

УДК 532.526

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ

© 2024 г. И. Р. Мухаметзянов^{1,*}

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Филиал “Восток”, Чистополь, Россия

*e-mail: m.ilshat@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2023 г.

После доработки 12.06.2024 г.

Принята к публикации 18.06.2024 г.

Рассматривается приближенный способ решения краевой задачи для уравнений оптимально управляемого ламинарного пограничного слоя на проницаемых цилиндрических поверхностях в высокоскоростных потоках газа.

Ключевые слова: сверхзвуковое обтекание, ламинарный пограничный слой, оптимальный вдув, закон Дарси, первый интеграл.

DOI: 10.31857/S0032823524060072 EDN: IGNURC

1. Введение. Управление теплообменом в сверхзвуковом пограничном слое является актуальной темой исследований в области фундаментальной и прикладной газодинамики. Вследствие ограниченных энергетических ресурсов естественным образом возникает вариационная задача о построении оптимального закона вдува через проницаемый участок обтекаемой поверхности при заданном ограничении на мощность системы управления вдувом. Задача оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях впервые была поставлена в работе [1] для случая несжимаемой жидкости. Впоследствии такие задачи были рассмотрены в работах [2–8]. В основном они рассматривались для граничных условий, удовлетворяющих на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя. Отметим, что в работе [2] рассмотрена история и современное состояние исследований теории оптимально управляемого пограничного слоя на проницаемых поверхностях.

В работе рассматривается вариационная задача о минимизации конвективного теплового потока, передаваемого от разогретого пограничного слоя к обтекаемой поверхности, при заданном ограничении на мощность системы управления вдувом. В качестве управления выступает удельный расход охладителя через проницаемый участок поверхности. При этом, согласно условиям трансверсальности, оптимальное управление должно обращаться в ноль на правом конце участка вдува. Данное требование вызывает большие математические затруднения и приводит к увеличению трудоемкости решения вариационной задачи. Автору известны только единичные публикации, в которых оптимальное управление удовлетворяет нулевому условию на правом конце участка вдува. В одной из них [6] было найдено приближенное решение для оптимального управления в аналитической форме; в других [7, 8] – решение находилось достаточно трудоемким конечно-разностным методом. Получение конечного результата в этих работах было сопряжено со значительными трудностями.

Новизна работы состоит в построении алгоритма оптимального управления, который более удобен для применения в инженерной практике. Достигается это путем использования классической теоремы Э. Нётер об инвариантных вариационных задачах, а также следствия из первого интеграла для сопряженной системы, который получен ранее в работе [6]. С содержательной точки зрения, использование следствия из первого интеграла позволило существенно уменьшить трудоемкость построения оптимального управления. Так как в этом случае аппроксимирующая система уравнений (в переменных А.А. Дородницына [9]), участвующая в вычислительных экспериментах, становится замкнутой относительно искомой функции. Таким образом, в рассматриваемой работе предложена процедура построения оптимального управления более удобная для применения в инженерной практике и сводится она к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрешимой особенностью в точке торможения потока. Научное значение работы заключается в развитии теории оптимально управляемого пограничного слоя в сверхзвуковых потоках газа.

2. Постановка задачи. Уравнения ламинарного пограничного слоя на проникающем цилиндрическом профиле в сверхзвуковом потоке газа в переменных А.А. Дородницына имеют вид [9, 10]:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= \beta (1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} + \bar{w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} \right] + \alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[b(\tau) \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{t}} \right]$$

В системе (2.1):

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{1}{l} \int_0^x q dx, \bar{t} = \frac{U_e \eta}{\sqrt{v_{e0} V_{\max} l}}, \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\tau} dy, \bar{u} = \frac{u}{U_e} \\ \bar{w} &= \sqrt{\frac{V_{\max} l}{v_{e0}}} \left[(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\vartheta}{\tau U_e} \right] + \frac{U_e \bar{t} \bar{u}}{U_e}, \psi = 1 - \tau - \alpha_e^2 \bar{u}^2 \\ q &= \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}, \alpha_e = \frac{U_e}{V_{\max}}, \tau = \frac{T}{T_0}, V_{\max} = V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_{\infty}^2}}, \end{aligned}$$

