

УДК 539.3

ТРЕХПОЛЬНЫЙ МКЭ В РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК С ВАРИАНТАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН

© 2024 г. М. Ю. Ключков^{1,*}, В. А. Пшеничкина^{1,**}, А. П. Николаев^{2,***},
Ю. В. Ключков^{2,****}, О. В. Вахнина^{2,*****}, А. С. Андреев^{2,*****}

¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

²Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

e-mail: m.klo4koff@yandex.ru*, vap_hm@list.ru**, anpetr40@yandex.ru***, klotchkov@bk.ru****,
ovahnina@bk.ru*****, aandreev.07.1988@gmail.com*****

Поступила в редакцию 24.02.2024 г.

После доработки 12.09.2024 г.

Принята к публикации 15.09.2024 г.

Разработан трехпольный конечный элемент четырехугольной формы тонкой оболочки с узловыми неизвестными в виде: перемещений и их первых производных; деформаций и искривлений срединной поверхности; усилий и моментов срединной поверхности.

Аппроксимация искомых величин осуществлялась в двух вариантах. В первом варианте компоненты вектора перемещений и компоненты тензоров деформаций и кривизн, а также тензоров усилий и моментов аппроксимировались с использованием традиционных функций формы как составляющие скалярных полей. Во втором варианте тензорные величины аппроксимировались через соответствующие тензоры узловых точек, и только после координатных преобразований на основе соотношений используемой криволинейной системы координат были получены аппроксимирующие выражения компонент соответствующих тензоров.

На конкретных примерах показана эффективность использования второго варианта аппроксимирующих выражений в расчетах оболочки.

Ключевые слова: вектор перемещения, тензор деформаций, тензор напряжений, тензор усилий, тензор искривлений, трехпольный конечный элемент, тензорно-векторная интерполяция

DOI: 10.31857/S0032823524050109 EDN: JPFVTH

1. Введение

Оболочки различных конфигураций в последнее время получают все более широкое распространение во многих инженерных сооружениях (трубопроводы, резервуары, покрытия, перекрытия, летательные аппараты, архитектурные формы и другие).

Теория расчета тонких оболочек в настоящее время является достаточно развитой [1–4] при различных видах нагружения. Аналитические решения уравнений теории тонких оболочек оказались возможными лишь в некоторых частных случаях, далеких от инженерной практики. Поэтому актуальными оказались разработки численных методов решения уравнений теории оболочек. Среди численных методов решения задач деформирования инженерных конструкций получил развитие и широкое использование метод конечных элементов (МКЭ) [5–7]. Наиболее широкое исполь-

зование при расчете оболочек получил МКЭ в формулировке метода перемещений [8–14]. МКЭ в формулировке метода перемещений использовался в расчетах трехслойных оболочек [15–22]. Для обоснования разработанной методики расчета трехслойных оболочек в [21, 22] выполнено сравнение полученных результатов с аналитическими решениями других исследователей.

В расчетах оболочек МКЭ широко использовался и в смешанной формулировке [23–26]. В последние годы разрабатывается виртуальный МКЭ с объемными конечными элементами на пространственных сетках дискретизации [27, 28].

При использовании МКЭ в формулировке метода перемещений применялись в конечных элементах кинематические узловые неизвестные. При смешанной формулировке МКЭ в конечных элементах узловыми неизвестными принимались перемещения и напряжения с выполнением условий совместности между конечными элементами в сетке дискретизации.

При проектировании тонкостенных оболочек необходимо знать численные значения компонент векторов перемещений, а также компонент тензоров напряжений. Достижению этой цели служит развитие численных методов расчета, в частности МКЭ в виде трехпольной формулировки, которая позволяет без дополнительных вычислительных процедур одновременно получать численные значения компонент вектора перемещения, изгибающих моментов, продольных сил, деформаций и искривлений срединной поверхности рассчитываемой оболочки. При этом следует применять вычислительные технологии, позволяющие учитывать смещение конечного элемента как твердого целого.

Получение аппроксимирующих выражений искомых величин с учетом смещения как твердого тела для конечного элемента в форме цилиндрической панели показано в [29, 30], для трехслойных оболочек в [15, 16].

Проблеме учета жестких смещений в МКЭ в векторной формулировке посвящены работы [31, 32].

С целью решения проблем численного анализа НДС оболочек в настоящей работе излагается разработанный трехпольный вариант МКЭ со следующими полями узловых неизвестных:

- перемещения и их первые производные;
- деформации и искривления срединной поверхности;
- усилия и моменты срединной поверхности.

Аппроксимация искомых величин использована в двух вариантах.

