Bt + B_0\right)e_t + EVe_V + \eta\left(t,S\right)e_S = 2e\left(N_0 - B\right) - VB_1 - \Gamma \tag{3.6}$$

Далее рассмотрим случаи 3° и 4°.

4. Случай $\tilde{\gamma}_S \neq 0, \tilde{N} \neq 0$

Найдем условие совместности системы (3.4), (3.5). Сделаем замену $e = V^{-\frac{2}{3}} e_1\left(t, V, S\right)$ и исключим производную e_{1t} из второго уравнения

$$e_{1t} = e_{1S}\left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right)$$

$$\eta_1 e_{1S} = -\left(3t + n\right) V e_{1V} + m_1 e_1 - V^{\frac{2}{3}}\left(V\tilde{\beta} + S\right),$$

где $m_1 = 2\left(m + \frac{1}{3}n\right), \eta_1 = \tilde{\eta} + \left(t^2 + k\right)\left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right)$.

Дифференцируем второе линейное уравнение в силу нелинейного первого по t, S и V:

$$\left[\tilde{\eta}_t + 2t\left(\tilde{\beta} V' + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right) + \left(t^2 + k\right)\left(\tilde{\beta}'' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1tV}\right)\right] e_{1S} +$$

$$\eta_1\left[e_{1SS}\left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right) + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1S} e_{1SV}\right] = -3Ve_{1V} - \left(3t + n\right) V e_{1tV} +$$

$$+ m_1 e_{1S}\left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right) - V^{\frac{5}{3}} \tilde{\beta}'$$

$$\eta_1 e_{1SS} = -e_{1VS}\left(\left(3t + n\right) V + 3\left(t^2 + k\right) V^{\frac{1}{3}} e_{1S}\right) + e_{1S}\left(m_1 - \tilde{\eta}_S\right) - V^{\frac{2}{3}}$$

$$\eta_1 e_{1SV} = -e_{1VV}\left(\left(3t + n\right) V + 3\left(t^2 + k\right) V^{\frac{1}{3}} e_{1S}\right) +$$

$$+ e_{1V}\left(m_1 - \left(t^2 + k\right) V^{-\frac{2}{3}} e_{1S} - 3t - n\right) - \left(t^2 + k\right)\tilde{\beta}' e_{1S} - \frac{5}{3} V^{\frac{2}{3}} \tilde{\beta} - \frac{2}{3} V^{-\frac{1}{3}} S$$

$$e_{1tV} = e_{1VS}\left(\tilde{\beta}' V + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\right) + e_{1S}\left(\tilde{\beta}' + V^{-\frac{2}{3}} e_{1V} + 3V^{\frac{1}{3}} e_{1VV}\right)$$

Исключая производные $e_{1tV}, e_{1SV}, e_{1SS}$, получим условие совместности

$$3V^{\frac{1}{3}} e_{1V}\left(2m - \tilde{\eta}_S\right) + V\left(\mu\left(t\right) - \tilde{\eta}_S \tilde{\beta}'\right) + \tilde{\eta}_t = 2S,$$

где $\mu = \left(t^2 + k\right)\tilde{\beta}'' + \left(5t + n\right)\tilde{\beta}' - 5\tilde{\beta}$.

Если $\tilde{\eta}_S = 2m$, то $\mu = 2m\tilde{\beta}', \tilde{\eta}_t = 2S \Rightarrow$ противоречие.

Значит, $\tilde{\eta}_S \neq 2m, e_{1V} = \frac{1}{3} a\left(t, S\right) V^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} b\left(t, S\right) V^{-\frac{1}{3}}$,

$$a\left(2m - \tilde{\eta}_S\right) = \tilde{\eta}_S \tilde{\beta}' - \mu,\ b\left(2m - \tilde{\eta}_S\right) = 2S - \tilde{\eta}_t \tag{4.1}$$

Возвращаясь к функции e, получим представление для уравнения состояния

$$e=\frac{1}{2}b+\frac{1}{5}aV+c(t,S)V^{-\frac{2}{3}};\ c\neq 0$$

Подстановка в (3.4) и в (3.5), расщепление по V приводит к равенствам

$$c_t=bc_S,\ c_S\left(\tilde{\beta}'+a\right)=0,\ a_S\left(\tilde{\beta}'+a\right)=0,\ b_t=bb_S$$

$$a_t=ba_S+\frac{5}{2}b_S\left(\tilde{\beta}'+a\right),\left(t^2+k\right)c_t+\tilde{\eta}c_S=m_1c \tag{4.2}$$

$$\left(t^2+k\right)a_t+\tilde{\eta}a_S=\left(2m-n-5t\right)a-5\tilde{\beta}$$

$$\left(t^2+k\right)b_t+\tilde{\eta}b_S=2\left(m-t\right)b-2S$$

Рассмотрим два случая:

Случай $\tilde{\beta}+a\neq 0$.

