

---

---

УДК 533.6.011.3;533.6.011.5;533.6.011.35

## ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПРИ ЕГО ОКОЛОЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ПОТОКОМ ГАЗА: ИСТОРИЯ, ДОСТИЖЕНИЯ, ПРОБЛЕМЫ

© 2024 г. А. С. Петров<sup>1,\*</sup>, Г. Г. Судаков<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Центральный Аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

\*e-mail: [aspetrov1906@rambler.ru](mailto:aspetrov1906@rambler.ru)

\*\*e-mail: [soudakov@mail.ru](mailto:soudakov@mail.ru)

Поступила в редакцию 14.03.2024 г.

После доработки 14.05.2024 г.

Принята к публикации 25.05.2024 г.

В настоящей работе представлен обзор работ по теории волнового сопротивления профиля и сделана попытка проследить процесс развития основных представлений о физических процессах, имеющих место при околозвуковых скоростях обтекания профиля. Следует отметить, что данная область аэродинамики на ранних этапах своего развития изобилвала ошибочными утверждениями. Накопление экспериментальных данных и совершенствование математического аппарата позволило устранить неточности в постановках задач, а также значительно усовершенствовать математические модели, описывающие данное явление. Тем не менее, и в настоящее время ряд задач остается нерешенным, требует дальнейшего углубления в физику явления и совершенствования математического аппарата.

*Ключевые слова:* обзор, профиль, волновое сопротивление, математические модели.

DOI: 10.31857/S0032823524060032 EDN: IHVDDX

### 1. Введение

Созданию теории волнового сопротивления профиля посвящено много работ. Среди исследователей, внесших решающий вклад в создание и совершенствование этого направления, следует, прежде всего, назвать фамилии С.А. Христиановича, Я.М. Серебрянского, К. Осватича, Т. Кармана, И.Е. Зеленского, Г.Ф. Бурого и многих других.

В настоящей работе представлен обзор основополагающих работ по теории волнового сопротивления профиля, в котором сделана попытка проследить процесс развития основных представлений о физических процессах, имеющих место при околозвуковых скоростях обтекания профиля, а также проследить процесс совершенствования математических моделей, описывающих это явление. Следует отметить, что данная область аэродинамики на ранних этапах своего развития изобилвала ошибочными утверждениями, многие из которых проникли в учебники и воспринимались как истинные утверждения. Как оказалось впоследствии, ошибки в физических представлениях о характере течения и, как следствие, в построении математических моделей, описывающих этот класс течений, парадоксальным образом не приводили к заметным численным расхождениям с экспериментальными данными. Более того, разные математические модели, содержащие взаимоисключающие предположения давали

результаты, численно близкие друг к другу. Разъяснение этого парадокса также является целью данного обзора.

Большой вклад в совершенствование математических моделей, описывающих рассматриваемый класс течений, внесли российские ученые. Кроме упомянутых выше имен, следует отметить фундаментальную работу А.А. Никольского, Г.И. Таганова [1], в которой удалось в общем виде сформулировать достаточный критерий возникновения скачка уплотнения на поверхности профиля и доказать, что как угодно малой деформацией поверхности профиля можно перевести бескачковый режим обтекания в режим обтекания со скачком уплотнения. В работах В.Д. Боксера и С.В. Ляпунова [2, 3] удалось оценить высоту скачка уплотнения, получить явную формулу для величины волнового сопротивления профиля и оценить пределы применимости методов расчета волнового сопротивления. Экспериментальные результаты исследования структуры течения около профиля при околозвуковых скоростях А.В. Потапчика [4] позволили сформулировать сценарий развития локальной сверхзвуковой зоны над верхней поверхностью профиля с увеличением числа Маха набегающего потока.

Необходимость или исключительность наличия бескачкового режима обтекания профиля при возникновении локальной сверхзвуковой зоны долгое время были предметом дискуссий. В теоретической работе А.В. Зубцова и Г.Г. Судакова [5] удалось доказать, что в рамках трансзвуковой теории малых возмущений в некотором диапазоне чисел Маха набегающего потока бескачковое решение обязательно существует.

В работе А.С. Петрова [6] было впервые показано, что взаимоисключающие постановки задач С.А. Христиановича, Я.М. Серебрянского [7] и Г.Ф. Бурого [8] приводят к численно близким результатам для оценки величины волнового сопротивления профиля, так как при разложении обеих формул по малому параметру  $\Delta M_1 = M_1 - 1$  ( $M_1$  – число Маха у основания скачка с наветренной стороны) обе формулы в линейном приближении дают один и тот же результат. Окончательное решение разрешен парадокса Христиановича–Бурого было представлено в работе В.Д. Боксера и Г.Г. Судакова [9].

Таким образом, теория волнового сопротивления за почти 80-летнюю историю прошла большой путь от интуитивных представлений до создания развитых математических моделей для описания течения в локальной сверхзвуковой зоне. Вместе с тем ряд задач остается нерешенными. Так, например, до сих пор остается неясным сценарий возникновения скачка уплотнения. Остается невыясненным вопрос об интерпретации логарифмической расходимости величины скорости течения у основания скачка уплотнения с подветренной стороны в трансзвуковой теории малых возмущений [10]. Отсутствует также математическая модель, описывающая изменение структуры течения у основания скачка с учетом вязкости газа при увеличении числа Маха набегающего потока и ряд других задач.

## 2. Возникновение теории волнового сопротивления

Интерес к данной проблеме возник во второй половине 40-х годов прошлого столетия в связи с ростом скоростей пассажирских самолетов. Одной из первых работ в этом направлении следует отметить работу [7], основные результаты которой изложены в данном разделе.

Рассмотрим обтекание профиля плоским потоком газа (рис. 1). Пусть  $u_{1\infty}$ ,  $\rho_{1\infty}$ ,  $p_{1\infty}$ ,  $T_{1\infty}$ ,  $S_{1\infty}$  – скорость, плотность, давление, температура и энтропия набегающего потока (сечение  $l$ ). Предполагается следующий сценарий развития течения с ростом скорости набегающего потока. При  $u_{1\infty} < u_{1\infty^*}$  течение всюду дозвуковое. При  $u_{1\infty} = u_{1\infty^*}$  на поверхности профиля впервые достигается скорость звука, а при  $u_{1\infty} > u_{1\infty^*}$  возникает локальная сверхзвуковая зона, замыкающаяся прямым скачком уплотнения.

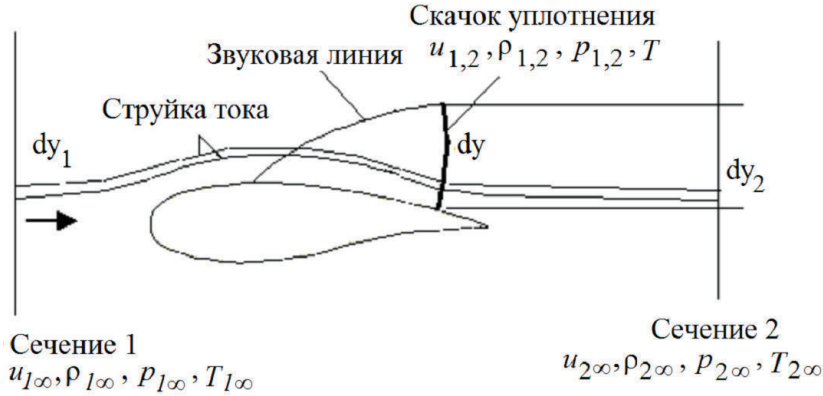


Рис. 1. Схема обтекания профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны

С ростом  $u_{1\infty}$  размер сверхзвуковой зоны и высота скачка уплотнения растут. Течение всюду невязкое и безотрывное. Соответственно  $u_{1,2}, \rho_{1,2}, p_{1,2}, T_{1,2}, S_{1,2}$  – параметры потока непосредственно перед и за скачком уплотнения, а  $u_{2\infty}, \rho_{2\infty}, p_{2\infty}, T_{2\infty}, S_{\infty,2}$  – параметры потока в вертикальном сечении 2 на бесконечном удалении от профиля. Высоту скачка обозначим через  $h_{ск}$ . Обозначим далее элемент высоты струйки тока через  $dy_1, dy$  и  $dy_2$  в сечении 1, на скачке уплотнения и в сечении 2 соответственно. Система координат – поточная (ось  $x$  направлена вдоль набегающего потока, ось  $y$  – перпендикулярно набегающему потоку).