В первом варианте традиционные аппроксимирующие выражения использовались для аппроксимации непосредственно компонент векторов перемещений и компонент тензоров деформаций, искривлений, усилий и моментов.

Во втором варианте традиционные аппроксимирующие процедуры применялись к искомым векторам и тензорам, и после координатных преобразований в используемой криволинейной системе координат определялись аппроксимирующие выражения для компонент искомых векторов и тензоров.

Используемая векторно-тензорная форма интерполяционной процедуры позволяет эффективно решить проблему учета смещений оболочек как абсолютно твердых тел.

2. Геометрия оболочки

Параметризация срединной поверхности оболочки является важным аспектом процесса разработки вычислительного алгоритма расчета тонкостенных объектов. В представленном исследовании в качестве криволинейных координат срединной поверхности были использованы осевая координата x и полярный угол θ . Таким образом, радиус-вектор срединной поверхности оболочки может быть задан векторной функцией следующего вида

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta)\sin\theta\vec{j} + r(x, \theta)\cos\theta\vec{k}, \quad (2.1)$$

где θ – полярный угол, отсчитываемый в плоскости yOz от оси Oz против хода часовой стрелки; $r = r(x, \theta)$ – функция, зависящая от конкретного типа поверхности.

Так, например, для оболочки в форме эллипсоида данная функция имеет вид

$$r(x, \theta) = \frac{bc\sqrt{a^2 - x^2}}{a\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.2)$$

где a, b, c – параметры эллипсоида.

Для эллиптического цилиндра эта формула зависит только от полярного угла

$$r(\theta) = \frac{bc}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.3)$$

Базисные векторы точки M^0 срединной поверхности оболочки в исходном состоянии можно получить стандартным образом с использованием формул дифференциальной геометрии

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0, \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0, \quad \vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0}, \quad (2.4)$$

где $a^0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0)(\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$.

Векторы базиса точки $M^{0\zeta}$, расположенной в произвольном слое оболочки на расстоянии ζ от точки M^0 в исходном состоянии определяются по формулам

$$\vec{g}_1^0 = \vec{R}_{,x}^{0\zeta}, \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^{0\zeta}, \quad (2.5)$$

где $\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta\vec{a}^0$.

В процессе деформирования оболочки под действием приложенной внешней нагрузки точки M^0 и $M^{0\zeta}$ займут новые положения M и M^ζ , определяемые векторами перемещений $\vec{v}$ и $\vec{V}$ соответственно

$$\vec{v} = v^1\vec{a}_1^0 + v^2\vec{a}_2^0 + v\vec{a}^0, \quad \vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0) \quad (2.6)$$

Входящий в структуру формулы вектора $\vec{V}$ орт нормали к деформированной срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}, \quad (2.7)$$

где $\vec{a}_1 = \vec{R}_{,x}^\zeta = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x}$, $\vec{a}_2 = \vec{R}_{,\theta}^\zeta = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,\theta}$, $\vec{a} = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2$

Векторы базиса в точке M^ζ деформированного состояния оболочки определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^\zeta &= \vec{R}_{,x}^\zeta = (\vec{R}^{0\zeta} + \vec{V})_{,x} = \vec{g}_1^0 + \vec{v}_{,x} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0)_{,x} \\ \vec{g}_2^\zeta &= \vec{R}_{,\theta}^\zeta = (\vec{R}^{0\zeta} + \vec{V})_{,\theta} = \vec{g}_2^0 + \vec{v}_{,\theta} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0)_{,\theta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Метрические тензоры точек $M^{0\zeta}$ и M^ζ определяются компонентами

$$g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0, \quad g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad (2.9)$$

где нижние индексы α и β последовательно принимают значения 1, 2.

Ковариантные компоненты тензора деформаций в точке M^ζ могут быть получены посредством использования соотношения механики сплошной среды

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0) / 2 \quad (2.10)$$

При использовании гипотезы тонких оболочек Кирхгофа–Лява [1] соотношения (2.10) могут быть представлены суммой

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} = \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} + \zeta \left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \quad (2.11)$$

где $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \varepsilon_{11}^\zeta \ \varepsilon_{22}^\zeta \ 2\varepsilon_{12}^\zeta \right\}$, $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12} \right\}$, $\left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \aleph_{11} \ \aleph_{22} \ 2\aleph_{12} \right\}$ – деформации и искривления в точках M^ζ и M оболочки.

3. Дискретная модель объекта

Для построения дискретной модели оболочки был выбран четырехузловой конечный элемент в виде фрагмента срединной поверхности с узлами i, j, k, l .