Из (4.2) следует $c=C=\text{const}\neq 0$, $n=-3m$, $a(t)$ $(a'\neq 0)$

$$b=(S+S_0)(t_0-t)^{-1}$$

$$\tilde{\eta}=\left(S+S_0\right)\left[\left(t^2+k\right)(t-t_0)^{-1}-2t_0+2m\right]+2S_0\left(t_0-t\right)$$

$$\tilde{\beta}=\left(m-t\right)a-\frac{1}{5}\left(t^2+k\right)a',\left(t^2+k\right)a''+a'\left(5t-5m+2t_0\right)=0$$

При этом равенства (4.1) выполнены. Уравнение состояния принимает вид

$$e=CV^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{5}a\left(t\right)V-\frac{1}{2}\frac{S+S_0}{t-t_0},\ a'=D\left|t^2+k\right|^{-\frac{5}{2}}e^{(5m-2t_0)I},\ I=\int\frac{dt}{t^2+k} \tag{4.3}$$

Допускаемая алгебра находится из определяющих соотношений (3.2) и (3.3). Из (3.2) следует

$$\gamma=\Gamma_0+\left(S+S_0\right)(N+\Gamma_1\left(t-t_0\right)^{-1}),\ \beta'=-Na-\frac{2}{3}a'\left(N\left(t-t_0\right)+\Gamma_1\right)$$

Из (3.3) следуют равенства $E=3\left(B-N_0\right)$,

$$\beta=a\left(N_0-B-Nt\right)-\frac{1}{5}a'\left(Nt^2+Bt+B_0\right)$$

$$\eta=2\left(N_0-B\right)\left(S+S_0\right)+\left(Nt^2+Bt+B_0\right)\left(S+S_0\right)(t-t_0)^{-1}+$$

$$+2\mathit{\Gamma}_0\left(t-t_0\right)+2\left(S+S_0\right)\left(\mathit{\Gamma}_1-Nt_0\right)$$

Исключая функцию $\beta\left(t\right)$, получим

$$a''\left(Nt^2+Bt+B_0\right)+a'\left(5Nt-5N_0+6B+2t_0N-2\mathit{\Gamma}_1\right)=0$$

Сравнение a''/a из двух уравнений для функции $a\left(t\right)$ дает

$$\Gamma_1 = \frac{5}{2}\left(Nm - N_0\right) + \frac{1}{2}B, B_0 = Nk + B\left(m - \frac{2}{5}t_0\right), B\left(k + \left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2\right) = 0$$

Если $k + \left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2 \neq 0$, то $B = 0,\ B_0 = Nk, E = -3N_0$,

$$\eta = 2\Gamma_0\left(t - t_0\right) + \left(S + S_0\right)\left[N\left(5m + \frac{t^2 + k}{t - t_0}\right) - 3N_0\right]$$

Свободным параметрам N, N_0, Γ_0 соответствуют операторы

$$\left(t^2 + k\right)\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \left(\vec{x} - t\vec{u}\right)\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V + \left(5m + \frac{t^2 + k}{t - t_0}\right)\left(S + S_0\right)\partial_S$$

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3\left(S + S_0\right)\partial_S, \left(t - t_0\right)\partial_S \tag{4.4}$$

Если $k = -\left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2$, то добавляется свободный параметр B и появляется дополнительный оператор

$$t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V + \frac{m + \frac{3}{5}t_0}{t - t_0}\left(S + S_0\right)\partial_S \tag{4.5}$$

Случай $a = -\tilde{\beta}$. Из (4.2) следует $a \sim 0, \tilde{\beta} = 0, c = g\left(b\right)$,

$$2g'\left(mb - h\right) = m_1 g, S + bt = h\left(b\right), \tilde{\eta} = -\left(t^2 + k\right)b + 2\left(mb - h\right)\left(h' - t\right)$$

Здесь $g\left(b\right)$ – произвольная функция.

При этом равенства (4.1) выполняются. Для уравнения состояния

$$e = \frac{1}{2}b + g\left(b\right)V^{-\frac{2}{3}} \tag{4.6}$$

допускаемые операторы определяются из определяющих соотношений (3.2), (3.3). Из (3.2) находим $\beta = B_1$ – постоянная, $\gamma = -Ntb + \sigma\left(b\right)$.