где $b(\tau) = \frac{\mu}{\mu_0 \tau}$, $\beta = \frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e (1 - \alpha_e^2)}$, $\dot{\alpha}_e = \frac{d\alpha_e}{d\bar{s}}$, l – некоторый характерный размер; M_{∞} –

число Маха; Pr – число Прандтля; u и ϑ – проекции вектора скорости на координатные оси x и y ; γ – показатель адиабаты; μ – динамическая вязкость газа; T – температура газа; v – кинематическая вязкость газа; индекс « e » соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, индекс « 0 » – в точке полного торможения потока, индекс « ∞ » – параметрам газа в набегающем потоке; U_e – скорость на внешней границе пограничного слоя, определяющая форму обтекаемой поверхности.

Краевые условия к системе (2.1) имеют вид [10]

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 0, \bar{w} = \frac{m(\bar{s})}{q(\bar{s})}, \psi = 1 - \tau_w (\bar{t} = 0) \\ \bar{u} &\rightarrow 1, \psi \rightarrow 0 (\bar{t} \rightarrow \infty) \\ \bar{u} &= 1, \psi = 0 (\bar{s} = 0),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $m = \frac{(\rho\vartheta)_w}{\rho_0} \sqrt{\frac{l}{v_0 V_{\max}}}$, индекс «w» соответствует расходу охладителя через пронизаемый участок обтекаемого профиля.

Мощность, затрачиваемая системой управления на вдув газа через пористую стенку, в переменных А.А. Дородницына с учетом закона Дарси и минимизируемый функционал с точностью до постоянных запишутся, соответственно, в виде [11] (в дальнейшем для простоты черточки над переменными \bar{t} , \bar{s} , \bar{u} , \bar{w} опустим)

$$\bar{N} = \int_0^{s_k} f(1 - \psi_w)^2 m^2 ds \quad (2.3)$$

$$\bar{Q} = - \int_0^{s_k} \left(b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0} ds, \quad (2.4)$$

где $s_k = \frac{1}{l} \int_0^{x_k} q dx$, $f = 1/\alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)}$.

Вариационная задача ставится следующим образом. Среди непрерывных на отрезке $[0, s_k]$ управлений $m(s)$ требуется отыскать такое, которое реализует минимальное значение конвективного теплового потока (2.4) при связях (2.1), (2.2) и изопериметрическом условии (2.3). Вариационная задача рассматривается в области D , ограниченной линиями $t = 0$, $s = s_k$, $t \rightarrow \infty$, $s = 0$.

Сопряженная система относительно множителей Лагранжа $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$, $\lambda_3(s, t)$ в соответствии с формализмом Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}2\beta u \lambda_1 + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial s} - u \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - w \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} - b \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} \right] - \\ - 2\alpha_e^2 u \frac{\partial b}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big\} - \\ - \frac{\partial b}{\partial t} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] = 0, \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0 \quad (2.5) \\ \beta \lambda_1 - \frac{\partial b}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big\} - \\ - \frac{\partial}{\partial s} (\lambda_3 u) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda_3 w + \frac{b}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] = 0\end{aligned}$$

Краевые условия к системе (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 0, \lambda_3 = \text{Pr} (t = 0) \\ \lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow 0, \lambda_3 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty) \\ \lambda_1 = \lambda_3 = 0 (s = s_k)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Интегрируя третье уравнение системы (2.5) по переменной u в пределах от 0 до 1, с учетом граничных условий (2.2) и (2.6) получим интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^1 \lambda_3 u \theta du = \beta \int_0^1 \lambda_1 \theta du + \left(\lambda_3 w + \frac{b}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} - \\ - \int_0^1 \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} \right] \frac{\bar{b}}{\theta} du - \frac{1}{\text{Pr}} \int_0^1 \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} \bar{q} du, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\bar{b}(\tau) = \frac{\partial b}{\partial \tau}$, $\bar{q} = \bar{b}(\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, $\theta = \frac{1}{\partial u / \partial t}$.