Криволинейные координаты x и θ дискретного элемента определяются с использованием билинейных функций через координаты узлов посредством матричных соотношений

$$x = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ x_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \theta = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \theta_y \right\}_{4 \times 1}, \quad (3.1)$$

$$\text{где } \left\{ x_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ x^i \ x^j \ x^k \ x^l \right\}, \quad \left\{ \theta_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \theta^i \ \theta^j \ \theta^k \ \theta^l \right\}.$$

В качестве искоемых кинематических и силовых параметров конечного элемента выбираются следующие столбцы узловых неизвестных: $\left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ –

строки узловых перемещений, каждая из которых имеет вид $\left\{ q_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i \ q^j \ q^k \ q^l \ q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l \ q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l \right\}$, где под q понимается компонента вектора пере-

мещения v^1, v^2 или v ; $\left\{ \varepsilon \aleph_y \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_y \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \aleph_y \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ – строки узловых деформаций и искрив-

лений срединной поверхности $\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \lambda_{11}^i \ \lambda_{11}^j \ \lambda_{11}^k \ \lambda_{11}^l \ \lambda_{22}^i \dots \lambda_{22}^l \ 2\lambda_{12}^i \dots 2\lambda_{12}^l \right\}$, где под $\lambda_{\alpha\beta}$

понимается деформация $\varepsilon_{\alpha\beta}$ или искривления $\aleph_{\alpha\beta}$ срединной поверхности;

$\left\{ NM_y \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \left\{ N_y \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ M_y \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ – строки узловых продольных сил и изгибающих моментов

$\left\{ T_y \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ T^{11i} \ T^{11j} \ T^{11k} \ T^{11l} \ T^{22i} \dots T^{22l} \ T^{12i} \dots T^{12l} \right\}$. Здесь под $T^{\alpha\beta}$ понимается контравариантная компонента тензора внутренних усилий или тензора моментов.

В разработанных к настоящему времени вычислительных комплексах (ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и других) и конечно-элементных алгоритмах традиционно используется покомпонентная интерполяционная процедура, отличительной особенностью которой является применение интерполяционного выражения отдельно к каждой компоненте вектора перемещения или к каждой компоненте тензорных величин, таких как тензор деформаций, искривлений, сил и моментов. Согласно этой интерполяционной процедуре, можно записать следующие интерполяционные выражения

$$q = \left\{ \psi \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ q_y^L \right\}_{12 \times 1}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \lambda_{\alpha\beta y} \right\}_{4 \times 1}, \quad T^{\alpha\beta} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ T_y^{\alpha\beta} \right\}_{4 \times 1}, \quad (3.2)$$

где $\left\{ \psi \right\}_{1 \times 12}^T$ – матрица-строка, содержащая произведения полиномов Эрмита третьей степени [24, 25].

При использовании билинейных функций формы для аппроксимации деформаций условия неразрывности деформаций не выполняются из-за наличия деформаций сдвига ε_{xy} в узле k конечного элемента.

С использованием интерполяционных зависимостей (3.2) формируются аппроксимирующие матричные выражения

$$\left\{ \varepsilon N \right\}_{6 \times 1} = \left[H_1 \right]_{6 \times 24} \left\{ \varepsilon N_y \right\}_{24 \times 1}, \quad \left\{ NM \right\}_{6 \times 1} = \left[H_1 \right]_{6 \times 24} \left\{ NM_y \right\}_{24 \times 1}, \quad \left\{ v \right\}_{3 \times 1} = \left[A_1 \right]_{3 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1}, \quad \left\{ \varepsilon N^k \right\}_{6 \times 1} = \left[B_1 \right]_{6 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1}, \quad (3.3)$$

где $\left\{ \varepsilon N \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ N_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \right\}$ – строка деформаций и искривлений внутренней точки конечного элемента; $\left\{ NM \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \right\}$ – строка усилий и моментов внутренней точки конечного элемента; $\left\{ \varepsilon N^k \right\}_{1 \times 6}$ – строка деформаций и искривлений внутренней точки, определяемых функциями перемещений.

Как следует из (3.2), каждая из компонент вектора и тензора интерполируется через узловые значения этой же самой компоненты. Данная аппроксимация является корректной, если векторы и тензоры определены в декартовой системе координат.

Если векторы и тензоры определены в криволинейной системе координат, то необходимо использовать тензорно-векторную форму интерполяционной процедуры, при которой выполняется интерполирование не отдельных компонентов вектора или отдельных компонент тензоров деформаций, искривлений, усилий или моментов, а непосредственно самого вектора перемещения и вышеупомянутых тензоров посредством узловых значений векторов и тензоров.