Из (3.3) определяются функции

$$\sigma = b\left(N_0 - B\right) - \left(N_0 - B + \frac{1}{3}E\right)gg'^{-1}$$

$$\eta = -b\left(Nt^2 + Bt + B_0\right) + 2gg'^{-1}\left(h' - t\right)\left(N_0 - B + \frac{1}{3}E\right)$$

Свободным параметрам N, B, B_0, N_0, E соответствуют операторы, согласно формулам (3.1),

$$t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \left(\vec{x} - t\vec{u}\right)\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - bt^2\partial_S$$

$$t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - \left(tb + 2gg'^{-1}\left(h' - t\right)\right)\partial_S \tag{4.7}$$

$$\partial_t - b\partial_S, \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2gg'\left(h'-t\right)\partial_S,\ V\partial_V + \frac{2}{3}gg'^{-1}\left(h'-t\right)\partial_S$$

Теорема. Если уравнение состояния удовлетворяет переопределенной системе (3.4), (3.5), то оно может быть двух типов. Либо оно задается формулой (4.3) и тогда система (2.1)–(2.3) допускает операторы (4.4) и дополнительный оператор (4.5) при $k = -\left(m - \frac{2}{5}t_0\right)^2$; либо уравнение состояния имеет вид (4.6), и тогда допускаются операторы (4.7).

5. Случай $\tilde{\gamma}_S = 0, \tilde{N} = 0.$

Определяющее соотношение (3.2) выполняется: $N = 0, \gamma = \Gamma,\ \beta = B_1$ – постоянные. Преобразование эквивалентности П не изменяют вид системы (2.1)–(2.3), но изменяют уравнение состояния и допускаемые операторы. Таким образом, в равенствах (3.1) можно сделать функцию $\eta\left(t,S\right) \sim \eta\left(S\right) = 1$ или *S*. Равенство (3.6) принимает вид

$$\left(Bt + B_0\right)e_t + EVe_V + C_0\eta\left(S\right)e_S = 2e\left(N_0 - B\right) - VB_1 - \Gamma \tag{5.1}$$

Параметрам B_0, N_0, E, B, C_0 соответствуют базисные операторы алгебры Ли L_5

$$X_{10} = \partial_t, \tilde{X}_{11} = X_{11} - X_{13} = \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}, X_{12} = V\partial_V, X_{13} = t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}},\ X_0 = \eta\left(S\right)\partial_S$$

Оператор $X_{11} = t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}$ допускается уравнениями газовой динамики со стационарным уравнением состояния [1]. Есть только один не нулевой коммутатор $\left[X_{10}, X_{13}\right] = X_{10}, \mathbb{Z} = \left\{X_0, \tilde{X}_{11}, X_{12}\right\}$ – абелев центр, X_{10} – идеал идеала $J_2 = \left\{X_{10}, X_{13}\right\}$, $L_5 = J_2 \oplus Z$ – прямая сумма идеалов. Внутренние автоморфизмы алгебры вычисляются по правилу [4]

$$\bar{X}_a = \left[Y, \bar{X}\right], \left.\bar{X}\right|_{a=0} = X = x^{10}X_{10} + x^{11}\tilde{X}_{11} + x^{12}X_{12} + x^{13}X_{13} + x^0X_0$$

Имеем два автоморфизма

$$A_1 : \bar{x}^{10} = x^{10} + ax^{13},\ A_2 : \bar{x}^{10} = bx^{10}$$

С точностью до внутренних автоморфизмов все подалгебры различных размерностей (оптимальная система) приведены в Приложении.

Заключение. Задача групповой классификации уравнений газовой динамики с уравнением состояния, зависящим от времени, решена. Алгоритм решения этой задачи заключается в следующем. Алгебра Ли преобразования эквивалентности, изменяющих только уравнение состояния, вычислены в работе [12]. Условия инвариантности уравнений газовой динамики с уравнением состояния зависящем от времени задают представление для координат допускаемых операторов (3.1) и два определяющих соотношения нелинейное типа (3.2) и линейное типа (3.3) для функции, задающей уравнение состояния. Преобразованиями эквивалентности приводим нелинейное определяющее соотношение к простейшему виду. Возможны четыре случая упрощений 1°÷4°. В случае 1° уравнение типа (3.2) интегрируется, а из уравнения типа (3.3) следуют определяющие соотношения на коэффициенты. Групповая классификация проведена в работе [13] методом упрощений определяющих соотношений. В случае 2° уравнение типа (3.2) интегрируется. Уравнение типа (3.3) определяет функцию, задающую уравнение состояния, методом составления оптимальной системы подалгебр алгебры расширений ядра. Групповая классификация этого случая проведена в работе [14].