Для рассматриваемой оптимальной задачи (2.1)–(2.4) сопряженная система уравнений (2.5) допускает первый интеграл [11], полученный с помощью классической теоремы Эмми Нётер об инвариантных вариационных задачах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (u \lambda_2) + \left[\lambda_1 w + 2\alpha_e^2 \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \lambda_3 R_1 + \lambda_4 b(\tau) \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \left[\lambda_3 w + \lambda_3 b(\tau) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\lambda_3}{\text{Pr}} \frac{\partial R_2}{\partial t} - \left[\lambda_1 - 2\alpha_e^2 \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u \lambda_3 \right] \frac{\partial R_1}{\partial t} = g(s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$R_1 = b(\tau) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad R_2 = b(\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где $g(s)$ – произвольная функция интегрирования. Предполагая, что при $t \rightarrow \infty$ функции $\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$ являются ограниченными, из этого уравнения, с учетом граничных условий (2.2) и (2.6), получим $g(s) \equiv 0$.

Следствие из первого интеграла имеет вид [11]

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) устанавливает точную явную связь между градиентами множителей Лагранжа на произвольной поверхности при любых числах Прандтля и при произвольной зависимости вязкости газа от температуры.

Используя метод обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына, систему уравнений в частных производных (2.1) с краевыми условиями (2.2) приближенно заменим аппроксимирующей системой второго приближения [6, 10, 12]

$$\begin{aligned} \theta'_0 = 18m - 6\beta q \left(\frac{7\theta_1}{6} + \frac{9\theta_0}{6} - \frac{5\omega_1}{3} - \frac{4\omega_0}{3} \right) - \frac{32qb_1}{\theta_1} + \frac{34qb_0}{\theta_0} \\ \theta'_1 = 12m - 12\beta q \left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{\theta_1}{2} - \frac{2\omega_1}{3} - \frac{\omega_0}{3} \right) - \frac{16qb_1}{\theta_1} + \frac{20qb_0}{\theta_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \omega'_1 = 6m \frac{\omega_0}{\theta_0} - 6\beta q \left(\frac{\omega_0}{6} + \frac{\omega_1}{2} - \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1} - \frac{\omega_0^2}{6\theta_0} \right) + \frac{6q\omega_0 b_0}{\theta_0^2} + 6q \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \\ \times \left[\frac{b_0}{6\theta_0} \left(4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) - \frac{2b_1\omega_0}{3\theta_1\theta_0} \right] - \frac{6qb_0}{\text{Pr}\theta_0} \left(4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) + 4q \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \alpha_e^2 \frac{b_1}{\theta_1} \\ \omega'_0 = -\theta_0 \tau'_w + (1 - \tau_w) \theta'_0, \quad \text{где } \beta q = \alpha'_e / (\alpha_e (1 - \alpha_e^2)) \end{aligned}$$

Уравнения (2.10) получены для произвольной зависимости вязкости газа от температуры. Они значительно упрощаются, если допустить линейную зависимость (в этом случае $b_0 = b_1 = 1$).

Начальные условия для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.10) имеют вид [10,12]

$$\theta_0(\bar{x}_0) = \bar{\theta}_0 \bar{x}_0, \theta_1(\bar{x}_0) = \bar{\theta}_1 \bar{x}_0, \omega_0(\bar{x}_0) = \bar{\omega}_0 \bar{x}_0, \omega_1(\bar{x}_0) = \bar{\omega}_1 \bar{x}_0, \quad (2.11)$$

где \bar{x}_0 – близкая к нулю точка [6]. Постоянные $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$ определяются из решения алгебраической системы вида [6,10,12]