Применяя законы сохранения массы, импульса к массе жидкости, заключенному между контрольными сечениями 1, 2 и поверхностью профиля (рис. 1), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{1\infty} u_{1\infty} dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{2\infty} u_{2\infty} dy_2 \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2) dy_2 - \int_{-\infty}^{\infty} (p_{1\infty} + \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy_1 = -X_b \quad (2.2)$$

$$S_{1\infty} = S_1, S_{2\infty} = S_2, \quad (2.3)$$

где  $X_b$  – волновое сопротивление профиля. В силу закона сохранения энергии в зонах непрерывности течения (до и после скачка уплотнения) вдоль линии тока сохраняется энтропия. На поверхности прямого скачка уплотнения газодинамические параметры течения испытывают разрыв, при этом выполняются условия сохранения массы, импульса и полной энергии при переходе через скачок уплотнения [11]:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.4)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.5)$$

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}, \quad (2.6)$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении. Кроме того, всюду в потоке выполняется уравнение состояния совершенного газа

$$p = R\rho T, \quad (2.7)$$

где  $R$  – газовая постоянная.

Выписанных выше уравнений недостаточно для решения задачи нахождения волнового сопротивления  $X_b$ . Для замыкания задачи в [7] было предложено дополнительное условие равенства давлений в следе за скачком уплотнения и равенства импульсов вне следа в сечениях 1 и 2:

$$\int_{\text{в следе}} (p_{2\infty} - p_{1\infty}) dy = 0$$

$$\int_{\text{вне следа}} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 - p_{1\infty} - \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy \quad (2.8)$$

Тогда из формул (2.1), (2.2) следует

$$X_b = \int_{\text{в следе}} \rho_{1\infty} u_{2\infty} (u_{1\infty} - u_{2\infty}) dy \quad (2.9)$$

Сформулированные условия (2.1)–(2.9) позволяют получить явное выражение для коэффициента волнового сопротивления

$$c_{xb} = \frac{2X_b}{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2}$$

Это выражение достаточно громоздко [7], поэтому имеет смысл привести разложение величины  $c_{xb}$  по малому параметру  $\Delta M(\bar{y}) = M(\bar{y}) - 1$  ( $M$  – число Маха перед скачком уплотнения на высоте  $\bar{y} = y/b$ ,  $b$  – хорда профиля):

$$\frac{dc_{xb}}{d\bar{y}} = C\Delta M^3 + O(\Delta M^4), \quad (2.10)$$

где  $C$  – некоторый коэффициент. Таким образом, формула (2.10) связывает коэффициент волнового сопротивления с параметрами потока на наветренной части скачка уплотнения. Величина  $C$  зависит от формы профиля и параметров набегающего потока, и может быть определена только после решения полной задачи обтекания профиля. Закон изменения  $M(\bar{y})$  будет рассмотрен в разд. 4, а расшифровка коэффициента  $C$  – в разд. 5.

В [7] неявно предполагалось, что высота скачка уплотнения конечна при любых значениях  $\Delta M_1$ . Тогда интегрируя (2.10) вдоль скачка уплотнения, получим оценку величины коэффициента сопротивления для профиля в виде

$$c_{xb} = K\Delta M_1^3, \quad (2.11)$$

где  $K$  – некоторый коэффициент, зависящий от формы профиля, а для  $\Delta M_1$  принято его значение у основания скачка уплотнения.

Кроме того, работе [7] было сделано предположение, что в (2.11) при малых значениях  $\Delta M_1$

$$\Delta M_1 = \beta(M_\infty - M_*) + O((M_\infty - M_*)^2), \quad (2.12)$$

где  $\beta$  – некоторый коэффициент,  $M_\infty$  – число Маха набегающего потока,  $M_*$  – критическое значение числа Маха набегающего потока, когда на поверхности профиля впервые достигается скорость звука. Тогда из (2.11), (2.12) получаем так называемый «закон кубов» для коэффициента волнового сопротивления:

$$c_{xb} = A(M_\infty - M_*)^3 \quad (2.13)$$

Для величины  $A$  в [7] качестве грубой оценки было принято значение  $A = 15$  независимо от формы профиля. Приведенные выше результаты явились основой для дальнейшего совершенствования теории волнового сопротивления и вошли в учебники.

Однако, описанная выше постановка задачи содержит целый ряд предположений, которые должны быть подвергнуты серьезному анализу. Прежде всего, неявное предположение о конечности и постоянстве высоты скачка при  $\Delta M_1 \ll 1$ , очевидно неверно. Более естественно предположить, что высота скачка пропорциональна  $\Delta M_1$

$$h_b \sim \Delta M_1 \tag{2.14}$$

Но тогда вместо (2.11) мы получили бы

$$c_{xb} = K \Delta M_1^4, \tag{2.15}$$

а вместо (2.13)

$$c_{xb} = B(M_\infty - M_*)^4 \tag{2.16}$$

Однако, экспериментальные данные и данные современных расчетов с использованием методов вычислительной аэродинамики показывают, что экспериментальным и численным данным соответствуют формулы (2.11) и (2.13). Это означает, что предположение (2.14) справедливо, а (2.12) – ошибочно. Таким образом, “закон кубов” (2.13) является следствием двух ошибочных предположений и представляет собой просто приближенную эмпирическую зависимость. В качестве подтверждения этих утверждений на рис. 2–4 приведены результаты расчетов для профиля NASA-0012 с помощью методов вычислительной аэродинамики. Численные результаты получены в настоящей работе с помощью решения краевой задачи для стационарных уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности  $k-\omega$  SST при использовании численного метода конечных объемов второго порядка точности. Коэффициенты  $A$  в формуле (2.13) и  $K$  в формуле (2.15) корректировались для наи-

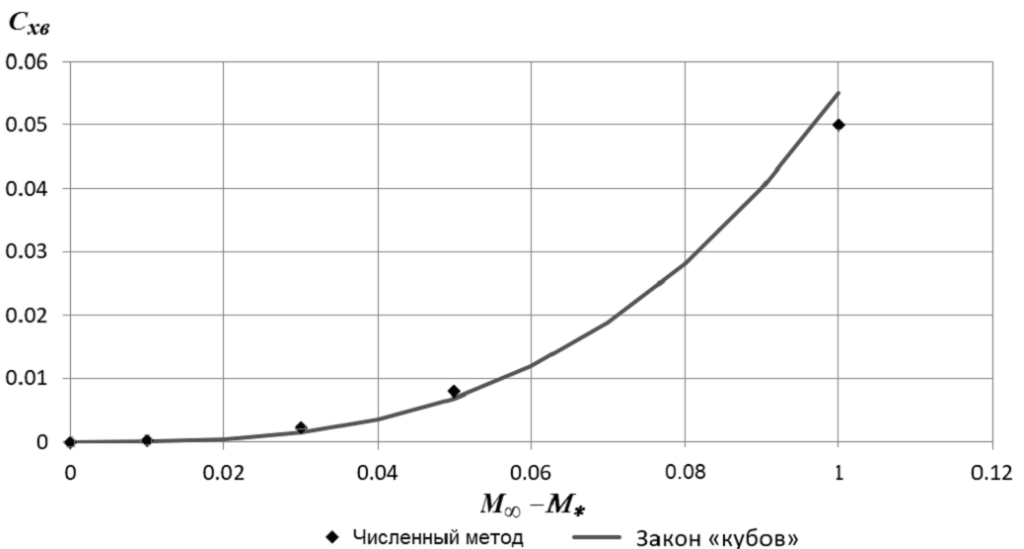
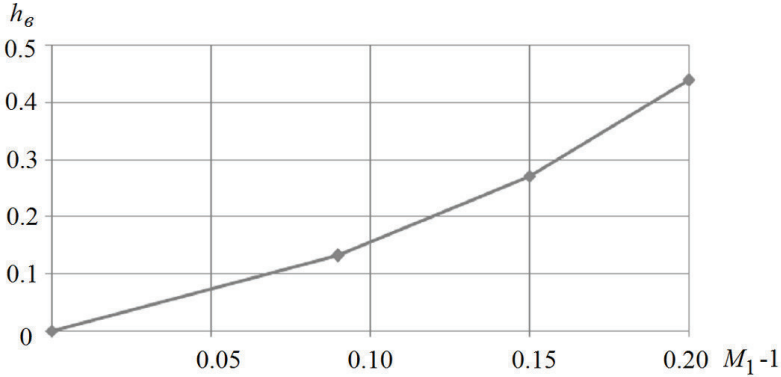
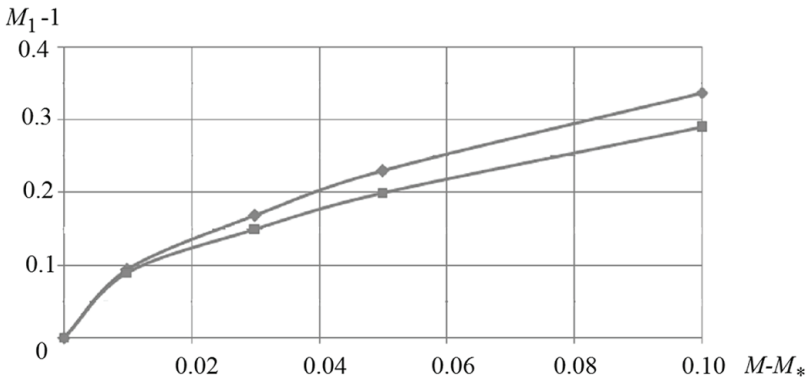