Последние два случая рассмотрены в настоящей статье. В случае 3° определяющие соотношения преобразованиями эквивалентности приводятся к переопределенной системе (3.4), (3.5). Изучение совместности приводит к представлению уравнения состояния по переменной V. Коэффициенты представления удовлетворяют переопределенной системе (4.2). Изучение совместности дает два случая уравнения состояния (4.3) и (4.6). Допускаемые алгебры находятся из соотношений (3.2) и (3.3) в виде (4.4), (4.5) и (4.7). В случае 4° нелинейное определяющее соотношение выполнено тождественно. Линейное соотношение преобразованиями эквивалентности приводится к виду (5.1) с коэффициентами, которым отвечают базисные операторы алгебры Ли преобразований эквивалентности. Строится оптимальная система подалгебр этой алгебры. Для каждой подалгебры определяются функции, задающие уравнения состояния, с которыми уравнения газовой динамики допускают подалгебру. Получено множество расширений ядра допускаемых уравнениями газовой динамики со специальными релаксирующими уравнениями состояния. Это позволит находить множество точных решений и подмоделей для уравнений движения многофазной среды с реагирующими компонентами. Предъявленные работы [12, 13, 14] развивают методы решения задачи групповой классификации — основной задачи группового анализа дифференциальных уравнений с произвольным элементом в случае четырех независимых переменных и произвольного элемента, зависящего от трех переменных. Применяются комбинации двух методов: метода упрощения определяющих соотношений и метода построения оптимальной системы подалгебр, расширяющих ядро допускаемых алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Программа подмодели. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // ПММ. 1999. Т. 63. № 3. С. 362–372.
3. *Борисов А.В., Хабиров С.В.* Преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики // Многофазные системы. 2024. Т. 19. № 2. С. 44–48.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. *Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В.* Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.
6. *Мукминов Т.М., Хабиров С.В.* Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // СЭМИ. 2019. Т. 16. С. 121–143.
7. *Хабиров С.В.* Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // СМЖ. 2004. Т. 45. № 3. С. 682–701.
8. *Мукминов Т.М., Хабиров С.В.* Простые волны конических движений // УМЖ. 2022. Т. 14. № 2. С. 82–93.
9. *Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovich R.O.* Equivalence groupoid and group classification of a class of nonlinear wave and elliptic equations // arXiv:2002.08939v1 [math-ph] 20 Feb 2020. 38 p.
10. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология: концепции, методы, приложения. С.-Пб.: Изд-во Профессия, 2010. 557 с.
11. *Vladimirov V.A.* Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solution // Proc. Inst. of Mathematics of NASU. Kiev: 2000. V. 30. Pt. 1. P. 231–238.
12. *Хабиров С.В.* Групповая классификация идеальных газодинамических релаксирующих сред по преобразованиям эквивалентности // СМЖ. 2023. Т. 64. № 4. С. 936–954.

13. *Хабиров С.В.* К групповой классификации идеальных газодинамических релаксирующих сред // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 2. С. 260–270.
14. *Хабиров С.В.* К групповой классификации релаксирующей газовой динамики методом оптимальной системы подалгебр // СМЖ. 2025. Т. 66, № 1. С. 106–128.

Приложение. Оптимальная система подалгебр в случае $ɜ_S = 0, \tilde{N} = 0$

П1. Одномерные подалгебры

1.1. $X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$, 1.2. $X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$
1.3. $\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0$, 1.4. $X_{12} + \alpha X_0$, 1.5. X_0

П2. Двухмерные подалгебры

2.1. $\left\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0\right\}$
2.2. .$\left\{X_{10} + \beta X_{12} + \gamma X_0, \tilde{X}_{11} + \beta_1 X_{12} + \gamma_1 X_0\right\}$
2.3. $\left\{X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_0, X_{12} + \gamma X_0\right\}$, 2.4. $\left\{X_{10} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12}, X_0\right\}$
2.5. $\left\{X_{13} + \alpha X_{12} + \beta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha_1 X_{12} + \beta_1 X_0\right\}$
2.6. $\left\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \gamma X_0, X_{12} + \beta X_0\right\}$, 2.7. $\left\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_4 + \beta\tilde{X}_{12}, X_0\right\}$
2.8. $\left\{\tilde{X}_{11} + \alpha X_0, X_{12} + \beta X_0\right\}$, 2.9. $\left\{X_{12}, X_0\right\}$, 2.10. $\left\{\tilde{X}_{11}, X_0\right\}$

П3. Трехмерные подалгебры

3.1. $\left\{X_{10}, X_{13} + \alpha X_{12} + \beta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha_1 X_{12} + \beta_1 X_0\right\}$
3.2. $\left\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \gamma X_0, X_{12} + \beta X_0\right\}$
3.3. $\left\{X_{10}, X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12}, X_0\right\}$, 3.4. $\left\{X_{10} + \delta X_0, \tilde{X}_{11} + \alpha X_0, X_{12} + \beta X_0\right\}$
3.5. $\left\{X_{10} + \delta X_{12}, \tilde{X}_{11}, X_0\right\}$, 3.6. $\left\{X_{10} + \delta\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\right\}$
3.7. $\left\{X_{13} + \alpha X_0, \tilde{X}_{11} + \beta X_{10}, X_{12} + \gamma X_0\right\}$, 3.8. $\left\{X_{13} + \alpha X_{12}, \tilde{X}_{11}, X_0\right\}$
3.9. $\left\{X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\right\}$, 3.10. $\left\{\tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\right\}$