При реализации трехпольного варианта МКЭ применительно к анализу НДС оболочек тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры предусматривает использование следующих интерполяционных выражений

$$\tilde{\varepsilon} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \tilde{\varepsilon}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{N} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \tilde{N}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{N} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \tilde{N}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{M} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \tilde{M}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{v} = \left\{ \psi \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \tilde{v}_y^L \right\}_{12 \times 1}, \quad (3.4)$$

где $\left\{ \tilde{\varepsilon}_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \tilde{\varepsilon}^i \ \tilde{\varepsilon}^j \ \tilde{\varepsilon}^k \ \tilde{\varepsilon}^l \right\}$; $\left\{ \tilde{N}_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \tilde{N}^i \ \tilde{N}^j \ \tilde{N}^k \ \tilde{N}^l \right\}$ – строки узловых тензоров деформаций и искривлений срединной поверхности; $\left\{ \tilde{M}_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \tilde{M}^i \ \tilde{M}^j \ \tilde{M}^k \ \tilde{M}^l \right\}$ – строки узловых тензоров продольных сил и изгибающих моментов; $\left\{ \tilde{v}_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \tilde{v}^i \ \tilde{v}^j \ \tilde{v}^k \ \tilde{v}^l \ \tilde{v}_{,\xi}^i \ \tilde{v}_{,\xi}^j \ \tilde{v}_{,\xi}^k \ \tilde{v}_{,\xi}^l \ \tilde{v}_{,\eta}^i \ \tilde{v}_{,\eta}^j \ \tilde{v}_{,\eta}^k \ \tilde{v}_{,\eta}^l \right\}$ – строка узловых векторов перемещения и их производных первого порядка.

Тензоры деформаций и искривлений, усилий и моментов, входящих в (3.4), можно представить компонентами диадных произведений соответствующих векторов локальных базисов, например

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= \varepsilon_{11} \vec{a}^{01} \cdot \vec{a}^{01} + \varepsilon_{22} \vec{a}^{02} \cdot \vec{a}^{02} + 2\varepsilon_{12} \vec{a}^{01} \cdot \vec{a}^{02} = \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \tilde{\aleph} = \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} \\
\tilde{N} &= N^{11} \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0 + N^{22} \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 + N^{12} \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 = \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ N^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \tilde{M} = \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ M^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} \quad (3.5) \\
\left\{ \tilde{\varepsilon}_y \right\}_{4 \times 1} &= \left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{\aleph}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12} \left\{ \aleph_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{N}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{M}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1},
\end{aligned}$$

где

$$\left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} = \begin{bmatrix} \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^i \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^i \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^j \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^j \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^k \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^k \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^l \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^l \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^l & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица $\left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12}$ имеет вид $\left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12}$, но ее компоненты, отличные от нуля, являются диадными произведениями контравариантных векторов базисов узловых точек;

$$\begin{aligned}
\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ \varepsilon_{11}^i \varepsilon_{22}^i 2\varepsilon_{12}^i \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{22}^j 2\varepsilon_{12}^j \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{22}^k 2\varepsilon_{12}^k \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^l \varepsilon_{22}^l 2\varepsilon_{12}^l \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ \aleph_{\alpha\beta y} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ \aleph_{11}^i \aleph_{22}^i 2\aleph_{12}^i \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^j \aleph_{22}^j 2\aleph_{12}^j \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^k \aleph_{22}^k 2\aleph_{12}^k \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^l \aleph_{22}^l 2\aleph_{12}^l \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ N^{11i} N^{22i} N^{12i} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11j} N^{22j} N^{12j} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11k} N^{22k} N^{12k} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11l} N^{22l} N^{12l} \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ M^{11i} M^{22i} M^{12i} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11j} M^{22j} M^{12j} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11k} M^{22k} M^{12k} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11l} M^{22l} M^{12l} \right\}_{1 \times 3} \right\}
\end{aligned}$$

Векторы базисов внутренних и узловых точек конечного элемента выражаются через орты декартовой системы координат посредством следующих матричных соотношений

$$\left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[m^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}, \left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1} = \left[m^{0p} \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}, \quad (3.6)$$

где $\left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right\}_{1 \times 3}$, $\left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{i} \vec{j} \vec{k} \right\}_{1 \times 3}$, $\left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{a}_1^{0p} \vec{a}_2^{0p} \vec{a}^{0p} \right\}_{1 \times 3}$. Верхний индекс p обозначает конкретный из узлов КЭ i, j, k, l .