Рис. 2. Коэффициент волнового сопротивления для профиля NASA-0012: угол атаки  $\alpha = 0$ , уравнения Рейнольдса, модель турбулентности  $k-\omega$  SST



**Рис. 3.** Высота скачка уплотнения: угол атаки  $\alpha = 0$ , уравнения Рейнольдса, модель турбулентности  $k-\omega$  SST. Зависимость приблизительно линейная. Отклонение от линейной зависимости вызваны смещением скачка уплотнения вниз по потоку с ростом числа  $M_1$  и уменьшением кривизны поверхности профиля в точке основания скачка (см. формулу (4.7))



**Рис. 4.** Число  $M_1$  перед скачком уплотнения: угол атаки  $\alpha = 0$ , уравнения Рейнольдса, модель турбулентности  $k-\omega$  SST. Кривая с ромбовидными маркерами получена визуально с поля числа  $M$ , кривая с квадратными маркерами получена по максимальному скачку энтропии на ударной волне. Зависимость существенно нелинейная

лучшего согласования с расчетными данными. Для вычисления волнового сопротивления (рис. 2) использовался следующий способ. Определялось полное сопротивление профиля при возрастающих числах Маха  $M_\infty$  набегающего потока. При достижении некоторого критического значения  $M_\infty = M_*$  наблюдался резкий рост сопротивления профиля. Волновое сопротивление вычислялось как разность полного сопротивления при заданном  $M_\infty > M_*$  и полного сопротивления при  $M_\infty = M_*$ .

Так как работа [7] была малодоступна, вскоре появилась аналогичная работа [8], результаты которой вошли в учебники [12]. Постановка задачи в [8] полностью аналогична [7] за исключением замыкающего условия в сечении 2. В [8] вместо *выравнивания давлений* в следе за скачком (2.8) было принято, что в следе за скачком уплотнения *выравниваются скорости течения*

$$\int_{\text{в следе}} (u_{2\infty} - u_{1\infty}) dy = 0$$

$$\int_{\text{вне следа}} (p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 - p_{1\infty} - \rho_{1\infty} u_{1\infty}^2) dy = 0 \quad (2.17)$$

В результате была получена альтернативная [7] формула для волнового сопротивления. Совершенно очевидно, что одновременное выравнивание давлений и скоростей в сечении 2 в следе за скачком уплотнения невозможно, так как тогда волновое сопротивление окажется равным нулю.

Однако разложение этой альтернативной формулы в ряд по малому параметру  $\Delta M_1$  приводит к формуле (2.10) с точностью до членов  $O(\Delta M_1^4)$ . В [8] для неизвестного коэффициента в формуле (2.13) было принято  $A = 11$ .

В теории волнового сопротивления встречается весь спектр гипотез, начиная от выравнивания статического давления [7], до выравнивания скорости в следе [8], температуры [13], а также отношения температуры к скорости [14]. Все эти гипотезы приводят к разным формулам для оценки волнового сопротивления, но, как показано в [6], их разложение в ряд по малому параметру  $\Delta M_1 \ll 1$  снова дает соотношение (2.10). Этот удивительный парадокс долгое время не находил своего объяснения. Только сравнительно недавно было получено рациональное объяснение этого факта. Подробный анализ вывода формулы для волнового сопротивления и разрешение парадокса будет дан в заключительном разделе данной статьи.

### 3. Сценарий возникновения скачка уплотнения в локальной сверхзвуковой зоне

Накопление экспериментальных данных, а также наличие точных решений уравнений Эйлера [15], в которых локальная сверхзвуковая зона замыкается звуковой линией, а не скачком уплотнения, поставило под сомнение предполагавшийся ранее сценарий развития локальной сверхзвуковой зоны. Возникло предположение, что реализуется другой сценарий возникновения скачка уплотнения: при  $0 < M_\infty < M_*$  течение всюду дозвуковое, при  $M_* < M_\infty < M_{**}$  течение сверхзвуковое и непрерывное, а при  $M > M_{**}$  течение в локальной сверхзвуковой зоне замыкается скачком уплотнения.

Для выяснения причин возникновения скачка уплотнения существенную роль сыграла работа [1], где было получено необходимое условие существования непрерывного решения: закон монотонного изменения угла наклона вектора скорости вдоль звуковой линии. В этой же работе была доказана теорема несуществования непрерывного решения: если сверхкритическое обтекание выпуклого профиля является непрерывным, то замена сколь угодно малого участка профиля внутри сверхзвуковой зоны прямолинейным отрезком приводит к появлению скачка уплотнения. Там же был сформулирован достаточный признак появления скачка уплотнения: обращение в нуль производной угла наклона вектора скорости вдоль звуковой линии.

После [1] появились работы [16–21], авторы которых пришли к выводу, что непрерывные «околозвуковые течения являются исключительными и, следовательно, лишены физического смысла и что в общем случае гладкого околозвукового решения задачи обтекания произвольно заданного профиля ожидать нельзя» [21].

Вместе с тем, известны результаты экспериментальных исследований и численных решений уравнений совершенного газа для разных профилей, показывающих, что на сверхкритическом режиме обтекания выпуклого профиля течение может сохранять непрерывный характер [22].

Окончательное решение этого вопроса содержится в [5], в которой найдено асимптотическое решение задачи о сверхкритическом непрерывном обтекании тонкого выпуклого профиля, наклон и кривизна контура которого являются непрерывными функциями длины дуги контура.

Рассмотрим коротко постановку задачи и основные результаты работы [5]. Пусть функция  $\lambda = \frac{V}{a_*}$  ( $a_*$  – критическая скорость звука) набегающего потока превышает

критическое значение на малую величину  $\lambda_\infty - \lambda_{\infty^*} = O(\tau^{2/3}\varepsilon)$  ( $\tau \ll 1$  – относительная толщина профиля,  $\lambda_{\infty^*}$  – функция  $\lambda$  набегающего потока, при котором на поверхности профиля впервые возникает точка, где  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр). В постановку задачи входит малый параметр  $\varepsilon$ , что позволяет искать ее решение, используя метод асимптотических разложений. При  $\varepsilon \sim 1$  имеем существенно нелинейный трансзвуковой режим течения, описываемый трансзвуковой теорией малых возмущений, с продольными размерами локальной сверхзвуковой зоны  $l_x \sim 1$ . При  $\varepsilon \ll 1$  уравнения линеаризуются, а размеры локальной сверхзвуковой зоны малы  $l_x \ll 1$ .

Рассмотрим дозвуковое обтекание тонкого выпуклого профиля с единичной хордой безвихревым потоком идеального газа со скоростью  $V_\infty$ . Основы теории тонкого профиля были заложены еще в работах В.В. Голубева [23]. В качестве искомой величины введем функцию  $\lambda$  по формуле

$$\frac{V}{a_\infty} = \lambda = 1 + \tau^{2/3} \tilde{\lambda},$$

где  $V$  – скорость потока,  $\tau \ll 1$  – толщина профиля,  $\tilde{\lambda} = O(1)$ . Исследуется течение газа в окрестности локальной сверхзвуковой зоны, возникающей на поверхности профиля, когда  $\lambda_\infty$  отличается от его критического значения  $\lambda_{\infty^*}$  на малую величину  $\lambda_\infty - \lambda_{\infty^*} = \varepsilon \tau^{2/3} > 0$ .

Введем декартову систему координат с осью  $x$ , направленной вдоль хорды профиля, и осью  $y$  – перпендикулярно к ней, и началом координат в точке  $\lambda = 1$  при  $\varepsilon = 0$ . При  $\tau \rightarrow 0$  течение описывается уравнениями трансзвуковой теории малых возмущений [10]:

$$\frac{1 + \gamma}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \eta} = F''(x); \eta \rightarrow \pm 0 \quad (3.2)$$

$$\tilde{\lambda}_\infty \rightarrow \tilde{\lambda}_{\infty^*} + O(\varepsilon); x^2 + \eta^2 \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты,  $\eta = \tau^{1/3} y$ , а  $y = \tau F(x)$  – уравнение верхней поверхности профиля. Далее будем полагать, что в окрестности  $x = 0$  все производные функции  $F(x)$  конечны и непрерывны. Отсюда следует, что кривизна поверхности профиля в окрестности локальной сверхзвуковой зоны имеет порядок  $O(\tau)$ .