П4. Четырехмерные подалгебры

4.1. $\left\{X_{10}, X_{13} + \alpha X_0, \tilde{X}_{11} + \beta X_0, X_{12} + \gamma X_0\right\}$
4.2. $\left\{X_{10}, \tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\right\}$, 4.3. $\left\{X_{13}, \tilde{X}_{11}, X_{12}, X_0\right\}$

Здесь α, β, γ – постоянные, $\delta = 0$ или 1. Для любой подалгебры произвольный оператор $X = B_0 X_{10} + N_0\tilde{X}_{11} + EX_{12} + BX_{13} + C_0 X_0$ алгебры L_5 равен линейной комбинации базисных операторов подалгебры с произвольными коэффициентами λ, μ, ν, σ. Постоянные B_1, $\varGamma$ в равенстве (5.1) линейно выражаются через произвольные коэффициенты. Их нет в выражениях для оператора X. Они определяются уравнением состояния. Каждая подалгебра определяет с помощью соотношения (5.1) уравнения состояния, с которыми система (2.1) – (2.3) допускает эту подалгебру.

Подалгебра 1.1 $X = \lambda\left(X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0\right) \Rightarrow B_0 = \lambda\gamma, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta,$

$B = \lambda, C_0 = \lambda\gamma, B_1 = \lambda b_1, \varGamma = \lambda b_0$. Равенство (5.1) после сокращения на λ определяет уравнение для функции, задающей уравнение состояния, чтобы подалгебра допускалась уравнениями газовой динамики (2.1)–(2.3),

$$te_t + \beta Ve_V + \gamma\eta\left(S\right)e_S = 2e\left(\alpha - 1\right) - Vb_1 - b_0$$

Аналогичные вычисления для других подалгебр из оптимальной системы определяют уравнения для функций, задающих уравнения состояния.

Подалгебра 1.2. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta, B = 0, C_0 = \lambda\gamma$

$$e_t + \beta Ve_V + \gamma\eta\left(S\right)e_S = 2\alpha e - Vb_1 - b_0$$

Подалгебра 1.3. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda, E = \lambda\beta, B = 0, C_0 = \lambda\gamma$

$$\beta V e_V + \gamma r(S) e_S = 2e - Vb_1 - b_0$$

Подалгебра 1.4. $\Rightarrow B_0 = N_0 = B = 0, E = \lambda, C_0 = \lambda\alpha$

$$Ve_V + \alpha r(S) e_S = -Vb_1 - b_0$$

Подалгебра 1.5. $\Rightarrow B_0 = N_0 = E = B = 0, C_0 = \lambda$

$$e = g(t,V) - (Vb_1 + b_0)(S \text{ или } \ln|S|)$$

Подалгебра 2.1. $X = \lambda X_{10} + \mu\left(X_{13} + \alpha\tilde{X}_{11} + \beta X_{12} + \gamma X_0\right) \Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu\alpha,$ $E = \mu\beta, B = \mu, C_0 = \mu\gamma, B_1 = \lambda b_1 + \mu b_2, \Gamma = \lambda b_{01} + \mu b_{02}$.

Равенство (5.1) после расщепляется по λ и μ дает 2 уравнения для функции e

$$e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -(b_1 V + b_{01})t + e_1(V,S)$$

$$te_t + \beta V e_V + \gamma r(S) e_S = 2(\alpha - 1)e - Vb_2 - b_{02} \Rightarrow (2\alpha - 3)b_{01} = 0$$

$$(2\alpha - \beta - 3)b_1 = 0, \beta V e_{1V} + \gamma r(S) e_{1S} = 2(\alpha - 1)e_1 - Vb_2 - b_{02}$$

Подалгебра 2.2. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \lambda\beta + \mu\beta_1, B = 0, C_0 = \lambda\gamma + \mu\gamma_1$

$(5.1) \Rightarrow e_t + \beta V e_V + \gamma r(S) e_S = -b_1 V - b_{01}$

$$\beta_1 V e_V + \gamma_1 r(S) e_S = 2e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_{02} \sim 0$$

Если $\beta \neq 0$, то $e = -\dfrac{b_1}{\beta}V - \dfrac{b_{01}}{\beta}\ln V + e_1(V_1, S_1), V_1 = Ve^{-\beta t}$

$$S_1 = -\gamma t + (S \text{ или } \ln|S|); b_{01} = 0, b_2 = (\beta_1 - 2)b_1\beta^{-1}$$

$$\beta_1 V_1 e_{1V_1} + \gamma_1 e_{1S_1} = 2e$$

Если $\beta = 0$, то $e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S_1);\ b_{01} = 0$

$$b_1(\beta_1 - 2) = 0, \beta_1 V e_{1V} + \gamma_1 e_{1S_1} = 2e_1 - b_2 V$$

Подалгебра 2.3. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \alpha\lambda, E = \mu, B = 0, C_0 = \lambda\beta + \mu\gamma$