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_0 &= 18m(0) - 7\bar{\theta}_1 - 9\bar{\theta}_0 + 10\bar{\omega}_1 + 8\bar{\omega}_0 - \frac{32cb_1(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{34cb_0(0)}{\bar{\theta}_0} \\ \bar{\theta}_1 &= 12m(0) - 4\bar{\theta}_0 - 6\bar{\theta}_1 + 8\bar{\omega}_1 + 4\bar{\omega}_0 - \frac{16cb_1(0)}{\bar{\theta}_1} + \frac{20cb_0(0)}{\bar{\theta}_0} \\ \bar{\omega}_1 &= 6m(0)\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - \bar{\omega}_0 - 3\bar{\omega}_1 + \frac{4\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1} + \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0} + \frac{6cb_0(0)\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0^2} + 6c\left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \times \\ &\times \left[\frac{b_0(0)}{6\bar{\theta}_0} \left(4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right) - \frac{2b_1(0)\bar{\omega}_0}{3\bar{\theta}_1\bar{\theta}_0} \right] - \frac{6cb_0(0)}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} \left(4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} \right) \\ &\bar{\omega}_0 = \bar{\theta}_0(1 - \tau_w(0)) \end{aligned}$$

Оптимальное управление определяется по формуле [6]

$$m(\bar{x}) = (1 - \alpha_e^2)^{2\gamma/(\gamma-1)} \frac{\lambda_2(\bar{x}, 0)}{2\alpha\tau_w^2}, \quad (2.12)$$

где α – множитель Лагранжа, определяемый в соответствии с изопериметрическим условием (2.3),

$$\begin{aligned} \lambda_2(\bar{x}, 0) &= -\frac{1}{12} \left[B_1 \left(2l_0 - \frac{2l_0}{\text{Pr}} + l_1 \right) + B_0 \left(\frac{2l_0}{\text{Pr}} + 6l_0 + 2l_1 \right) \right] \\ l_0 &= 4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}, l_1 = 4\left(\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0} - 2\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

B_0 и B_1 – переменные коэффициенты в формуле для множителя Лагранжа λ_2 .

Подчеркнем, что с учетом формулы (2.12) аппроксимирующая система (2.10) становится замкнутой, и мы получаем стандартную задачу Коши.

С целью оценки влияния нулевого «начального» условия для множителя Лагранжа λ_2 на правом конце участка вдува ($\bar{x}_k = 1$) на значение минимизируемого функционала (конвективного теплового потока) рассмотрим три задачи. Аппроксимации для множителей Лагранжа во всех трех задачах зададим в виде, удовлетворяющем граничным условиям на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя [6]

$$\lambda_1 = u(1-u)A_0, \lambda_3 = (1-u)(B_0 + uB_1); A_0 = \frac{l_0}{\text{Pr}}(B_0 - B_1) \quad (2.14)$$

Граничные условия для множителей Лагранжа во всех задачах имеют вид

$$\lambda_1 = 0 \text{ при } u = 0, \lambda_1 = 0 \text{ при } u = 1$$

$$\lambda_3 = \text{Pr} \text{ при } u = 0; \lambda_3 = 0 \text{ при } u = 1 \quad (2.15)$$

Отметим, что множители Лагранжа автоматически удовлетворяют на поверхности обтекаемого тела и на внешней границе пограничного слоя. В соответствии с работой [11] оптимальное управление на правом конце участка вдува должно обращаться в ноль и, следовательно, согласно формуле (2.13) $B_0(\bar{x}_k) = B_1(\bar{x}_k) = 0$.

Задача 1. Учитываются: граничные условия на поверхности ($u = 0$), на внешней границе пограничного слоя ($u = 1$), а также следствие из первого интеграла (2.9). В этом случае A_0, B_0 и B_1 , входящие в формулу (2.13), запишутся в виде: $B_0 = \text{Pr}, B_1 = 0, A_0 = I_0$. Следовательно, выражение (2.13) примет вид

$$\lambda_2(\bar{x}, 0) = \text{Pr} \left[\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2\text{Pr}} \right) \frac{\omega_0}{\theta_0} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\omega_1}{\theta_1} \right]$$

Задача 2. Учитываются: граничные условия на поверхности ($u = 0$), на внешней границе пограничного слоя ($u = 1$), следствие из первого интеграла (2.9), а также «начальное» условие для функции $B_1(\bar{x})$, которую необходимо найти. В этом случае $B_0 = \text{Pr}, B_1(\bar{x}_k) = 0, A_0(\bar{x}_k) = I_0$.