При  $\varepsilon = 0$  течение газа является всюду дозвуковым за исключением одной изолированной точки, соответствующей  $x = \eta = 0$ . При  $\varepsilon > 0$  в окрестности этой точки возникает локальная сверхзвуковая зона, линейные размеры которой  $l_x(\varepsilon)$ ,  $l_\eta(\varepsilon)$  стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Область, где  $x \sim \eta \sim 1$ , является областью слабых возмущений относительно малого параметра  $\varepsilon$ . В этой области решение задачи (3.1) – (3.3) можно представить в виде

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0(x, \eta) + \varepsilon \tilde{\lambda}_1(x, \eta),$$

где  $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$  – решение нелинейной задачи (3.1)–(3.3) при  $\varepsilon = 0$ , а функция  $\tilde{\lambda}_1(x, \eta)$  удовлетворяет линейному уравнению



$$(1 + \gamma) \frac{\partial^2 (\tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_1}{\partial \eta^2} = 0$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_1}{\partial \eta} = 0, \eta = 0; \tilde{\lambda}_1 \rightarrow 1, x^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$$

Из (3.1)–(3.3) следует, что при  $x \rightarrow 0$  функция  $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1 + \gamma}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_0^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_0}{\partial \eta^2} = 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_0}{\partial \eta}(x, 0) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2!} a_2 x^2 + O(x^3),$$

где  $a_k = \frac{d^{(k+2)} F}{dx^{k+2}}(0)$ ,  $k = 0, 1$ . В силу предположения о выпуклости поверхности профиля имеем  $a_0 < 0$ . Для определения зависимости  $I_x(\varepsilon)$ ,  $I_\eta(\varepsilon)$  необходимо исследовать асимптотику поведения функций  $\tilde{\lambda}_0(x, \eta)$ ,  $\tilde{\lambda}_1(x, \eta)$  при  $x^2 + \eta^2 \rightarrow 0$ .

В [5] получено асимптотическое представление для функции  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}_1$  при  $x \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$

$$\tilde{\lambda} = a_0 \eta + Ax^2 + a_1 x \eta + Bx^3 + \varepsilon(D_0 + D_1 x) + O(\eta x^2) + O(x^4), \quad (3.4)$$

где  $a_0 < 0$ ,  $A < 0$ ,  $D_0 > 0$ . Из (3.4) следуют масштабы зоны, где линеаризация уравнений относительно малого параметра  $\varepsilon$  становится некорректной

$$\eta \sim \varepsilon, x \sim \sqrt{\varepsilon} \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.5) перейдем к новым переменным

$$\tilde{\lambda} = \varepsilon \bar{\lambda}(x_1, \eta_1); x = \sqrt{\varepsilon} x_1; \eta = \varepsilon \eta_1$$

Уравнение и граничные условия для  $\bar{\lambda}(x_1, \eta_1)$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial \eta_1^2} = O(\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} = a_0 + a_1 x_1 \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (3.7)$$

$$\bar{\lambda} = D_0 + a_0 \eta_1 + Ax_1^2 + \sqrt{\varepsilon} [D_1 + a_1 \eta_1 + Bx_1^2] x_1 + O(\varepsilon), x_1^2 + \eta_1^2 \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Очевидно, что соотношение (3.8), определяющее поведение решения при  $x_1^2 + \eta_1^2 \rightarrow \infty$ , является решением системы (3.6)–(3.7). С точностью до членов порядка  $O(\sqrt{\varepsilon})$  линия  $\bar{\lambda} = 0$ , ограничивающая зону сверхзвукового течения, в первом приближении имеет вид

$$\eta_1 = -\frac{1}{a_0} (D_0 + Ax_1^2) + \dots \quad (3.9)$$

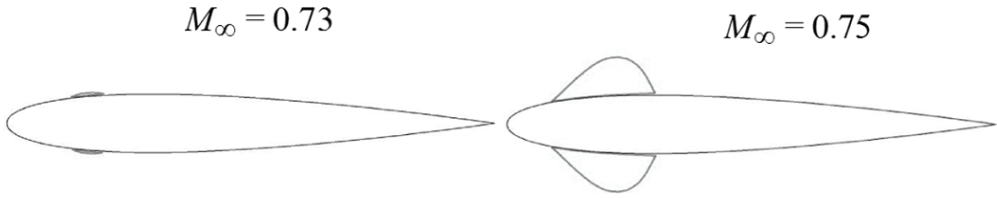


Рис. 5. Положение и форма сверхзвуковой зоны:  $M_y = 0.73$  – возникновение сверхзвуковой зоны,  $M_y = 0.75$  – возникновение скачка

Из (3.9) следует, что граница сверхзвуковой зоны описывается параболой. Параболический вид решения для границы локальной сверхзвуковой зоны также следует из точного решения [15] при  $M - M_* \ll 1$ . Переходя в (3.9) обратно к исходным переменным  $x = \sqrt{\epsilon}x_1, \eta = \epsilon\eta_1$ , получим

$$l_x(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}, l_\eta(\epsilon) \sim \epsilon$$

Переходя в этой формуле к размерным переменным, получим

$$\Delta x \sim \tau^{-1/3} \cdot (M_\infty - M_*)^{1/2}; \Delta y \sim \tau^{-1} (M_\infty - M_*)$$

Необходимо отметить, что в окрестности трансзвуковой зоны исходное уравнение (3.1) вырождается в уравнение параболического типа (3.6), решение которого исключает появление скачка уплотнения при  $\epsilon \ll 1$ . Из уравнения для характеристик, записанного в плоскости годографа [10], следует, что на звуковой линии изменение угла наклона вектора скорости  $\theta$  к оси  $x$  является монотонной функцией

$$\frac{d\theta}{dx} = \tau [F''(0) + O(\epsilon)] < 0, \quad (3.10)$$

что согласуется с критерием непрерывного перехода сверхзвукового течения в дозвуковое (см. [1]). Как показано в [1], нарушение условия (3.10) приводит к возникновению скачка уплотнения. Это возможно только при  $\epsilon = O(1)$ , т.е. при  $M_{**} - M_\infty = O(\tau^{2/3})$ , где  $M_{**}$  – число Маха, когда впервые появляется скачок уплотнения. Все эти выводы относятся к случаю, когда кривизна профиля является непрерывной функцией  $x$ . Разрыв старших производных  $F^{(k)}(x)$ ,  $k \geq 3$  не приводит к появлению скачка уплотнения при  $\epsilon \ll 1$ .

Возвращаясь к результатам разд. 1, можно констатировать, что все формулы разд. 1 сохраняют свою силу, если вместо  $M_*$  использовать  $M_{**}$ .

В качестве подтверждения справедливости полученных выше выводов на рис. 5 приведены результаты расчетов для профиля NACA-0012 с помощью методов вычислительной аэродинамики. Численные результаты получены с помощью решения краевой задачи для стационарных уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности  $k-\omega$  SST при использовании численного метода конечных объемов второго порядка точности. Возникновение локальной сверхзвуковой зоны отмечено при  $M_\infty = 0.73$ , а появление скачка уплотнения произошло при  $M_\infty = 0.75$ . Таким образом, существование бескачковой локальной сверхзвуковой зоны ограничено очень малым диапазоном чисел Маха набегающего потока. В этом диапазоне чисел Маха горизонтальные размеры сверхзвуковой зоны малы, а вертикальные размеры оказываются много меньше горизонтальных. Граница сверхзвуковой зоны приблизительно описывается параболой, как и предсказано теорией.

#### 4. Размер локальной сверхзвуковой зоны и высота скачка уплотнения

Для размеров локальной сверхзвуковой зоны воспользуемся уравнениями Эйлера, записанными в системе координат, в которой за направление координатных линий выбрано направление касательной к линии тока ( $\Psi = \text{const}$ ) и нормаль к ней. Уравнения выписаны А.А. Никольским в работе [1]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial}{\partial n} (\ln p), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \frac{\partial}{\partial s} (\ln p) \quad (4.1)$$

Здесь  $\vartheta$  – угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ,  $M$  – местное число Маха потока,  $p$  – статическое давление,  $\frac{\partial}{\partial s}$  и  $\frac{\partial}{\partial n}$  – операторы дифференцирования по касательной к линии тока и по нормали к ней.

