

УДК 532.5

УДАРНАЯ ВОЛНА И ЦЕНТРИРОВАННАЯ ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ В ГАЗЕ АБЕЛЯ–НОБЛЯ

© 2024 г. М. А. Брутян^{1,2,*}, У. Г. Ибрагимов^{1,**}, М. А. Меняйлов^{1,***}¹Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Россия²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

e-mail: murad.brutyanyan@tsagi.ru*, umar.ibragimov94@yandex.ru**, mickmenn@yandex.ru***

Поступила в редакцию 08.04.2024 г.

После доработки 01.07.2024 г.

Принята к публикации 20.08.2024 г.

Рассматриваются плоские сверхзвуковые течения невязкого газа, подчиняющиеся уравнению состояния Абеля–Нобля (АН). Получены формулы, связывающие параметры течения данного газа до и после скачка уплотнения. Построено также решение задачи Прандтля–Майера о течении газа АН в центрированной волне разрежения. Найдены предельные значения углов отклонения вектора скорости в косой ударной волне и волне разрежения. Приведены сравнения с соответствующими решениями для совершенного газа.

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, газ Абеля–Нобля, ударная волна, течение Прандтля–Майера.

DOI: 10.31857/S0032823524060045 EDN: IGZMRY

1. Введение

В работе рассматриваются плоские сверхзвуковые течения в ударной волне и центрированной волне разрежения для газа, подчиняющегося уравнению состояния АН. Данная модель, которая с приемлемой точностью описывает течения при высоких температурах и давлениях от 50 до 2000 МПа, является простым обобщением модели совершенного газа. В практических приложениях модель газа АН используется во внутренней баллистике оружейных каналов, а также при расчетах течения газа в различных ракетных установках [1, 2]. Автомодельные течения газа АН в клине изучены в работе [3], в которой установлена возможность существования таких течений в ограниченном диапазоне чисел Маха и углов раствора клина. Вопросам численного моделирования течений газов с уравнением состояния общего вида, в частности газа АН, посвящены работы [4, 5]. В работе [6] дано сравнение термодинамических параметров газа АН и газа, подчиняющегося уравнению состояния Soave–Redlich–Kwong (SRK). В работе [7] исследуется задача Римана о распаде разрыва для различных моделей газа. В работе [8] получены некоторые формулы для прямого скачка уплотнения в газе АН. Отдельные вопросы детонационных свойств газа АН изучены в работах [8–10]. В настоящей работе наряду с прямым скачком уплотнения рассматривается косой скачок и центрированная волна разрежения в газе АН.

Общая форма уравнения состояния газов может быть записана в виде вириального уравнения состояния [11]:

$$\frac{p}{\rho RT} = 1 + B(T)\rho + C(T)\rho^2 + \dots,$$

где $B(T)$, $C(T)$ и т.д. — функции только температуры и не зависят от давления и плотности. Если во втором приближении функцию $B(T)$ представить в виде $B(T) = b - b_1 / RT$, а $C(T)$ и другие члены положить равными нулю, то получим известное уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$p + b_1 \rho^2 = \rho RT(1 + b\rho),$$

которое описывает свойства жидкости, как в газообразной, так и в жидкой фазах. Параметр b связан с объемом молекул, а параметр b_1 отвечает за их взаимодействие. При отсутствии взаимодействия, $b_1 = 0$, и малых положительных значениях параметра b , характеризующего отличие газа АН от совершенного газа, приходим к уравнению состояния газа АН [12,13]:

$$p(1 - b\rho) = \rho RT,$$

которое после введения «эффективной» плотности $\tilde{\rho} = \rho / (1 - b\rho)$, опять принимает форму уравнения совершенного газа

$$p = \tilde{\rho} RT$$

Энтропия s газа АН пропорциональна $\ln(p / \tilde{\rho}^\gamma)$, т.е. она принимает постоянное значение при $p / \tilde{\rho}^\gamma = \text{const}$. По определению скорость звука равна, $a = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$, откуда для газа АН имеем:

$$a = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right) \sqrt{\gamma RT}$$

или $a = \tilde{a}(\tilde{\rho} / \rho)$, где $\tilde{a} = a(1 - b\rho)$ — «эффективная» скорость звука. Запишем выражения для внутренней энергии e :

$$e = c_v T$$

Здесь и всюду далее предполагается, что теплоемкость газа не зависит от температуры. Энтальпия h газа АН находится по формуле:

$$h = e + p / \rho = e + p \left(b + \frac{RT}{p} \right) = e + RT + bp$$

Отсюда можно сделать вывод, что теплоемкость при постоянном давлении c_p также не зависит от температуры:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_v + R$$

Используя данные формулы, можно выразить энтальпию через скорость звука:

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} (1 - b\rho) \left(1 - \frac{b\rho}{\gamma} \right); \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

При $b = 0$ полученное выражение совпадает с соответствующей формулой для совершенного газа, $h = a^2 / (\gamma - 1)$ [14].