Интегральное соотношение (2.7) запишется в виде [6]:

$$B_0 Z_0 + B_1 U_0 + \bar{x} \frac{d}{d\bar{x}} (B_0 Z_0 + B_1 U_0) = B_0 W_0 + B_1 S_0 \quad (2.16)$$

$$\text{Здесь } Z_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{3}, U_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{4}, W_0 = m(0) - \frac{c}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} + \frac{\bar{l}_0}{\text{Pr}} Z_0, S_0 = m(0) - W_0, \\ \bar{l}_0 = 4\frac{\bar{\omega}_1}{\theta_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\theta_0}, c = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{p_\infty}{p_0} \right)}.$$

Интегрируя (2.16), получим $B_1(\bar{x}) = \text{Pr} \frac{K_2}{K_1} (\bar{x}^{K_1} - 1)$, где $K_1 = (S_0/U_0) - 1, K_2 = (W_0 - Z_0)/U_0, B_1(\bar{x}_k) = 0$ при $\bar{x}_k = 1$.

Задача 3. Задача решается с учетом и граничных, и «начальных» условий. В этом случае $B_0(\bar{x}_k) = 0, B_1(\bar{x}_k) = 0$. Тогда из выражения (2.13) получим, что $\lambda_2(\bar{x}_k, 0) = 0$ при $\bar{x}_k = 1$ и, следовательно, $m(\bar{x}_k) = 0$. Аппроксимацию $B_0(\bar{x})$ зададим в виде $B_0(\bar{x}) = \text{Pr}(1 - \bar{x}^{\bar{\alpha}})$, где $\bar{\alpha} > 0$ при $0 \leq \bar{x} \leq 1$ и задается в процессе вычислительного эксперимента с учетом значения минимизируемого функционала.

Интегрируя уравнение (2.16), получим функцию

$$B_1(\bar{x}) = \text{Pr} \left[\frac{K_2}{K_1} (\bar{x}^{K_1} - 1) + \frac{\bar{\alpha} K_3 - K_2}{\bar{\alpha} - K_1} (\bar{x}^{\bar{\alpha}} - \bar{x}^{K_1}) \right],$$

$$\text{где } Z_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{3}, U_0 = -\frac{\bar{\theta}_0}{6} + \frac{\bar{\theta}_1}{4}, S_0 = m(0) - W_0 = \frac{c}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} - \frac{\bar{l}_0}{\text{Pr}} Z_0, \bar{l}_0 = 4\frac{\bar{\omega}_1}{\theta_1} - 3\frac{\bar{\omega}_0}{\theta_0}, \\ W_0 = m(0) - \frac{c}{\text{Pr}\bar{\theta}_0} + \frac{\bar{l}_0}{\text{Pr}} Z_0, K_1 = (S_0/U_0) - 1, K_2 = (W_0 - Z_0)/U_0, K_3 = Z_0/U_0,$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{p_\infty}{p_0} \right)}, B_1(\bar{x}_k) = 0 \text{ при } \bar{x}_k = 1.$$

3. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент по построению оптимального закона вдува был проведен для случая обтекания прямого кругового

Таблица 1. Сравнение результатов вычислительного эксперимента с данными полученными в работах [6] и [8]

Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Данные [6]	Данные [8]
24.92	25.03	26.32	31.3	26.12