В результате обращения первого соотношения (3.6) и подстановки его во второе соотношение (3.6) базисные векторы узлов конечного элемента выражаются через базисные векторы его внутренней точки

$$\left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1} = \left[m^{0p} \right]_{3 \times 3} \left[m^0 \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[\omega^p \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) диадные произведения узлов КЭ также могут быть выражены через диадные произведения точки, принадлежащей внутренней области конечного элемента

$$\left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^{0p} \right\} = \left[b^{0p} \right] \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}, \quad \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta p} \right\} = \left[d^{0p} \right] \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\text{где } \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^{0p} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \left(\vec{a}_1^{0p} \vec{a}_1^{0p} \right) \left(\vec{a}_2^{0p} \vec{a}_2^{0p} \right) \left(\vec{a}_1^{0p} \vec{a}_2^{0p} \right) \right\}, \quad \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta p} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \left(\vec{a}^{01} \vec{a}^{01} \right) \left(\vec{a}^{02} \vec{a}^{02} \right) \left(\vec{a}^{01} \vec{a}^{02} \right) \right\}$$

Принимая во внимание (3.8), матрица $\left[\vec{L} \right]$ примет вид

$$\left[\vec{L} \right]_{4 \times 12} = \begin{bmatrix} \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0i} \right]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0j} \right]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0k} \right]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0l} \right]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

При учете (3.5)–(3.9) соотношения (3.4) могут быть представлены выражениями

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \kappa_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ \kappa_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ N^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ M^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.10) можно получить необходимые интерполяционные зависимости для компонент тензоров деформаций, искривлений, продольных сил и изгибающих моментов, например

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \kappa_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Получение интерполяционных соотношений для компонент вектора перемещения в соответствие с векторной формой интерполяционной процедуры изложено [24, 25].

На основе интерполяционных зависимостей (3.11) формируются аппроксимирующие выражения

$$\{\varepsilon \mathbb{N}\} = \begin{bmatrix} H_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}_y\} \\ 6 \times 24 \end{bmatrix}, \{NM\} = \begin{bmatrix} H_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{NM_y\} \\ 6 \times 24 \end{bmatrix}, \{v\} = \begin{bmatrix} A_2 \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_y\} \\ 3 \times 36 \end{bmatrix}, \{\xi \mathbb{N}^k\} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_y\} \\ 6 \times 36 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Анализируя (3.11), можно констатировать, что отдельная компонента любого тензора (деформаций, искривлений, усилий и моментов) в точке, принадлежащей внутренней области используемого элемента дискретизации, зависит от узловых значений всех его компонент, то есть от полного набора узловых варьируемых параметров соответствующего тензора.

При общепринятой форме интерполяционной процедуры (3.2) отдельная компонента тензора, например, компонента тензора искривлений $\mathbb{N}_{11}$ является функцией узловых значений только этой же самой компоненты, т.е. $\mathbb{N}_{11} = f(\mathbb{N}_{11}^i, \mathbb{N}_{11}^j, \mathbb{N}_{11}^k, \mathbb{N}_{11}^l)$ и не зависит от узловых значений остальных компонент данного тензора $\mathbb{N}_{22}^p, \mathbb{N}_{12}^p$.

Также особенностью новых интерполяционных зависимостей (3.11) является присутствие в них параметров применяемой в конкретном расчете оболочки криволинейной системы координат, что не наблюдается в традиционных интерполяционных соотношениях (3.2).

4. Матрица жесткости конечного элемента

Для получения матрицы жесткости конечного элемента используется функционал [24, 25], основанный на равенстве работ заданных сил на перемещениях и внутренних усилий на деформациях и искривлениях, дополненный условием равенства нулю работы на деформациях и искривлениях невязки, определяемой как разность между внутренними усилиями, вводимыми по определению, и внутренними усилиями, выражаемыми через деформации и искривления

$$\Pi_L = \int_F \{NM\} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}\} \\ 1 \times 6 \end{bmatrix} dF - \int_F \{ \begin{bmatrix} \varepsilon \mathbb{N} \\ 1 \times 6 \end{bmatrix} \{NM\} - [C] \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}^k\} \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \} dF - \int_F \{U\} \begin{bmatrix} \{P\} \\ 1 \times 3 \end{bmatrix} dF, \quad (4.1)$$

где $\{NM\} = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{22} & N^{12} & M^{11} & M^{22} & M^{12} \end{bmatrix}$, $\{\varepsilon \mathbb{N}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12} & \mathbb{N}_{11} & \mathbb{N}_{22} & 2\mathbb{N}_{12} \end{bmatrix}$ – матрицы-строки продольных сил и изгибающих моментов, а также деформационных параметров в точке срединной поверхности оболочки; $\{\varepsilon \mathbb{N}^k\}$ – столбец, элементы которого определяются соотношениями Коши; $\{U\}^T = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix}$; $\{P\}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ – матрицы-строки компонент вектора перемещения и вектора внешней поверхностной нагрузки.