2. Прямой скачок уплотнения

Аналогично совершенному газу при переходе через прямой скачок уплотнения в газе АН должны сохраняться потоки массы j , импульса I и энергии H :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = j \quad (2.1)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 = I \quad (2.2)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + h_2 = H \quad (2.3)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены параметры потока перед и после скачка уплотнения соответственно. По ранее установленному правилу, введем «эффективную» скорость, $\tilde{u}_1 = u_1(1 - b\rho_1)$. Тогда уравнение неразрывности принимает форму:

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2 = j,$$

а уравнения импульса и энергии преобразуются к виду:

$$p_1 + \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1^2 + bj^2 = p_2 + \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2^2 + bj^2 = I$$

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\tilde{\rho}_1} + bI - \frac{b^2}{2} j^2 = \frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\tilde{\rho}_2} + bI - \frac{b^2}{2} j^2$$

После сокращения одинаковых членов в левой и правой части полученных уравнений, законы сохранения приобретают вид, совпадающий по форме с соответствующими законами сохранения для совершенного газа:

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2 \quad (2.4)$$

$$p_1 + \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1^2 = p_2 + \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\tilde{\rho}_1} = \frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\tilde{\rho}_2} \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.4)–(2.6) находим основные соотношения, связывающие параметры потока перед и за прямым скачком уплотнения:

$$\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} = \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (2.7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (2.8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (2.9)$$

где число Маха $M_1 = \tilde{u}_1 / \tilde{a}_1 = u_1 / a_1$.

Возвращаясь к физическим переменным скорости u_1 , u_2 и плотности ρ_1 , ρ_2 , для газа АН получаем следующие соотношения на прямом скачке:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2 + 2b\rho_1(M_1^2 - 1)}, \quad (2.10)$$

которые при $b = 0$ переходят в соответствующие формулы для совершенного газа.

Получим зависимость, связывающую число Маха M_1 перед скачком с числом M_2 за прямым скачком в газе АН. Для этого воспользуемся формулами (2.7)–(2.9). Так как $M_{1,2} = \tilde{u}_{1,2} / \tilde{a}_{1,2}$ и $\tilde{a}_{1,2} = \sqrt{\gamma R T_{1,2}}$, из формулы (2.9) находим, что

$$\left(\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1}\right)^2 = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

Согласно (2.7) имеем:

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1}\right)^2 \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}\right)^2 = \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right]^2 \frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}$$

или после упрощения:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Изменение энтропии при переходе через ударную волну в газе АН дается выражением

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_2} \right)^\gamma \quad (2.11)$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.8), уравнение (2.11) перепишем в виде

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{(\gamma + 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1) - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1)^\gamma - (\gamma - 1)(\tilde{\rho}_2 / \tilde{\rho}_1)^{\gamma+1}} \right]$$

Рассмотрим случай слабого скачка уплотнения, $p_2 - p_1 \ll 1$. Имеем

$$T\Delta s = h_2 - h_1 - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad (2.12)$$

Используя закон сохранения массы (2.1) и закон сохранения импульса (2.2), из (2.3) после несложных преобразований получаем:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right)$$

Тогда уравнение (2.12) принимает форму:

$$T\Delta s = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Для оценки интеграла в (2.12) в случае слабого скачка воспользуемся формулой трапеции

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3 f''(x_1) + O[(x_2 - x_1)^4]$$

Тогда

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1) - \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_1 (p_2 - p_1)^3 + O[(p_2 - p_1)^4]$$

Окончательно получаем

$$T\Delta S = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_1 (p_2 - p_1)^3 + O[(p_2 - p_1)^4]$$

Таким образом, как и в совершенном газе, в случае слабых скачков течение газа АН можно считать изоэнтропическим с точностью до членов третьего порядка малости.

Из уравнений (2.7) и (2.8) можно получить формулу для ударной адиабаты в газе АН:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{b}(\rho_2/\rho_1)} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{b}(\rho_2/\rho_1)}},$$

где $\bar{b} = \rho_1 b$. Из полученной формулы, в частности следует известный результат, что в совершенном газе отношение p_2 / p_1 в адиабате Гюгоньо неограниченно возрастает при $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$, в то время как в изоэнтропическом течении $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow \infty$ [15]. На рис. 1 представлены зависимости p_2 / p_1 от ρ_2 / ρ_1 для различных значений параметра $\bar{b}$ в ударной адиабате и в изоэнтропе. Видно, что с увеличением этого параметра величина $(\rho_2 / \rho_1)_{\max}$ уменьшается. Здесь и всюду далее расчеты проведены для газа с $\gamma = 1.4$. Заметим, что в отличие от совершенного газа в изоэнтропическом течении газа АН отношение $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при конечном отношении $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow 1 / \bar{b}$.

На рис. 2 приведены зависимости $(\rho_2 / \rho_1)_{\max}$ для ударной адиабаты и изоэнтропы при $\gamma = 1.4$. Видно, что по мере увеличения $\bar{b}$ максимальная степень сжатия газа уменьшается.