Предполагается, что в локальной сверхзвуковой зоне энтропия постоянна  $\Delta S = 0$ .

В этом случае статическое давление в уравнениях (4.1) будет зависеть только от местного числа Маха и определяться формулой

$$p = p_{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Подставляя полученное выражение в (4.1), получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial n}\right)}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{(M^2 - 1) \left(\frac{\partial M}{\partial s}\right)}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \quad (4.2)$$

Начальные условия для уравнений (4.2) зададим на поверхности профиля. В окрестности основания скачка имеем

$$M(n = 0) = M_1(s), \quad \vartheta(n = 0) = \vartheta_0(s)$$

Координаты  $s$  и  $n$  будем считать безразмерными и выраженными в долях хорды профиля.

По определению,  $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$  есть кривизна линий тока, а  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$  – кривизна семейства линий ортогональных к ним, поэтому введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = K_s, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = K_n$$

На контуре профиля, на котором находится нулевая линия тока, ее кривизна совпадает с кривизной поверхности профиля

$$K_{\tau}(n = 0) = \frac{\partial \vartheta_0(s)}{\partial s} = K_0(s)$$

Рассмотрим местную сверхзвуковую зону на верхней поверхности профиля, которая для реальных крыловых профилей всегда выпуклая, не имеет плоских участков и точек перегиба. Тогда на поверхности профиля  $K_0(s) < 0$  во всей сверхзвуковой зоне.

Для нахождения местных чисел Маха в пространстве сверхзвуковой зоны проинтегрируем первое уравнение системы (4.2) вдоль линии  $s = \text{const}$  по нормали к линии тока от точки  $(s, n = 0)$  на поверхности профиля до точки  $(s, n)$  пространства. Вдоль этой линии число  $M$  потока меняется от заданной начальными условиями величины  $M_0(s)$  до неизвестной искомой величины  $M(s, n)$

$$\int_0^n \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) dn = \int_0^n K_s dn = \int_{M_0}^M \frac{dM}{M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}$$

Интеграл в правой части легко выражается в квадратурах. Проводя интегрирование и выражая  $M(s, n)$  через остальные величины с учетом того, что  $K_s(s) < 0$ , получаем:

$$M(s, n) = \frac{M_0(s) e^{-h}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(s) (1 - e^{-2h})}} \quad (4.3)$$

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn \quad (4.4)$$

Формула (4.3) является следствием точных уравнений Эйлера и описывает распределение чисел Маха вдоль линии, нормальной к линиям тока, но кривизна линий тока  $K_s(n, s)$  вдоль пути интегрирования и входящая в правую часть полученного выражения неизвестна. Для вычисления интеграла (4.4) поступим следующим образом. Предположим, что во всей сверхзвуковой области течения

$$M - 1 = o(1)$$

Это допущение реализуется в приближении трансзвуковой теории тонкого профиля [10]:  $M - 1 \sim \tau^{2/3}$  ( $\tau$  – относительная толщина профиля). В этом приближении  $K_\tau \sim \tau$ ,  $n \sim \tau^{-1/3}$ , т.е.  $|K_\tau(s)|n \ll 1$ , т.е. величина  $h$  в (4.3), (4.4) мала.

Оценка правой части второго уравнения (4.2) также приводит к выводу, что в этом случае изменение наклона линий тока также мало

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = o(1)$$

Тогда кривизна линий тока в пространстве сверхзвуковой зоны в первом приближении равна известной кривизне поверхности профиля  $K_s(s, n) \approx K_0(s)$ . При этом допущении интеграл (4.4) равен

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn = |K_0(s)|n$$

Отметим, что произведение  $|K_0(s)|n$  – это расстояние по нормали от поверхности профиля, выраженное в долях радиуса кривизны поверхности.

Тогда выражение (4.3) можно разложить в ряд Тейлора по этому малому параметру. Проводя разложение, получаем линейный в главном члене характер изменения чисел Маха в местной сверхзвуковой зоне

$$M(s, n) = M_0(s) - M_0(s) \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(s) \right] |K_0(s)|n + O((K_0 n)^2) \quad (4.5)$$

Первые эксперименты показали приблизительно линейный характер чисел Маха в сверхзвуковой зоне [2]. На самом деле линейный закон (4.5) наблюдается только при малых расстояниях  $|K_0(s)|n$ . В работе [24] получен следующий нелинейный член разложения интеграла (4.4)

$$h = \int_0^n |K_\tau| dn \approx |K_0(s)|n + \frac{3}{8} M_0^2 (M_0^2 - 1) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right) |K_0(s)|^2 n^2 \quad (4.6)$$

В этом случае расчет по формулам (4.3) и (4.6) хорошо совпадает с экспериментальными данными, полученными в работе [4], где закономерности течения в местной сверхзвуковой зоне профиля исследованы более подробно.

На рис. 6 показано поведение местных чисел Маха в сверхзвуковой зоне профиля при числе Маха  $M_0 = 1.3$ .

Как и следовало ожидать, местные числа Маха в сверхзвуковой зоне монотонно падают по мере удаления от поверхности профиля, все более отдаляясь от линейного закона по мере роста расстояния от поверхности профиля. На некотором расстоянии значение местного числа Маха становится равным  $M = 1$ , что и определяет высоту локальной сверхзвуковой зоны в точке  $s = \text{fix}$ . При  $M_0 = M_1$  ( $M_1$  – число Маха у основания скачка уплотнения) условие  $M = 1$  в (4.3) определяет высоту скачка уплотнения. Функция  $M_0(s)$  и  $M_1$  считаются известными.

Из выражения (4.3) можно оценить вертикальный размер местной сверхзвуковой зоны и высоту скачка уплотнения. На верхней границе сверхзвуковой зоны по определению  $M(s, n) = 1$ , и тогда, приравнивая правую часть выражения (4.3) единице, находим вертикальный размер сверхзвуковой зоны  $h(s)$

$$h(s) = \frac{1}{|K_0(s)|} \ln \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M_0^2 - 1)}}$$

Строго говоря, это расстояние должно быть отложено вдоль линии, ортогональной линиям тока в сверхзвуковой зоне. Однако, учитывая малость кривизны верхней по-

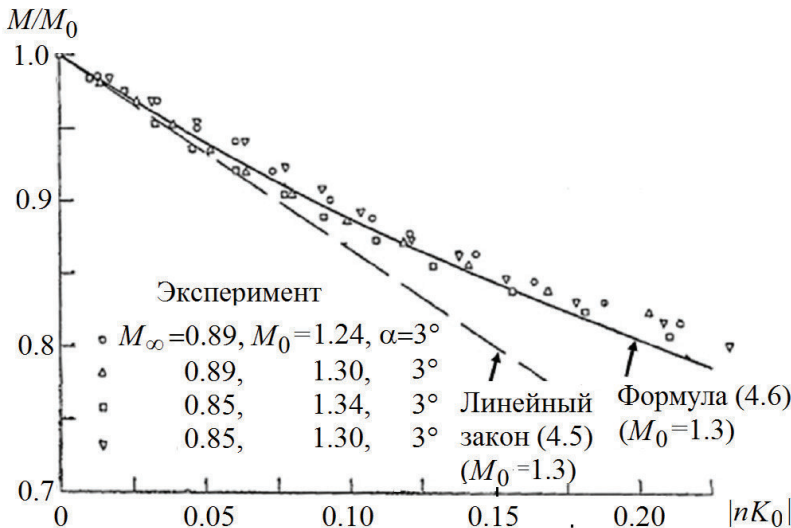


Рис. 6. Распределение чисел Маха по высоте сверхзвуковой зоны

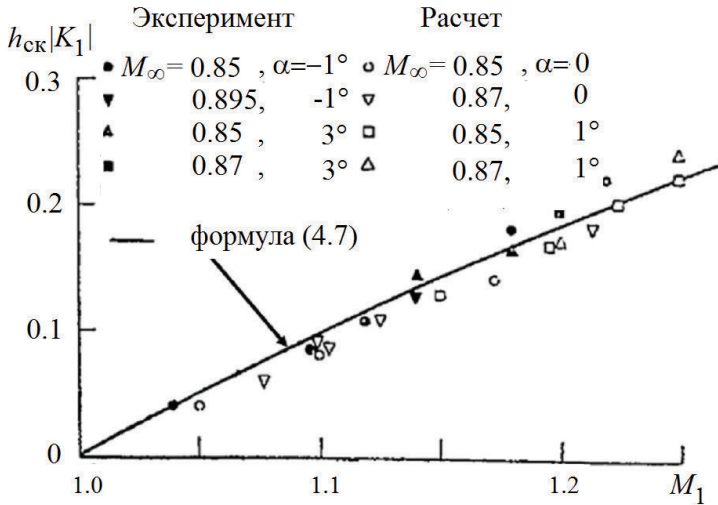


Рис. 7. Сравнение теоретических, расчетных и экспериментальных значений высоты скачка уплотнения