Входящая в (4.1) матрица $[C]$ определяет связь между столбцами $\{NM\}$ и $\{\varepsilon \mathbb{N}\}$

$$\{NM\} = \begin{bmatrix} C \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}\} \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

При учете аппроксимирующих выражений для кинематических $\{U\}$, $\{\varepsilon \mathbb{N}\}$ и силовых $\{NM\}$ искомым неизвестным в зависимости от используемого варианта аппро-

ксимации (3.2) или (3.11) функционал (4.1) с учетом (4.2) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \prod_L = & \left\{ NM_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} - \left\{ \varepsilon N_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} + \\ & + \left\{ \varepsilon N_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B_\gamma \right] dF \left[P_R \right] \left\{ v_y^G \right\} - \left\{ v_y^G \right\} \left[P_R \right] \int_F \left[A_\gamma \right] \left\{ P \right\} dF, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где матрицы $\left[H_\gamma \right]$, $\left[B_\gamma \right]$ и $\left[A_\gamma \right]$ komponуются на основе интерполяционных выражений (3.3) или (3.12), нижний индекс γ принимает значения 1, 2, причем $\gamma=1$ соответствует использованию общепринятой покомпонентной интерполяционной процедуре (3.2), а $\gamma=2$ соответствует применению разработанной тензорно-векторной форме интерполяции искомых величин (3.11) в трехпольном варианте МКЭ.

Входящая в (4.3) матрица $\left[P_R \right]$ определяет связь между столбцами кинематических узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат.

Осуществляя минимизацию (4.3) по кинематическим $\left\{ v_y^G \right\}^T$, $\left\{ \varepsilon N_y \right\}^T$ и силовым $\left\{ NM_y \right\}^T$ искомым неизвестным, можно записать систему матричных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \prod_L}{\partial \left\{ v_y^G \right\}^T} &= \left[P_R \right] \int_F \left[B \right] \left[C \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ \varepsilon N_y \right\} - \left[P_R \right] \int_F \left[A_\gamma \right] \left\{ P \right\} dF = 0 \\ \frac{\partial \prod_L}{\partial \left\{ \varepsilon N_y \right\}^T} &= \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B \right] dF \left[P_R \right] \left\{ v_y^G \right\} - \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} = 0 \\ \frac{\partial \prod_L}{\partial \left\{ NM_y \right\}^T} &= \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} - \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ \varepsilon N_y \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в более компактном виде

$$\begin{aligned} \left[S \right] \left\{ \varepsilon N_y \right\} - \left\{ f \right\} &= 0 \\ \left[S \right] \left\{ v_y^G \right\} - \left[G \right] \left\{ NM_y \right\} &= 0 \\ \left[W \right] \left\{ NM_y \right\} - \left[G \right] \left\{ \varepsilon N_y \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\text{где } \left[S \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B \right] dF \left[P_R \right], \left[G \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF, \left[W \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF$$

Выражая из третьего и второго уравнений (4.5) столбцы $\left\{ \varepsilon N_y \right\}$ и $\left\{ NM_y \right\}$, можно получить следующие матричные зависимости

$$\left\{ \varepsilon N_y \right\}_{24 \times 1} = \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left\{ NM_y \right\}_{24 \times 1}, \left\{ NM_y \right\}_{24 \times 1} = \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 24 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1} \quad (4.6)$$

$$\left\{ \varepsilon N_y \right\}_{24 \times 1} = \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 24 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1}$$

Осуществляя подстановку (4.6) в первое уравнение (4.5), можно записать следующее матричное выражение

$$\left[K \right]_{36 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1} = \left\{ f \right\}_{36 \times 1}, \quad (4.7)$$

где $\left[K \right] = \left[S \right]_{36 \times 36}^T \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 24 \times 36}$ – искомая матрица жесткости размером 36×36 конечного элемента, используемого для построения дискретной модели оболочки.

Глобальная матрица жесткости всей исследуемой оболочки, представляющая собой матрицу системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), компонуется из отдельных матриц жесткостей $\left[K \right]$ посредством использования матрицы индексов [5].

Полученные в результате решения методом Гаусса глобальной СЛАУ столбцы $\left\{ v_y^G \right\}$ посредством (4.6), позволяют вычислять требуемые для анализа НДС оболочки столбцы продольных сил и изгибающих моментов $\left\{ NM_y \right\}$, а также столбцы деформаций и искривлений $\left\{ \varepsilon N_y \right\}$ в любой интересующей исследователя узловой точке рассчитываемой конструкции.

5. Вычислительные эксперименты

Эксперимент 1. В качестве тестовой задачи был выполнен расчет двухшарнирной арки эллиптического очертания (рис. 1), загруженной линейной нагрузкой интенсивности $q = 0.1 \text{ Н/см}$.