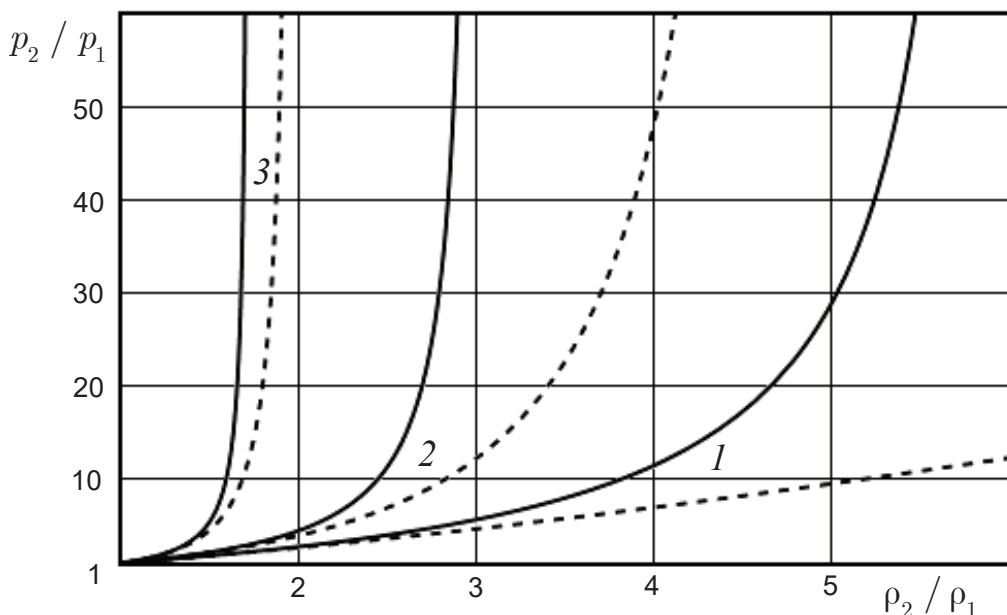


Рис. 1. Семейство ударных адиабат (сплошная линия) и изоэнтроп (пунктирная линия); 1) $\bar{b} = 0$; 2) $\bar{b} = 0.2$; 3) $\bar{b} = 0.5$

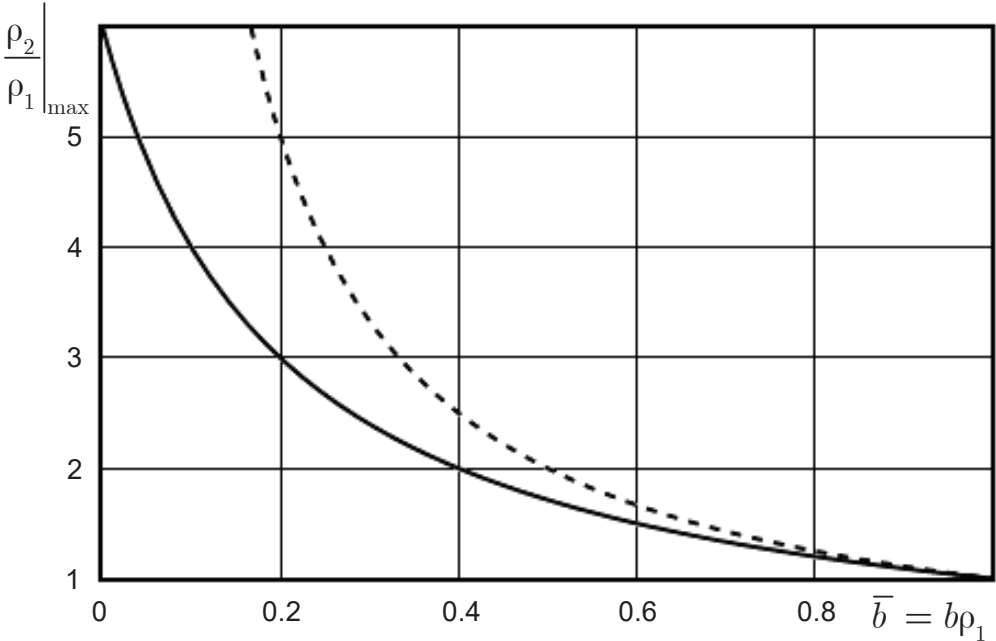


Рис. 2. Максимальное значение отношения ρ_2 / ρ_1 в ударной адиабате (сплошная линия) и в изоэнтропе (пунктирная линия)

3. Косой скачок уплотнения

Рассмотрим течение газа АН в косом скачке уплотнения. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось x совпадала с направлением вектора скорости u_1 . Пусть косой скачок образует с этой осью угол φ , рис. 3.