верхности реальных крыловых профилей в зоне ее расположения, можно считать это расстояние отложенным по перпендикуляру к поверхности профиля в точке с местным числом Маха  $M_x(s)$ . Если теперь на поверхности профиля известна точка  $s_1$  расположения скачка уплотнения, и в этой точке  $M_0(s_1) = M_1$ ,  $K_0(s_1) = K_1$ , то это же выражение определяет высоту скачка уплотнения  $h_{ск}$

$$h_{ск} = \frac{1}{|K_1|} \ln \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}} \quad (4.7)$$

Для малых сверхзвуковых чисел при  $M_1 \rightarrow 1$  из (4.7) следует

$$h_{ск} = \frac{2}{(\gamma+1)|K_1|} (M_1 - 1)$$

На рис. 7 приведено сравнение полученной зависимости высоты скачка уплотнения от числа Маха у его основания (4.7) с результатами обработки экспериментальных исследований и расчетными исследованиями, приведенными в работе [24],

Высота скачка здесь отнесена к радиусу кривизны профиля в точке расположения скачка уплотнения. Расчетные исследования околозвукового обтекания профилей, проведенные по методам [25, 26], дают практически те же результаты, и приведены в работе [24].

В разд. 3 было показано, что скачок впервые появляется в уже развитой локальной сверхзвуковой зоне, но формула (4.7) указывает, что скачок возникает при  $M_1 \rightarrow 1$ , т.е. в окрестности точки замыкания локальной сверхзвуковой зоны. Следует отметить, что задача о возникновении скачка уплотнения в локальной сверхзвуковой зоне в настоящее время еще ждет своего решения.

## 5. Волновое сопротивление

Классическая теория аэродинамического сопротивления основана на методе контрольной поверхности и интегральной теореме сохранения массы, импульса

и энергии. При этом контрольная поверхность выбирается в виде параллелепипеда с гранями, параллельными вектору набегающего потока. Все грани параллелепипеда расположены достаточно далеко от поверхности летательного аппарата. Выходная грань называется плоскостью Треффтца. На боковых поверхностях контрольной поверхности давление и скорость стремятся к нулю, поэтому баланс потока массы, импульса и энергии есть разность только от потоков в плоскости Треффтца и входной грани.

Начало возникновения этой теории следует отнести к первой половине 20-го века (работы [7, 8]). В последующие годы происходит дальнейшее уточнение понятий и накопление результатов, которые вошли в классические монографии и учебники ([11, 14, 27, 28]). Конец 20-го века и начало 21-го века характеризуется интенсивным ростом числа публикаций (см., например, [2, 3, 6, 9, 12, 24, 29–34]) в данном направлении как в России, так и за рубежом, что связано с увеличивающимся весом расчетных исследований на основе методов вычислительной аэродинамики в процессе проектирования летательных аппаратов.

Следует отметить, что разные авторы при формулировке рассматриваемой проблемы использовали разный математический аппарат и разные предположения. Отсюда вытекает потребность вывода всех соотношений теории сопротивления на основе единого математического аппарата и минимального количества ограничений при постановке задачи.

К числу последних достижений в этом направлении можно отнести работу [35], где была предложен способ разделения компонент сопротивления для нестационарных вязких течений. Следует отметить, что эта работа опирается на основополагающую статью [36], в которой сделана попытка разделения сопротивления на компоненты в стационарном случае без использования предположения о малости величины возмущений скорости и давления на контрольном контуре. Такой подход невозможно реализовать строго, так как в этой постановке теряется связь между введенными компонентами сопротивления и физическими механизмами, ответственными за них. Поэтому статья [36] содержит ряд предположений, являющихся правдоподобными, но не вполне строгими, что и отмечено в [35]. По существу, в [36] неявно предполагается, что возмущения малы.

В данном разделе классическая теория переформулирована в рамках теории малых возмущений для произвольных контрольных поверхностей для случая обтекания профиля в двумерной постановке.

Выпишем интегральные уравнения, которые следуют из теорем сохранения массы, импульса и энергии для уравнений Эйлера ( $dl$  – длина дуги,  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к линии контрольного контура):

$$\int \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl = 0 \tag{5.1}$$

$$\int [\rho \mathbf{n}dl + \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl] = -\mathbf{X} \tag{5.2}$$

$$\int \left( i + \frac{V^2}{2} \right) \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl = \int i_0 \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dl \tag{5.3}$$

В соотношениях (5.1)–(5.3) использованы следующие обозначения:  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $T$  – температура,  $\mathbf{X}$  – сила сопротивления,  $i$  – энтальпия,  $i_0$  – полная энтальпия,  $V = |\mathbf{V}|$ . Интегрирование производится по произвольной замкнутой линии, охватывающей тело.

Основное термодинамическое тождество имеет вид:

$$di = Tds + \frac{dp}{\rho} \quad (5.4)$$

где  $s$  – энтропия. Полагаем, что везде в потоке справедливо предположение о малости возмущений

$$p = p_\infty + p', \quad V = V_\infty + V' \quad (5.5)$$

$$\frac{p'}{p_\infty} = o(1), \quad \frac{V'}{V_\infty} = o(1),$$

где  $V' = |V'|$ . Тогда из (5.4) следует, что

$$i' = Ts' + \frac{p'}{\rho}, \quad (5.6)$$

где  $i = i_\infty + i'$ ,  $s = s_\infty + s'$ .

Тогда из (5.1), (5.2) следует, что

$$\int [p'ndl + V'(\rho V \cdot n)dl] = -X, \quad (5.7)$$

а из (5.6) и (5.7) в первом приближении

$$\int [(i' - Ts')\rho_\infty ndl + \int V'(\rho V \cdot n)dl] = -X \quad (5.8)$$

Используя (5.3), из (5.8) получаем силу сопротивления

$$(X \cdot V_\infty) = \int \left[ \left( T_\infty s' + \frac{V'^2}{2} \right) \rho_\infty (V_\infty \cdot n)dl - \int i'_0 \rho_\infty (V_\infty \cdot n)dl \right] \quad (5.9)$$

В двумерном случае отсутствуют вихревая пелена и, следовательно, индуктивное сопротивление, силы трения и теплоподвод. Единственным ненулевым слагаемым в (5.9) является первый член с энтропией. Источником изменения энтропии в этом случае является скачок уплотнения, поэтому первое слагаемое в (5.9), связанное с ростом энтропии, называется волновым сопротивлением тела [37]

$$V_\infty X_B = \int [(T_\infty s')\rho_\infty (V_\infty \cdot n)dl] \quad (5.10)$$

Из формулы (5.10) следует важный вывод: в линейном (по величине энтропии) приближении волновое сопротивление не зависит от поверхности интегрирования. Это замечание и устраняет парадокс Христиановича–Бурого, сформулированный в разд. 1: в работе [7] вместо плоскости Треффтца неявно использовалась поверхность  $p = \text{const}$ , а в работе [8] – поверхность  $u = \text{const}$ . Прямое доказательство независимости в линейном приближении силы сопротивления от условий замыкания  $p = \text{const}$ ,  $u = \text{const}$  или  $T = \text{const}$  содержится в [6].

Из (5.10) следует формула для коэффициента волнового сопротивления профиля с хордой  $\bar{y} = y/b$ , ( $b$  – хорда профиля,  $R$  – газовая постоянная, а интегрирование ведется вдоль скачка уплотнения):

$$c_{\text{хв}} = \frac{2T_\infty}{V_\infty^2} \int_0^{\bar{h}_{\text{ск}}} s' \cdot (d\bar{y}) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 R} \int_0^{\bar{h}_{\text{ск}}} s' \cdot (d\bar{y}) \quad (5.11)$$

Высота скачка уплотнения  $h_{\text{ск}}$  определяется соотношением (4.7).