$(5.1) \Rightarrow e_t + \beta r(S) e_S = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t(b_1 V + b_{01}) + e_1(V, S_1)$

$$S_1 = -\beta t + (S \text{ или } \ln|S|); Ve_V + \gamma r(S) e_S = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 \sim 0$$

$$Ve_{1V} + \gamma e_{1S_1} = -b_{02}$$

Подалгебра 2.4. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta, B = 0, C_0 = \mu$

$(5.1) \Rightarrow \eta(S) e_S = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow e = e_1(t,V) - (b_2 V + b_{02})(S \text{ или } \ln|S|)$

$$e_t + \beta V e_V = 2\alpha e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow \alpha b_{02} = 0, (\beta - 2\alpha)b_2 = 0$$

$$e_{1t} + \beta V e_{1V} = 2\alpha e_1 - b_1 V - b_{01}$$

Подалгебра 2.5. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \mu, E = \lambda\alpha + \mu\alpha_1, B = \lambda, C_0 = \lambda\beta + \mu\beta_1$

$(5.1) \Rightarrow te_t + \alpha V e_V + \beta\eta(S)e_S = -2e - b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0; b_{01} \sim 0$

$$e = t^{-2}g(V_1, S_1), V_1 = Vt^{-\alpha}, S_1 = -\beta\ln|t| + (S \text{ или } \ln|S|)$$

$$\alpha_1 V e_V + \beta_1\eta(S)e_S = 2e - b_2V - b_{02} \Rightarrow b_{02} = 0$$

$$\alpha_1 V_1 g_{V_1} + \beta_1 g_{S_1} = 2g - b_2V_1, b_2 = 0 \text{ при } \alpha \neq -2 \text{ или } \alpha_1 \neq 2$$

Подалгебра 2.6. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \mu, B = \lambda, C_0 = \lambda\gamma + \mu\beta$

$(5.1) \Rightarrow te_t + \gamma\eta(S)e_S = 2(\alpha - 1)e - b_1V - b_{01}, Ve_V + \beta\eta(S)e_S = -b_2V - b_{02}$

Если $\alpha \neq 1$, то $b_1 \sim 0, b_{01} \sim 0, e = 2(\alpha - 1)\ln|t| + e_1(V, S_1)$

$$S_1 = t^{-\gamma}(e^S \text{ или } S), e_{1V} + \beta S_1 e_{1S_1} = -b_{02}, b_2 \sim 0$$

Если $\alpha = 1$, то $e = -b_{01}\ln|t| + e_1(V, S_1), Ve_{1V} + \beta S_1 e_{1S_1} = -b_{02}$

$$b_1 = 0, b_2 \sim 0$$

Подалгебра 2.7. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \lambda\beta, C_0 = \mu, B = \lambda$

$(5.1) \Rightarrow \eta(S)e_S = -b_2V - b_{02} \Rightarrow e = e_1(t, V) - (b_2V + b_{02})(S \text{ или } \ln|S|)$

$$te_t + \beta Ve_V = 2(\alpha - 1) - Vb_1 - b_{01} \Rightarrow (\alpha - 1)b_{02} = 0, (\beta - 2\alpha - 2)b_2 = 0$$

$$te_{1t} + \beta Ve_{1V} = 2(\alpha - 1)e_1 - Vb_1 - b_{01}$$

Подалгебра 2.8. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda, E = \mu, B = 0, C_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$

$(5.1) \Rightarrow \alpha\eta(S)e_S = 2e - b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0, b_{01} \sim 0, \alpha \neq 0$

$$e = e_1(t, V)(e^S \text{ или } S)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$Ve_V + \beta\eta(S)e_S = -b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 = b_{02} = 0, e_1 = V^{-\frac{2\beta}{\alpha}}g(t)$$

Подалгебра 2.9. $\Rightarrow B_0 = B = N_0 = 0, E = \lambda, C_0 = \mu$

$(5.1) \Rightarrow Ve_V = -b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 \sim 0; b_{01} \neq 0, e = -b_{01}\ln V + e_1(t, S)$

$$\eta(S)e_S = -b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 = 0; b_{02} \neq 0, e_1 = g(t) - b_{02}(S \text{ или } \ln|S|)$$

Подалгебра 3.1. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \nu, E = \alpha\mu + \alpha_1\nu, B = \mu, C_0 = \beta\mu + \beta_1\nu$