За скачком вектор скорости потока поворачивается на угол χ . Тогда условие неразрывности тангенциальной составляющей скорости имеет вид:

$$u_1 \cos \varphi = u_{2x} \cos \varphi + u_{2y} \sin \varphi \quad (3.1)$$

Разрыв нормальной составляющей скорости может быть определен с помощью формулы (2.10) для прямого скачка уплотнения:

$$\frac{u_{2x} \sin \varphi - u_{2y} \cos \varphi}{u_1 \sin \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2a_1^2}{(\gamma + 1)u_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2b\rho_1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{a_1^2}{u_1^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (3.2)$$

Используя (3.1) и (3.2) найдем связь между компонентами скорости u_{2x} и u_{2y} :

$$u_{2y}^2 = (u_1 - u_{2x})^2 \frac{\frac{2(1 - b\rho_1)}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{a_1^2}{u_1} \right) - (u_1 - u_{2x})}{u_1 - u_{2x} + \frac{2(1 - b\rho_1)}{\gamma + 1} \frac{a_1^2}{u_1}} \quad (3.3)$$

Как и следовало ожидать, при $b = 0$ формула (3.3) совпадает с выражением, которое описывает форму ударной поляры (строфоиды) в совершенном газе [15].

Используя (3.1) и (3.2) и учитывая, что $\tan \chi = u_{2y} / u_{2x}$, находим угол поворота потока χ за скачком уплотнения, рис. 1:

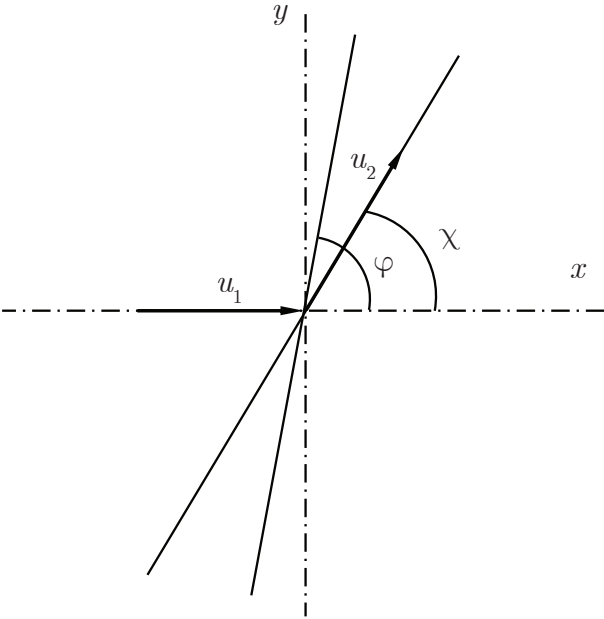


Рис. 3. Схема течения в случае косого скачка уплотнения

$$\operatorname{ctg} \chi = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2(1 - b \rho_1)(M_1^2 \sin^2 \varphi - 1)} - 1 \right] \operatorname{tg} \varphi \tag{3.4}$$

На рис. 4 показана зависимость $u_{2y} = u_{2y}(u_{2x})$, построенная по формуле (3.3) при числе $M_1 = u_1 / a_1 = 2$ и различных значениях параметра $\bar{b} = b \rho_1$.

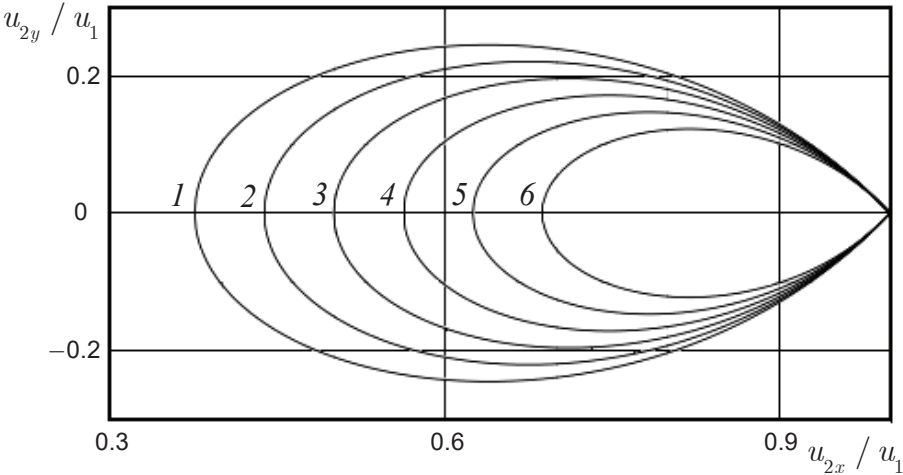


Рис. 4. Диаграмма скоростей для косого скачка уплотнения газа АН:
1) $-\bar{b} = 0$; 2) $-\bar{b} = 0.1$; 3) $-\bar{b} = 0.2$; 4) $-\bar{b} = 0.3$; 5) $-\bar{b} = 0.4$; 6) $-\bar{b} = 0.5$