Возрастание энтропии  $s'$  при переходе потока через элемент прямого скачка уплотнения зависит только от числа Маха перед ним и хорошо известно [19]:

$$\frac{s'}{R} = -\ln\theta, \quad \theta = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{M_1^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Решение задачи распределения чисел Маха  $M_1$  перед скачком уплотнения описывается формулой (4.5). Так как все вышеприведенные формулы справедливы только для малых значений  $(M_1^2 - 1)$ , разложим функцию  $\theta(M)$  в ряд Тейлора по степеням малого параметра

$$\theta(M) = 1 - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(M^2 - 1)^3}{3} + \dots$$

Это разложение соответствует малому возрастанию энтропии в слабых прямых скачках уплотнения [19]. Возрастание энтропии будет при этом равно

$$\frac{s'}{R} \approx \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(M^2 - 1)^3}{3}$$

После интегрирования получаем главный член разложения волнового сопротивления по степеням параметра  $(M^2 - 1)$ , справедливого для малых сверхзвуковых чисел Маха перед скачком:

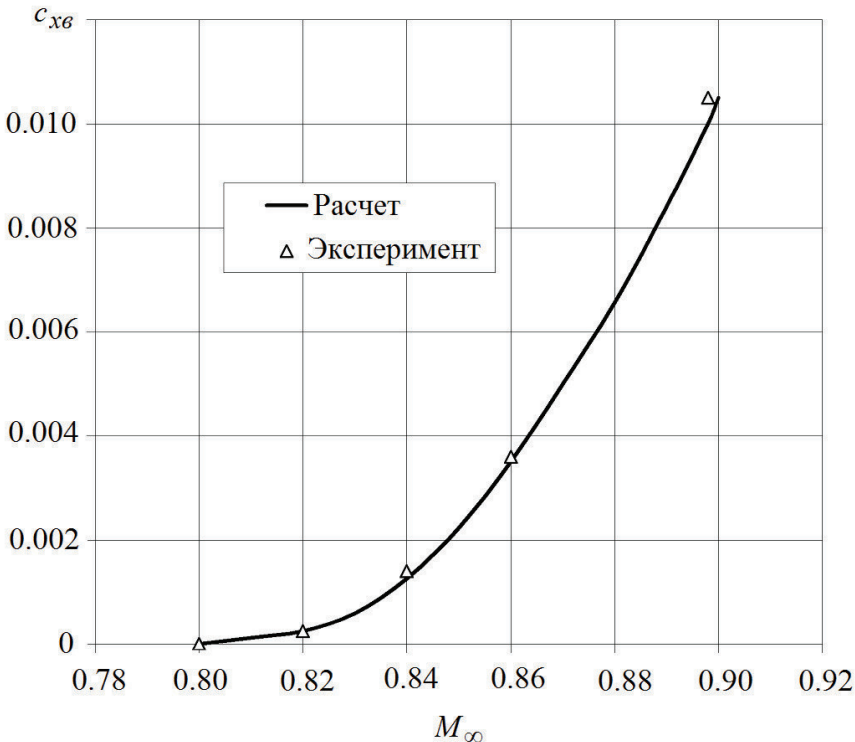


Рис. 8. Сравнение значений волнового сопротивления (5.12) с экспериментальными данными [38]

$$c_{\text{хв}} = \frac{(M_1^2 - 1)^4}{3M_\infty^2 |K_1| (\gamma + 1)^3} + O(M_1^2 - 1)^5 \quad (5.12)$$

На рис. 8 приведены результаты расчетов по формуле (5.12) волнового сопротивления крылового профиля с использованием экспериментальных данных работы [2], из которых было взято значение числа Маха у корня скачка уплотнения. Там же приведены значения волнового сопротивления, полученные с использованием экспериментальных данных о распределении чисел Маха вдоль всего скачка уплотнения, полученных методом интерферометрии. Согласование результатов следует признать удовлетворительным.

### Заключение

Теория волнового сопротивления приближается к 80-летнему юбилею. За это время пройден большой путь и найдены решения многих задач. Существенно улучшено качество постановок задач, позволивших построить замкнутую теорию волнового сопротивления и получить аналитические формулы, описывающие резкое возрастание сопротивления профиля при переходе числа Маха набегающего потока через критическое значение. Удалось устранить ряд заблуждений, парадоксов и неясностей при построении математических моделей данного явления. Однако ряд задач так и остался нерешенным. Так, например, отсутствует понимание процесса возникновения скачка уплотнения. Остается не до конца выясненным, как взаимодействует верхняя часть скачка со звуковой линией, какова здесь структура течения. Остается в зоне внимания исследователей задача о взаимодействии основания скачка с пограничным слоем с учетом того фактора, что из-за больших градиентов давления течение за скачком уплотнения является турбулентным. В процессе исследований находится также задача о возникновении локального отрыва из-под скачка при достижении числа Маха набегающего потока некоторого критического значения, а также (при последующем увеличении числа Маха набегающего потока) превращении этого локального отрыва в глобальный отрыв, приводящий к возникновению колебаний скачка уплотнения (бафтинга).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский А.А., Таганов Г.И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
2. *Боксер В.Д., Серебрянский Я.М.* Приближенный метод определения волнового сопротивления профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны // Уч. Зап. ЦАГИ. 1978. № 5. Т. 9. С. 21–29.
3. *Боксер В.Д., Ляпунов С.В.* Пределы применимости приближенных методов расчета волнового сопротивления профиля при околосвуковых скоростях // Уч. Зап. ЦАГИ. 1995. № 3–4. Т. XXVI. С. 26–34.
4. *Потанчик А.В.* Экспериментальное исследование поля течения вблизи профиля при околосвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1979. № 2010. С. 22–34.
5. *Зубцов А.Б., Судаков Г.Г.* Асимптотическое решение задачи обтекания профиля дозвуковым потоком газа с образованием локальной сверхзвуковой зоны // Уч. Зап. ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 2. С. 3–9.
6. *Петров А.С.* О вспомогательных гипотезах теории волнового сопротивления // Уч. Зап. ЦАГИ. 1989. Т. XX. № 2. С. 61–65.
7. *Христианович С.А., Серебрянский Я.М.* О волновом сопротивлении // Тр. ЦАГИ. 1944. № 550. С. 1–18.
8. *Бураго Г.Ф.* Теория крыловых профилей с учетом влияния сжимаемости воздуха. М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1949. С. 1–166.
9. *Боксер В.Д., Судаков Г.Г.* Аэродинамическое сопротивление тел в околосвуковом потоке: теория и приложения к вычислительной аэродинамике // Изв РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 128–140.

10. Коул Д., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. Т. 1. М.: Высшая школа, 1976. 310 с.
13. Зеленский И.Е. О лобовом сопротивлении тел, погруженных в газовый поток сверхзвуковой скорости // Уч. Зап. Харьковского ун-та. 1949. Т. 29. С. 1–183.
14. Карман Т.Ф. Основы аэродинамики больших скоростей // В сб. ст. Общая теория аэродинамики больших скоростей / под ред. Сирса У.Р. М.: Воениздат, 1962. 667 с. С. 1–30.
15. Ringleb F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten. 1940. № 4. V. 20. P. 185–198.
16. Франкль Ф.И. К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями // ПММ. 1947. № 11. С. 199–202.
17. Busemann A. The non-existence of transonic potential flow // Proc. of Symp. in Applied Mathematics. 1953. № 4. P. 29–40.
18. Guderley G. On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns // Advanced in Appl. Mech. 1953. № 3. P. 145–184.
19. Bers L. Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows // Commun. on Pure&Appl. Math. 1954. № 7. P. 79–104.
20. Morawetz C.S. On the non-existence of continuous transonic flows past profiles, // Commun. on Pure&Appl. Math. 1956. № 9. P. 45–68.
21. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностран. лит-ра, 1961. 208 с.
22. Sears W.R. Transonic potential flow of a compressible fluid // Appl. Phys. 1951. V. 21. P. 771–778.
23. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. 480 с.
24. Паньженский В.А., Петров А.С. О течении в местной сверхзвуковой зоне при околозвуковом обтекании крылового профиля // Уч. Зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 1–8.
25. Лифшиц Ю.Б. К теории трансзвуковых течений около профиля // Уч. Зап. ЦАГИ. 1973. Т. IV. № 5. С. 1–8.
26. Ляпунов С.В. Ускоренный метод решения уравнений Эйлера в задаче о трансзвуковом обтекании профиля // Матем. Моделир. 1991. № 4. С. 83–92.
27. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 744 с.
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
29. Giles M.B., Cummings R.M. Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Theoretical development // J. of Aircraft. 1999. V. 36. No. 2. P. 357–365.
30. Hunt D.L., Cummings R.M., Giles M.B. Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Applications // J. of Aircraft. 1999. № 2. V. 36. P. 366–373.
31. Petruzzelli N., Keane A.J. Wave drag estimation for use with panel codes // J. Aircraft. 2001. № 4. V. 38. P. 778–780.
32. Cole J.D., Malmuth N.D. Wave drag due to lift for transonic airplanes // Proc. Roy. Soc. A. 2005. V. 461. P. 541–560.
33. Gariépy M., Trépanier J.-Y., Improvements in accuracy and efficiency for a far-field drag prediction and decomposition method // AIAA. 2010. 2010–4678. P. 1–15.
34. Судаков Г.Г., Определение компонент аэродинамического сопротивления летательного аппарата в околозвуковом потоке, который описывается системой уравнений Рейнольдса // Уч. Зап. ЦАГИ. 2016. Т. XLVII. № 1. С. 3–12.
35. Toubin H., Bailly D. Development and application of a new unsteady far-field drag decomposition method // AIAA. 2014. V. 2014–2991. P. 1–18.
36. Van der Vooren J., Destarac D. Drag/thrust analysis of a jet-propelled transonic transport aircraft: Definition of physical drag components // Aerospace Sci.&Technol. 2004. V. 8. P. 545–556.
37. Петров А.С. Влияние реальных свойств газа на суммарные аэродинамические силы при дозвуковых скоростях потока // Теплофиз. и аэромех. 2004. Т. 11. № 1. С. 33–50.