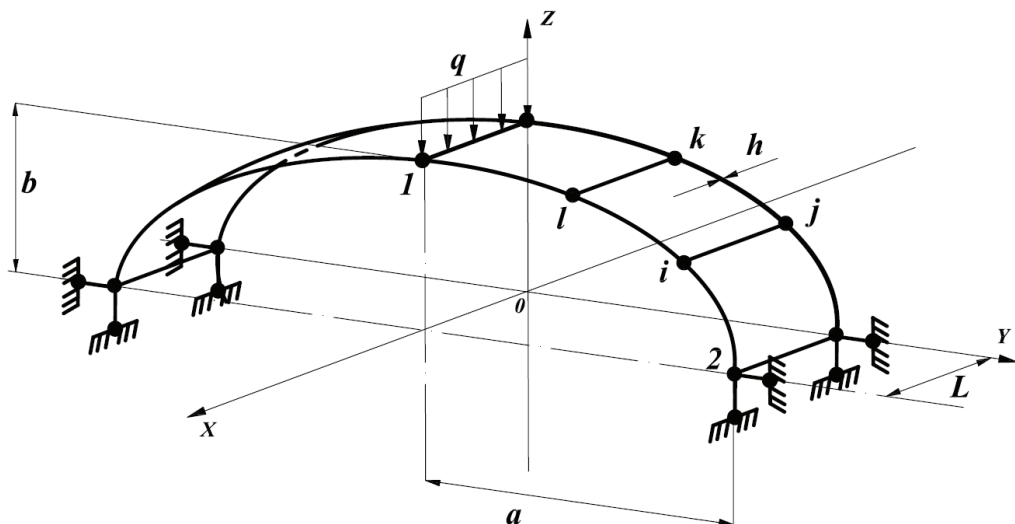


Рис. 1. Расчетная схема эллиптического кольца при шарнирном опирании

Таблица 1. Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов и продольных сил в точке приложения нагрузки и в точке шарнирного опирания

Координаты точек, $y, m; \theta, \text{рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, \text{ Н·см};$ $N, \text{ Н}$	Способ интерполяции										Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{mid}$ из условия равновесия
		Общепринятый					Тензорно-векторный					
		Сетка узлов										
		121×2	151×2	181×2	211×2	241×2	271×2	301×2	331×2	361×2	391×2	
$y = 0.0; \theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.4	971.4	971.4	971.4	971.3	971.3	971.3	971.4	971.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.75	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	—
	M^{22}	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	—
	σ_{xx}^{out}	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	—
$y = 0.5; \theta = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	0.319	−0.405	−0.703	−0.840	0.949	−0.091	−0.524	−0.728	—	—	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−2.151	−1.508	−1.247	−1.129	−2.834	−1.849	−1.441	−1.250	—	—	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{mid}$	−0.974	−0.983	−0.988	−0.992	−1.035	−1.013	−1.005	−1.002	−1.000	—	−1.000
	M^{22}	−0.002	−0.001	−0.001	−0.0003	−0.003	−0.0016	−0.001	−0.0005	0.000	—	0.000
	N^{22}	−0.097	−0.098	−0.099	−0.099	−0.1035	−0.101	−0.100	−0.100	−0.100	—	−0.100
	σ_{xx}^{in}	1.825	0.612	0.157	−0.041	2.135	0.993	0.475	0.214	—	—	—
	σ_{xx}^{out}	0.540	0.061	−0.110	−0.183	0.664	0.258	0.067	−0.039	—	—	—

По условиям симметрии рассматривалась половина арки. Использовались следующие исходные данные: $L = 1$ см; $a = 50$ см; $b = 10$ см; $h = 0.1$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте искомые величины аппроксимировались как составляющие скалярных полей; во втором варианте интерполяционные функции применялись к векторным и тензорным полям и только после координатных преобразований определялись аппроксимирующие выражения искомых величин. Результаты повариантных расчетов приведены в табл. 1, где в зависимости от степени сгущения сетки дискретизации даются значения нормальных напряжений на внутренней σ^{in} , наружной σ^{out} и срединной σ^{midl} поверхностях оболочки, а также моментов и продольных сил в точках арки. В правой колонке табл. 1 даются значения M_{Φ}^{22} и N_{Φ}^{22} , определенные соотношениями

$$N_{\Phi}^{22} = -q \cdot L = -0.1 \cdot 1 = -0.100 \text{ Н}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{midl} = -N_{\Phi}^{22} / (L \cdot h) = -0.100 \text{ Н} / (1 \text{ см} \cdot 0.1 \text{ см}) = -1.000 \text{ Н/см}^2$$

$$M_{\Phi}^{22} = 0.000 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Анализ данных табл. 1 показывает сходимость вычислительного процесса при использовании трехпольного конечного элемента и адекватное совпадение параметров НДС со значениями, полученными аналитическим путем. Сравнение повариантных значений нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов показывает их примерное совпадение.