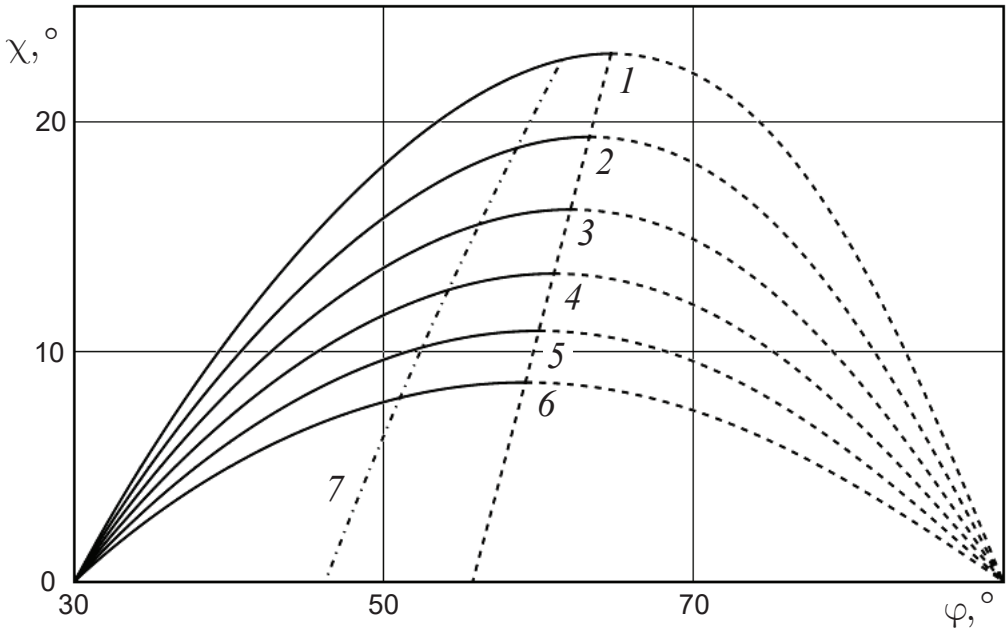


Рис. 5. Зависимость угла поворота потока от угла наклона ударной волны:
 1) $\bar{b} = 0$; 2) $\bar{b} = 0.1$; 3) $\bar{b} = 0.2$; 4) $\bar{b} = 0.3$; 5) $\bar{b} = 0.4$; 6) $\bar{b} = 0.5$;
 7) — линия, соответствующая значению $M=1$ за скачком

Зависимость угла поворота потока χ от угла наклона ударной волны φ , построенная по формуле (3.4) при числе $M_1 = 2$, приведена на рис. 5, где ветви кривых, изображенные сплошными линиями, отвечают ударным волнам слабого семейства, а изображенные пунктиром — ударным волнам сильного семейства. Прямая пунктирная линия соединяет точки максимального угла поворота потока в ударной волне. Из рисунка видно, что при увеличении значения параметра $\bar{b}$ максимально возможный угол поворота потока уменьшается. В совершенном газе это значение примерно равно $\chi_{\max} \approx 23^\circ$. К примеру, в газе АН при $\bar{b} = 0.5$ максимальное значение составляет всего $\chi_{\max} \approx 9^\circ$. При $\chi_{\max} \rightarrow 0$ интенсивность ударной волны (скачок скорости в ней) стремится к нулю, а угол j стремится к углу Маха. На рис. 5 штрихпунктирная линия разделяет области сверхзвукового течения (слева) от области дозвукового течения (справа). Заметим, что дозвуковая область увеличивается при увеличении $\bar{b}$.

4. Течение Прандтля—Майера

Рассмотрим теперь сверхзвуковое течение газа АН в центрированной волне разрежения (см. рис. 6, где пунктиром показаны линии Маха). По аналогии с совершенным газом, введем полярную систему координат (r, φ) и будем предполагать, что все параметры течения в волне разрежения зависят только от угла φ и не зависят от радиальной координаты r .

В этом случае система уравнений Эйлера, записанная в полярных координатах, имеет следующий вид [15]:

$$\rho u_r + \frac{d}{d\varphi}(\rho u_\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

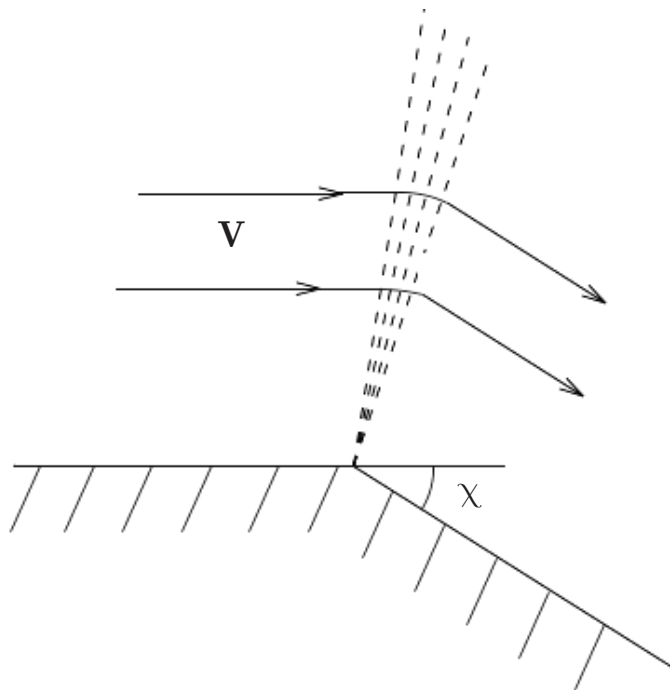


Рис. 6. Схема течения в центрированной волне разрежения

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_r}{d\phi} - \frac{u_\phi^2}{r} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_\phi}{d\phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{dp}{d\phi} \quad (4.3)$$