$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1V - b_{01} \Rightarrow e = -(b_1V + b_{01})t + e_1(V, S)$

$$te_t + \alpha Ve_V + \beta\eta(S)e_S = -2e - b_2V - b_{02} \Rightarrow b_{02} \sim 0; b_{01} = 0, b_1 \neq 0$$

$$\alpha = -3, b_2 \sim 0$$

$$\alpha_1 Ve_V + \beta_1 r(S)e_S = 2e - b_3V - b_{03} \Rightarrow \alpha_1 = 2, b_3 = b_{03} = 0; \beta_1 \neq 0.$$

Изучая совместность последних двух уравнений раздельно при $\beta \neq 0$ и при $\beta = 0$, получим единую формулу

$$e = -b_1 tV + GV^{\frac{2}{3}+\frac{\beta}{9\beta_1}}\left(e^S \text{ или } |S|\right)^{\frac{1}{3\beta_1}}$$

Подалгебра 3.2. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \alpha\mu, E = \nu, B = \mu, C_0 = \gamma\mu + \beta\nu$

$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t\left(b_1 V + b_{01}\right) + e_1\left(V, S\right)$

$$te_t + \gamma\eta\left(S\right)e_S = 2\left(\alpha - 1\right)e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \gamma \neq 0, e_1 = g\left(V\right)\left(e^S \text{ или } |S|\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$Ve_V + \beta\eta\left(S\right)e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, b_1 = 0, b_{01} \neq 0, g = GV^{\frac{\beta}{\gamma}}$$

Уравнение состояния имеет вид

$$e = -b_{01}t + GV^{\frac{\beta}{\gamma}}(e^S \text{ или } |S|)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ при } \alpha = \frac{3}{2}, \gamma \neq 0$$

Подалгебра 3.3. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu\alpha, E = \mu\beta, B = \mu, C_0 = \nu$

$(5.1) \Rightarrow e_t = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow e = -t\left(b_1 V + b_{01}\right) + e_1\left(V, S\right)$

$$te_t + \beta Ve_V = \left(\alpha - 1\right)e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_{01}\left(\alpha - 2\right) = 0, b_1\left(\beta - \alpha + 2\right) = 0$$

$$\eta e_S = -Vb_3 - b_{03} \Rightarrow e_1 = g\left(V\right) - \left(Vb_3 + b_{03}\right)\left(S \text{ или } \ln|S|\right)$$

$$b_{03}\left(\alpha - 1\right) = 0, b_3\left(\beta - \alpha + 1\right) = 0, \beta Vg' = \left(\alpha - 1\right)g - Vb_2 - b_{02}$$

Если $b_1 \neq 0$, $b_{01} \neq 0$, то $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $b_{03} = 0$, $b_3 = 0 \Rightarrow e_S = 0$ противоречие.

Если $b_1 \neq 0$, $b_{01} = 0$, то $\beta = \alpha - 2$, $b_3 = 0$, $b_{03} \neq 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$$g \sim b_{02}\ln V, e = -b_1 Vt + b_{02}\ln V - b_{03}\left(S \text{ или } \ln|S|\right)$$

Если $b_1 = 0, b_{01} \neq 0$, то $\alpha = 2, b_{03} = 0, \beta = \alpha - 1 = 1, g \sim -b_2 V\ln V$

$$e = -b_{01}t - b_2 V\ln V - b_3\left(S \text{ или } \ln|S|\right)$$

Подалгебра 3.4 $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \nu, B = 0, C_0 = \lambda\delta + \mu\alpha + \nu\beta$

$(5.1) \Rightarrow \alpha\eta\left(S\right)e_S = 2e - b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, b_{02} \sim 0, \alpha \neq 0$

$$e = e_1\left(t, V\right)(e^S \text{ или } |S|)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$e_t + \delta\eta e_S = -b_1 V - b_{01} \Rightarrow b_1 = b_{01} = 0, e_1 = g\left(V\right)e^{-\frac{2\delta}{\alpha}t}$$

$$Ve_V + \beta\eta e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, g = GV^{-\frac{2\beta}{\alpha}}$$

Подалгебра 3.6. $\Rightarrow B_0 = \lambda, N_0 = \mu, E = \lambda\delta, B = 0, C_0 = \nu$

$(5.1) \Rightarrow Ve_V = -b_2 V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, e = -b_{02}\ln V + e_1\left(t, S\right)$

$$\eta e_S = -b_3 V - b_{03} \Rightarrow e_1 = g\left(t\right) - \left(b_3 V + b_{03}\right)\left(S \text{ или } \ln|S|\right)$$

$$e_t = 2\delta e - b_1 V - b_{01} \Rightarrow \delta = 0, b_1 = 0, g = -b_{01}t$$