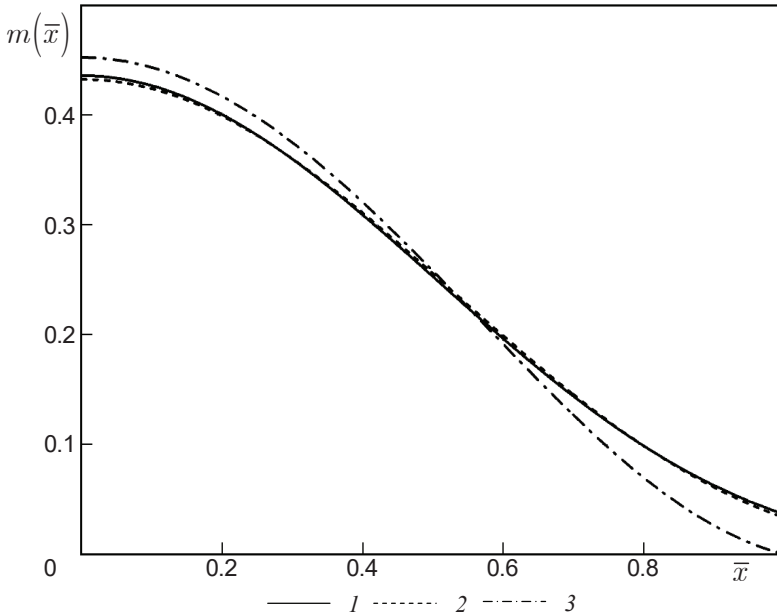


Рис. 1. Зависимость оптимальной скорости вдува решения задач 1–3 от координаты

цилиндра сверхзвуковым потоком воздуха. Параметры эксперимента задавались следующим образом: число Маха $M_\infty = 7$; радиус прямого кругового цилиндра $l = 0.05$ м; число Прандтля $Pr = 0.74$; $\bar{x}_k = 1$; параметры стандартной атмосферы соответствовали высоте 10000 м ($T_\infty = 223.15$ К, $P_\infty = 26491.08$ кг/м · с², $\rho_\infty = 4.1357 \cdot 10^{-1}$ кг/м³, $a = 299.45$ м/с, $v_\infty = 3.5232 \cdot 10^{-5}$ м²/с; безразмерная температура газа на стенке $\tau_w = 0.25$; мощность системы управления вдуваемого газа \bar{N} соответствует постоянному вдуву $m^{(0)}(\bar{x}) = 0.2$. Зависимость вязкости газа от температуры предполагалась линейной. Результаты вычислительного эксперимента по минимизации функционала теплового потока [6]

$$Q = \int_0^{\bar{x}_k} \frac{1}{\theta_0} \left(3 \frac{\omega_0}{\theta_0} - 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} \right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} d\bar{x},$$

записанного с точностью до постоянного множителя, по сравнению с равномерным (автомодельным) вдувом приведены в табл. 1 (в %).

На рис. 1 представлены графики оптимальных управлений для случая $m^{(0)}(\bar{x}) = 0.2$; $\tau_w = 0.25$.

Заключение. Оптимальные управления, полученные в работах [6, 8], по форме совпадают с управлениями, полученными в данной работе.

Значения теплового потока, полученные в задачах 1–3, оказались близкими к значению, полученному методом конечных разностей; при этом следует отметить близость тепловых потоков в задаче 1 и в работе [8]. Следовательно, в инженерных рас-

четах можно ограничиться рассмотрением математической модели, приведенной в задаче 1, которая существенно менее трудоемка нежели при использовании метода конечных разностей. Что касается результатов работы [6], то они дают завышенные значения минимизируемого функционала.

Отметим, что современное состояние исследований по рассматриваемой тематике, а также актуальность, новизна и практическая значимость, полученных ранее результатов, подробно рассмотрены в работе [2].