$$u_\phi \frac{ds}{d\phi} = 0 \quad (4.4)$$

Здесь ρ , u_r , u_ϕ и s — соответственно плотность, радиальная и азимутальная компоненты скорости, и энтропия. Из (4.4) следует, что условие $s = \text{const}$ выполняется во всем поле течения, поэтому в уравнении (4.3) выражение $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\phi}$ можно заменить производной $\frac{dh}{d\phi}$. Тогда (4.3) переписывается в форме

$$\frac{u_\phi}{r} \frac{du_\phi}{d\phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dh}{d\phi}$$

Нетривиальное решение системы (4.1)–(4.4) впервые было получено Прандтлем и Майером. В этом решении перпендикулярная к радиус-вектору составляющая u_ϕ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука:

$$u_\phi = \pm a \quad (4.5)$$

$$u_r = \pm \sqrt{2(H_0 - h) - a^2} \quad (4.6)$$

$$\varphi = - \int \frac{d(\rho a)}{\rho \sqrt{2(H_0 - h) - a^2}} \quad (4.7)$$

Здесь H_0 — полная энтальпия, которая сохраняется во всем поле течения:

$$\frac{u_r^2 + u_\varphi^2}{2} + h = H_0 = \text{const} \quad (4.8)$$

Условие сохранения энтропии s можно записать в форме:

$$a^2 \frac{(1 - b\rho)^{\gamma+1}}{\rho^{\gamma-1}} = a_*^2 \frac{(1 - b\rho_*)^{\gamma+1}}{\rho_*^{\gamma-1}}, \quad (4.9)$$

где a_* и ρ_* — критические скорость звука и плотность газа соответственно, которые, по определению, достигаются при $M = 1$. Перепишем выражение для полной энтальпии через критические параметры течения:

$$H_0 = a_*^2 \frac{(1 - b\rho_*)^2 + (\gamma - b\rho_*)^2 + \gamma - 1}{2\gamma(\gamma - 1)} \quad (4.10)$$

Подставляя (4.8)–(4.10) в (4.7) и, переходя к интегрированию по плотности ρ , имеем:

$$\varphi = - \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^{(\gamma-3)/2} d\rho}{(1 - b\rho)^{(\gamma+3)/2} \left[C - \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right]^{1/2}}, \quad (4.11)$$

где константа C равна:

$$C = \frac{\rho_*^{\gamma-1}}{(1 - b\rho_*)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho_*)^2 + (\gamma - b\rho_*)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)}$$

Используя формулы (4.9) и (4.10), из уравнения (4.6) находим выражение для радиальной компоненты скорости:

$$u_r = a_* \frac{(1 - b\rho_*)^{(\gamma+1)/2}}{\rho_*^{(\gamma-1)/2}} \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - b\rho)^{\gamma+1}} \frac{(1 - b\rho)^2 + (\gamma - b\rho)^2 + \gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right]^{1/2} \quad (4.12)$$

Формула для азимутальной компоненты находится из (4.5) и (4.9):

$$u_\varphi = a = a_* \frac{(1 - b\rho_*)^{(\gamma+1)/2}}{\rho_*^{(\gamma-1)/2}} \frac{\rho^{(\gamma-1)/2}}{(1 - b\rho)^{(\gamma+1)/2}} \quad (4.13)$$

Угол поворота вектора скорости χ равен:

$$\chi = \varphi + \arctg \frac{u_\varphi}{u_r} \quad (4.14)$$

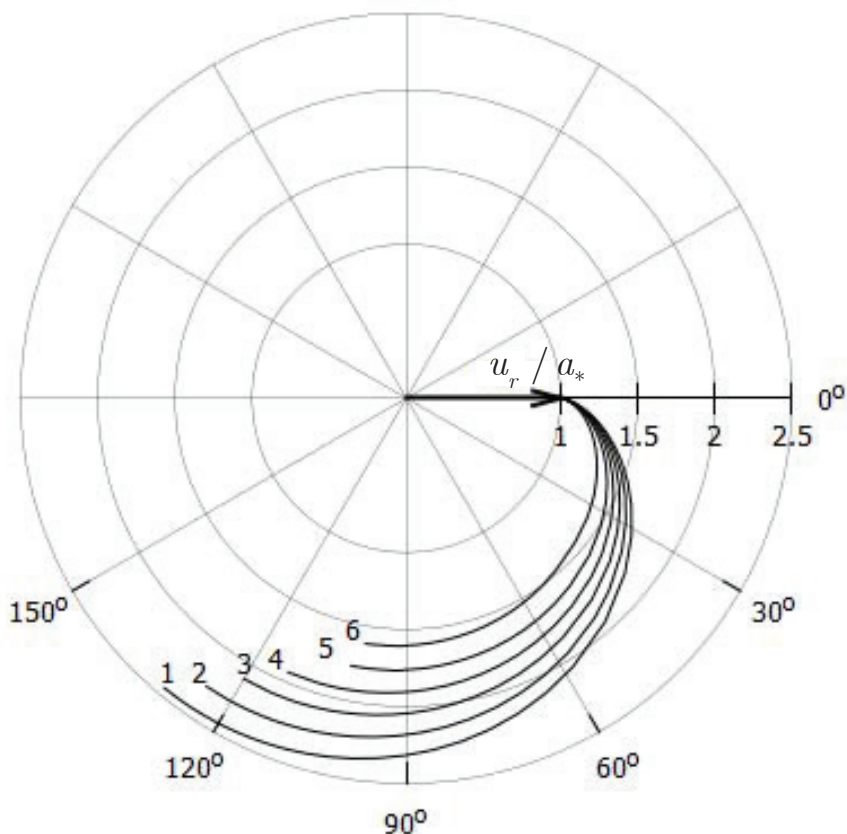


Рис. 7. Зависимость угла поворота вектора скорости в центрированной волне разрежения газа АН, 1) – $b_* = 0$; 2) – $b_* = 0.1$; 3) – $b_* = 0.2$; 4) – $b_* = 0.3$; 5) – $b_* = 0.4$; 6) – $b_* = 0.5$

С помощью полученных формул (4.11)–(4.14) построена зависимость модуля скорости $V = \sqrt{u_r^2 + u_\phi^2}$ от угла поворота χ в полярной системе координат при различных значениях параметра, рис. 7.

Максимальный угол поворота потока $\chi_{\max}$ определяется условием возникновения вакуума, $p = 0$. В совершенном газе ($b_* = 0$, $b_* = 0$) величина $\chi_{\max}$ составляет примерно $\chi_{\max} \approx 130^\circ$. При увеличении параметра b_* значение $\chi_{\max}$ уменьшается и при $b_* = 0.5$ составляет, $\chi_{\max} \approx 102^\circ$.

Заключение

Рассмотрены плоские сверхзвуковые течения невязкого газа, подчиняющиеся уравнению состояния АН. Получены формулы, связывающие параметры газа перед и после прямого и косого скачков уплотнения. Получено также решение задачи о течении газа АН в центрированной волне разрежения.

Определены переменные, при переходе к которым формулы для прямого скачка уплотнения принимают вид, совпадающий по форме с соответствующими формулами для совершенного газа. Установлено, что в случае слабых скачков течение газа АН, как и течение совершенного газа, можно считать изоэнтропическим с точностью до членов третьего порядка малости.

Найден максимальный угол поворота в косом скачке уплотнения для различных значений параметра $\bar{b}$, определяющего отличие газа АН от совершенного газа. Установлено, что в отличие от совершенного газа в изоэнтропическом течении газа АН отношение $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ при конечном значении отношения $\rho_2 / \rho_1 \rightarrow 1 / \bar{b}$. Показано, что максимальный угол поворота потока в ударной волне уменьшается, а область дозвукового течения за скачком увеличивается с ростом значения $\bar{b}$. Получено, что максимальный угол разворота в центрированной волне разряжения также уменьшается при увеличении степени отличия газа АН от совершенного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neron L., Saurel R.* Noble–Abel first-order virial equations of state for gas mixtures resulting of multiple condensed reactive materials combustion // *Phys. Fluids*. 2021. V. 93. P. 3090–3097.
2. *Moore F.* Approximate Methods for Weapon Aerodynamics. AIAA Pub., 2000. 464 p.
3. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г., Меняйлов М.А.* Автомодельные течения газа Абеля–Нобля в плоском диффузоре // *Тр. МФТИ*. 2023. Т. 15. № 3. С. 133–143.
4. *Banks J.W.* On exact conservation for the euler equations with complex equations of state // *Commun. in Comput. Phys*. 2010. V. 8. P. 995–1015.
5. *Dumbser M., Casulli V.* A conservative, weakly nonlinear semi-implicit finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes equations with general equation of state // *Appl. Math.&Comput*. 2016. V. 272. Pt. 2. P. 479–497.
6. *Tang X., Dzieminska E., Hayashi A.K.* A preliminary discussion of the real gas effect on the isentropic expansion inlet boundary conditions of high-pressure hydrogen jets // *Sci.&Technol. of Energetic Mater*. 2019. V. 80. № 4. P. 150–158.
7. *Menikoff R., Plohr B.J.* The Riemann problem for fluid flow of real materials // *Rev. of Modern Phys*. 1989. V. 61. № 1. P. 75–130.
8. *Radulescu M.I.* Compressible flow in a Noble–Abel stiffened gas fluid // *Phys. Fluids*. 2020. V. 32. 056101. P. 1–5.
9. *Zifeng Wenga, Remy Mevel, Chung K. Law.* On the critical initiation of planar detonation in Noble–Abel and van der Waals gas // *Combust.&Flame*. 2023. V. 255. P. 112890. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.112890>
10. *Gonzales C.A.Q., Pizzuti L., Costa F.* Propagation of combustion waves in Noble–Abel gases // 20th Int. Congr. of Mechanical Engineering. Nov. 15–20, 2009. Gramado, Brazil. P. 1–10.
11. *Бай Шу-И.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Иностранная литература, 1962. 440 с.
12. *Johnston I.A.* The Noble–Abel Equation of State: Thermodynamic Derivations for Ballistics Modeling. Edinburgh, South Australia: DSTO, 2005.
13. *Petrik G.G.* Problems of low-parameter equations of state // *J. of Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 891. Art. No. 012328. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012328>
14. *Брутян М.А.* Основы трансзвуковой аэродинамики. М.: Наука, 2017. 175 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.