Подалгебра 3.7. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \mu, E = \nu, B = \lambda, C_0 = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$

(5.1) $\Rightarrow \beta\eta e_S = 2e - b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, b_{02} \sim 0, \beta \neq 0, e = e_1(t,V)e^{\frac{2}{\beta}S}$

$$\gamma\eta e_S + Ve_V = -b_3V - b_{03} \Rightarrow b_3 = b_{03} = 0, e_1 = g(t)V^{-\frac{2\gamma}{\beta}}$$

$$te_t + \alpha\eta e_S = -2e - b_1V - b_{01} \Rightarrow b_1 = b_{01} = 0, g = Gt^{-2\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Подалгебра 3.9. $\Rightarrow B_0 = 0, N_0 = \lambda\alpha, E = \mu, B = \lambda, C_0 = \nu$

(5.1) $\Rightarrow Ve_V = -b_2V - b_{02} \Rightarrow b_2 \sim 0, e = -b_{02}\ln V + e_1(t,S)$

$$\eta e_S = -b_3V - b_{03} \Rightarrow e_1 = -(b_3V + b_{03})(S \text{ или } \ln|S|) + g(t)$$

$$te_t = 2(\alpha - 1)e - b_1V - b_{01} \Rightarrow \alpha = 1, b_1 = 0, g = -b_{01}\ln|t|$$

Замечание. Подалгебры 2.10, 3.5, 3.8, 3.10, 4.1, 4.2, 4.3 не производят уравнения состояния с условиями $e_{VV} \neq 0, e_S \neq 0, e_t \neq 0$.

Итак, в случае 4° для коэффициентов уравнения типа (3.2) проведена групповая классификация уравнений газовой динамики методом построения оптимальной системы подалгебр, расширяющих ядро.

Methods of Group Classification for Relaxing Gasdynamics

S. V. Khabirov[1,#]

[1]Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

[#]e-mail: habirov@anrb.ru

Group classification is the basic problem of the group analysis of differential equations with an arbitrary element. For the equations of the ideal gas dynamics with a state equation invariable on time the problem was solved by enumerating simplifications of the determining relations using equivalence transformations. For a state equation depending on time the exhaustive search is vast and it can be used optimal systems of subalgebras for the subalgebra extending the kernel of admitted algebras. Combination of the both methods solves the problem of the group classification for the relaxing gas dynamics.

Keywords: gas dynamics, relaxing state equation, equivalence transformation, determining relation, group classification, optimal system of subalgebras

REFERENCES

1 *Ovsyannikov L.V.* The “podmodeli” program. Gas dynamics // JAMM, 1994, vol. 58, iss. 4, pp. 601–627.

2 *Ovsyannikov L.V.* Some results of the implementation of the “podmodeli” program for the gas dynamics equations // JAMM, 1999, vol. 58, iss. 4, pp. 349–358

3 *Borisov A.V., Khabirov S.V.* Equivalence transformations for gas dynamics equations // Multiphase Syst., 2024, vol. 19, no. 2, pp. 44–48.

4 *Ovsyannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka. 1978. 399 p. (in Russian)

5 *Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V.* Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics. Novosibirsk: NSTU, 2012. 659 p.

6 *Mukminov T.M., Khabirov S.V.* Graph of nested subalgebras of the 11-dimensional symmetry algebra of a continuous medium // SEMI, 2019, vol. 16, pp. 121–143.

7 *Khabirov S.V.* Classification of differentially invariant submodels // Sib. Math. J., 2004, vol. 45, no. 3, pp. 682–701.

8 *Mukminov T.M., Khabirov S.V.* Simple waves of conical motions // Ufa J. of Math., 2022, vol. 14, no. 2, pp. 82–93.

9 *Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovich R.O.* Equivalence groupoid and group classification of a class of nonlinear wave and elliptic equations // arXiv:2002.08939v1 [math-ph] 20 Feb 2020. 38 p.

10 *Malkin A.Ya., Isaev A.I.* Rheology: Concepts, Methods, Applications. St. Petersburg: Professiya Pub., 2010. 557 p.

11 *Vladimirov V.A.* Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solution // Proc. of Inst. of Mathematics of NASU, 2000, vol. 30, Pt. 1, pp. 231–238.

12 *Khabirov S.V.* Group classification of ideal gas-dynamic relaxing media by equivalence transformations // Sib. Math. J., 2023, vol. 64, no. 4, pp. 936–954.

13 *Khabirov S.V.* On group classification of ideal gas-dynamic relaxing media // Proc. of the Krasovskii Inst. of Mathematics and Mechanics of the UB RAS, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 260–270.

14 *Khabirov S.V.* On group classification of relaxing gas dynamics by the method of optimal system of subalgebras // Sib. Math. J., 2025, vol. 66, no. 1, pp. 106–128.