Подчеркнем, что новизна работы заключается в разработке менее трудоемкого (по сравнению с работами [6, 7, 11]) алгоритма решения вариационной задачи. Полученные результаты могут представить интерес при расчете систем активной тепловой защиты вдувом поверхностей в высокоскоростных потоках газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Авиац. техн. 1963. № 2. С. 11–21.
2. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* К теории оптимально управляемого пограничного слоя на проницаемых поверхностях при различных режимах течения // Изв. вузов. Авиац. техн. 2020. № 3. С. 42–52.
3. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* Оптимально управляемые турбулентные пограничные слои в сверхзвуковых потоках газа // Матем. моделир. 2023. Т. 35. № 7. С. 28–40.
4. *Гараев К.Г., Мухаметзянов И.Р.* К задаче оптимального управления турбулентным пограничным слоем на проницаемой поверхности в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 4. С. 136–145.
5. *Мухаметзянов И.Р.* Оптимальное управление турбулентным пограничным слоем на проницаемой цилиндрической поверхности в сверхзвуковом потоке газа // Изв. вузов. Авиац. техн. 2020. № 1. С. 64–70.
6. *Гараев К.Г.* Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя. Казань: Изд. Казан. гос. техн. ун-та, 1994. 240 с.
7. *Гараев К.Г., Кузнецов В.К.* Об одной инвариантной задаче ламинарного пограничного слоя // ПММ. 2011. № 4. С. 572–580.
8. *Гараев К.Г., Кузнецов В.К.* Оптимально управляемые ламинарные пограничные слои в сверхзвуковых потоках газа. Казань: Изд. Казан. гос. техн. ун-та, 2013. 164 с.
9. *Дородницын А.А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе. М.: Оборонгиз, 1957. С. 140–173.
10. *Лю Шень-Цюань.* Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува // ЖВММФ. 1962. № 5. С. 868–883.
11. *Гараев К.Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 92–100.
12. *Павловский Ю.Н.* Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе // ЖВММФ. 1962. № 5. С. 884–901.

Problem of Optimal Control of a Laminar Boundary Layer on Permeable Cylindrical Surfaces in Supersonic Flows

I. R. Mukhametzyanov^{a,*}

^a*Vostok Branch, Tupolev Kazan National Research Technical University, Chistopol, Russia*

^{*}*e-mail: m.ilshat@mail.ru*

An approximate method for solving the boundary value problem for the equations of an optimally controlled laminar boundary layer on permeable cylindrical surfaces in high-speed gas flows is considered.

Keywords: supersonic flow, laminar boundary layer, optimal injection, Darcy's law, first integral

REFERENCES

1. *Sirazetdinov T.K.* Optimal problems of gas dynamics // *Rus. Aeron.*, 1963, no. 2, pp. 11–21.
2. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* To the theory of an optimally controlled boundary layer on permeable surfaces at various flow modes // *Rus. Aeron.*, 2020, vol. 63, no. 3, pp. 413–424.
3. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* Optimally controlled turbulent boundary layers in supersonic gas flows // *Math. Models&Comput. Simul.*, 2023, vol. 15, suppl. 1, pp. S18–S26.
4. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* Problem of optimal control of the turbulent boundary layer on a permeable surface in supersonic gas flow // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 573–581.
5. *Mukhametzyanov I.R.* Optimal control of a turbulent boundary layer on a permeable cylindrical surface in a supersonic gas flow // *Rus. Aeron.*, 2020, vol. 63, no. 1, pp. 67–74.
6. *Garaev K.G.* Lie Groups and Noether Theory in the Control Problem with Applications to Optimal Problems of Boundary Layer. Kazan: KSTU Pub., 1994. 240 p. (in Russian)
7. *Garaev K.G., Kuznetsov V.K.* An invariant variational problem of the laminar boundary layer // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 404–409.
8. *Garaev K.G., Kuznetsov V.K.* Optimally Controlled Laminar Boundary Layers in Supersonic Gas Flows. Kazan: KSTU Pub., 2013. 164 p. (in Russian)
9. *Dorodnitsin A.A.* Laminar Boundary Layer in a Compressible Gas. Moscow: Oborongiz, 1957. pp. 140–173.
10. *Lyu Shen-Tsyuan.* Calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas in the presence of suction or blowing // *Comput. Math.&Mathem. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 1000–1020.
11. *Garaev K.G.* Optimal control of heat and mass transfer in a laminar compressible-gas boundary layer on permeable surfaces // *Fluid Dyn.*, 1988, vol. 23, no. 3, pp. 399–406.
12. *Pavlovskii Yu.N.* The numerical calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas // *Comput. Math.&Mathem. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 1021–1042.