## Shock–Wave Drag of Profile Flowing by Transonic Gas Flow: History, Achievements, Problems

A. S. Petrov<sup>a, #</sup>, G. G. Soudakov<sup>a, ##</sup>

<sup>a</sup>Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

e-mail: [aspetrov1906@rambler.ru](mailto:aspetrov1906@rambler.ru)<sup>#</sup>, [soudakov@mail.ru](mailto:soudakov@mail.ru)<sup>##</sup>

This paper presents a review of works on the theory of profile drag and contains an attempt to review the process of basic ideas development about the physical processes that take place at transonic airfoil flow. It should be noted that this field of aerodynamics was replete with erroneous statements at the early stages of its development. The accumulation of experimental data and the improvement of the mathematical apparatus have made it possible to eliminate inaccuracies in the formulation of problems, as well as to significantly improve the mathematical models describing this phenomenon. Nevertheless, a few problems remain unsolved at the present time, requiring further delving into the physics of the phenomenon and improving the mathematical apparatus.

*Keywords:* overview, profile, wave drag, mathematical models

### REFERENCES

1. *Nikolsky A.A., Taganov G.I.* Gas motion in a local supersonic zone and some conditions of potential flow destruction // PMM, 1946, vol. 10, iss. 4, pp. 481–502.
2. *Boxer V.D., Serebriyskiy Ya.M.* Approximate method for determining the wave drag of an airfoil in the presence of a local supersonic zone // Uch. Zap. TsAGI, 1978, no. 5, vol. 9, pp. 21–29.
3. *Boxer V.D., Lyapunov S.V.* Limits of applicability of approximate methods for calculating the wave drag of an airfoil at transonic speeds // Uch. Zap. TsAGI, 1995, no. 3–4, vol. XXVI, pp. 26–34.
4. *Potapchik A.V.* Experimental study of the flow field near an airfoil at transonic speeds // Tr. TsAGI, 1979, no. 2010, pp. 22–34.
5. *Zubtsov A.B., Soudakov G.G.* Asymptotic solution of the problem of subsonic gas flow around an airfoil with the formation of a local supersonic zone // Uch. Zap. TsAGI, 2011, vol. XLII, no. 2, pp. 3–9.
6. *Petrov A.S.* On auxiliary hypotheses of the theory of wave resistance // Uch. Zap. TsAGI, 1989, vol. XX, no. 2, pp. 61–65.
7. *Khristianovich S.A., Serebriyskiy Ya.M.* On wave resistance // Tr. TsAGI, 1944, no. 550, pp. 1–18.
8. *Burago G.F.* Theory of Airfoils Taking Into Account the Influence of Air Compressibility. Moscow: Zhukovsky Air Force Engineering Academy Pub., 1949. pp. 1–166. (in Russian)
9. *Bokser V.D., Soudakov G.G.* Aerodynamic drag of bodies in transonic flow. Theory and applications to computational aerodynamics // Fluid Dyn., 2008, vol. 43, pp. 613–624. <https://doi.org/10.1134/S0015462808040145>
10. *Cole J.D., Cook L.* Transonic Aerodynamics. N.Y.: Elsevier, 1986.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
12. *Krasnov N.F.* Aerodynamics. Vol. 1. Moscow: Higher School, 1976. 310 p. (in Russian)
13. *Zelenskiy I.E.* On the frontal resistance of bodies immersed in a gas flow of supersonic velocity // Uch. Zap. Kharkov Univ., 1949, vol. 29, pp. 1–183.
14. *Karman T.F.* Fundamentals of high-speed aerodynamics // in: General Theory of High Speed Aerodynamics / ed. by *Sears W.R.* Princeton: Univ. Press, 1954. xiv+758 p.
15. *Rinlgleb F.* Exakte Losungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasstromung // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten, 1940, vol. 20, no. 4, pp. 185–198.
16. *Frankl F.I.* On the formation of shock waves in subsonic flows with local supersonic velocities // PMM, 1947, iss. 11, pp. 199–202.
17. *Busemann A.* The non-existence of transonic potential flow // Proc. of Symp. in Applied Mathematics, 1953, no. 4, pp. 29–40.
18. *Guderley G.* On the Presence of Shocks in Mixed Subsonic-Supersonic Flow Patterns // Adv. in Appl. Mech., 1953, no. 3, pp. 145–184.

19. *Bers L.* Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows // Commun. on Pure&Appl. Math., 1954, no. 7, pp. 79–104.
20. *Morawetz C.S.* On the non-existence of continuous transonic flows past profiles // Commun. on Pure &A ppl. Math., 1956, no. 9, pp. 45–68.
21. *Bers L.* Mathematical Problems in Subsonic and Transonic Gas Dynamics. Moscow: Inostr. Lit-ra, 1961. 208 p. (in Russian)
22. *Sears W.R.* Transonic potential flow of a compressible fluid // Appl. Phys., 1951, vol. 21, pp. 771–778.
23. *Golubev V.V.* Lectures on Wing Theory. Moscow;Leningrad: GITTL, 1949. 480 p. (in Russian)
24. *Panzhenskiy V.A., Petrov A.S.* On the flow in the local supersonic zone during transonic flow around an airfoil // Uch. Zap. TsAGI, 1987, vol. 18, no. 2, pp. 1–8.
25. *Lifshits Yu.B.* On the theory of transonic flows around an airfoil // Uch. Zap. TsAGI, 1973, vol. IV, no. 5, pp. 1–8.
26. *Lyapunov S.V.* Accelerated method of the Euler equations solution in transonic airfoil flow problem // Matem. Modelir., 1991, no. 4, pp. 83–92.
27. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Springer, 2004.
28. *Loitsyansky L.G.* Fluid Mechanics. Moscow: Nauka, 1970. 904 p. (in Russian)
29. *Giles M.B., Cummings R.M.* Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Theoretical development // J. of Aircraft, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 357–365.
30. *Hunt D.L., Cummings R.M., Giles M.B.* Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Applications // J. of Aircraft, 1999, no. 2, vol. 36, pp. 366–373.
31. *Petruzzelli N., Keane A.J.* Wave drag estimation for use with panel codes // J. Aircraft, 2001, no.4, vol. 38, pp. 778–780.
32. *Cole J.D., Malmuth N.D.* Wave drag due to lift for transonic airplanes // Proc. Roy. Soc. A, 2005, vol. 461, pp. 541–560.
33. *Gariépy M., Trépanier J.-Y.* Improvements in accuracy and efficiency for a far-field drag prediction and decomposition method // AIAA, 2010, 2010–4678, pp. 1–15.
34. *Sudakov G.G.* Determination of the components of aerodynamic drag of an aircraft in a transonic flow described by the Reynolds system of equations // Uch. Zap. TsAGI, 2016, vol. XLVII, no. 1, pp. 3–12.
35. *Toubin H., Bailly D.* Development and application of a new unsteady far-field drag decomposition method // AIAA, 2014, 2014–2991, pp. 1–18.
36. *Van der Vooren J., Destarac D.* Drag/thrust analysis of a jet-propelled transonic transport aircraft: Definition of physical drag components // Aerospace Sci.&Technol., 2004, vol. 8, pp. 545–556.
37. *Petrov A.S.* Influence of real properties of gas on total aerodynamic forces at subsonic flow speeds // Thermophys. & Aeromech., 2004, vol. 11, no. 1, pp. 33–50.