Shock Wave and Centered Rarefaction FAN in Noble–Abel Gas

M. A. Brutyan^{a,b,#}, U. G. Ibragimov^{a,##}, M. A. Meniaïlov^{a,###}

^aCentral Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky,
Zhukovsky, Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology,
Dolgoprudny, Russia

e-mail: murad.brutyan@tsagi.ru[#], umar.ibragimov94@yandex.ru^{##}, mickmenn@yandex.ru^{###}

Planar supersonic flows of inviscid gas, obeyed the Abel – Noble (AN) equation of state, are considered. Formulas connecting flow parameters of considered gas before and after shock wave are obtained. Solution of Prandtl–Meyer problem for flow of AN gas in

centered rarefaction fan is constructed. Critical values of velocity vectors turn angle in oblique shock wave and rarefaction fan are found. Comparisons with corresponding solution for perfect gas are given.

Keywords: supersonic flow, Abel–Noble gas, shock wave, Prandtl–Meyer flow

REFERENCES

1. *Neron L., Saurel R.* Noble–Abel first-order virial equations of state for gas mixtures resulting of multiple condensed reactive materials combustion // *Phys. Fluids*, 2021, vol. 93, pp. 3090–3097.
2. *Moore F.* Approximate Methods for Weapon Aerodynamics. AIAA Pub., 2000. 464 p.
3. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G., Menailov M.A.* Self-similar flows of the Abel–Noble gas in a planar diffuser // *Proc. of MIPT*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 133–143. (in Russian)
4. *Banks J.W.* On exact conservation for the euler equations with complex equations of state // *Commun. in Comput. Phys.*, 2010, vol. 8, pp. 995–1015.
5. *Dumbser M., Casulli V.* A conservative, weakly nonlinear semi-implicit finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes equations with general equation of state // *Appl. Math. & Comput.*, 2016, vol. 272, pt. 2, pp. 479–497.
6. *Tang X., Dzieminska E., Hayashi A.K.* A preliminary discussion of the real gas effect on the isentropic expansion inlet boundary conditions of high-pressure hydrogen jets // *Sci. & Technol. of Energetic Mater.*, 2019, vol. 80, no. 4, pp. 150–158.
7. *Menikoff R., Plohr B.J.* The Riemann problem for fluid flow of real materials // *Rev. of Modern Phys.*, 1989, vol. 61, no. 1, pp. 75–130.
8. *Radulescu M.I.* Compressible flow in a Noble–Abel stiffened gas fluid // *Phys. Fluids*, 2020, vol. 32, 056101, pp. 1–5.
9. *Zifeng Weng, Remy Mevel, Chung K. Law.* On the critical initiation of planar detonation in Noble–Abel and van der Waals gas // *Combust. & Flame*, 2023, vol. 255, pp. 112890. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.112890>
10. *Gonzales C.A.Q., Pizzuti L., Costa F.* Propagation of combustion waves in Noble–Abel gases // 20th Int. Congr. of Mechanical Engineering. Nov. 15–20, 2009. Gramado, Brazil. pp. 1–10.
11. *Shih-I Pai.* Introduction to the theory of compressible flow // Literary Licensing, LCC, 2013, pp. 1–400.
12. *Johnston I.A.* The Noble–Abel Equation of State: Thermodynamic Derivations for Ballistics Modeling. Edinburgh, South Australia: DSTO, 2005.
13. *Petrik G.G.* Problems of low-parameter equations of state // *J. of Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 891, art. no. 012328. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012328>
14. *Brutyan M.A.* Foundation of Transonic Aerodynamics. Moscow: Nauka, 2017. 175 p. (in Russian)
15. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Moscow: Nauka, 1986. 735 p. (in Russian)