При замене шарнирной опоры на пружинную (рис. 2) оболочка получает возможность смещаться в вертикальном направлении при неизменном НДС.

В табл. 2 приведены значения параметров НДС оболочки при различных смещениях арки по вертикали. При выполнении повариантных расчетов была использована сетка дискретизации 211×2 .

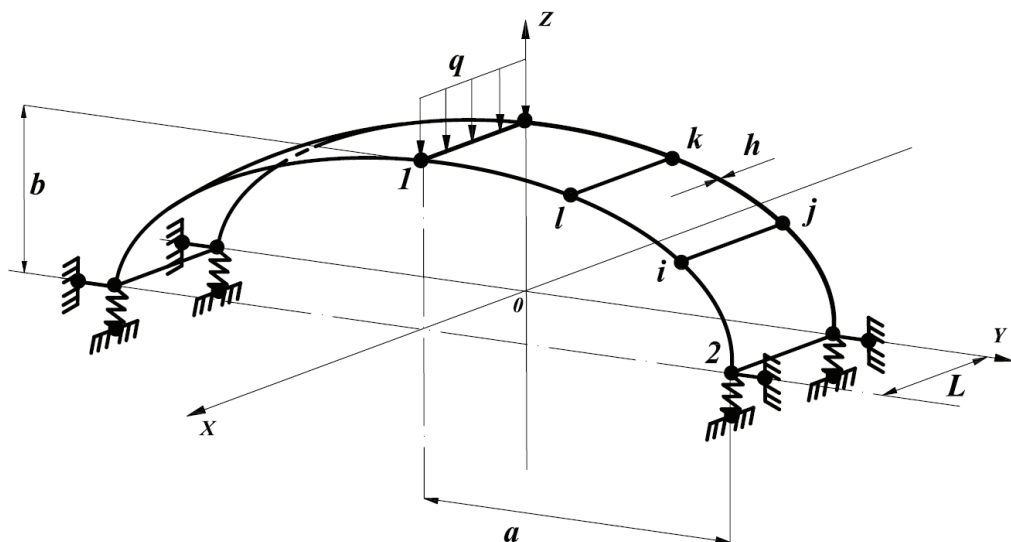


Рис. 2. Расчетная схема эллиптического кольца при пружинном опирании

Таблица 2. Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов и продольных сил в точке приложения нагрузки и в точке пружинного опирания

Координаты точек, $y, \text{ м}; \theta, \text{ рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{см};$ $N, \text{ Н}$	Величина жесткого смещения, м					Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия	
		0.00	0.05	0.10	0.25	0.50		0.75
Общепринятый способ интерполяции								
$y = 0.0;$ $\theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.2	971.1	970.6	969.8	969.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—977.75	—977.6	—977.4	—976.9	—976.1	—975.3	—
	M^{22}	—1.624	—1.624	—1.624	—1.623	—1.622	—1.620	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.35	291.25	291.1	290.9	—
	σ_{xx}^{out}	—293.3	—293.3	—293.2	—293.0	—292.7	—292.4	—
$y = 0.5;$ $\theta=\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	—0.840	—0.246	0.346	2.107	4.994	7.825	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—1.129	—0.770	—0.414	0.648	2.390	4.098	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	—0.992	—1.046	—1.100	—1.261	—1.526	—1.785	—1.000
	M^{22}	—0.000	0.002	0.004	0.011	0.023	0.034	0.000
	N^{22}	—0.099	—0.105	—0.110	—0.126	—0.153	—0.178	—0.100
	σ_{xx}^{in}	—0.041	—124.2	—247.9	—615.9	—1219.5	—1811.3	—
	σ_{xx}^{out}	—0.183	—58.45	—116.5	—289.2	—572.4	—850.1	—

Таблица 2. Окончание

Координаты точек, $y, \text{ м}; \theta, \text{ рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{см};$ $N, \text{ Н}$	Величина жесткого смещения, м						Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия
		Тензорно-векторный способ интерполяции						
		0.00	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	
$y = 0.0;$ $\theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.4	971.4	971.4	971.3	971.3	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	—
	M^{22}	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	—
	σ_{xx}^{out}	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	—
$y = 0.5;$ $\theta=\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	−0.728	−0.728	−0.728	−0.728	−0.728	−0.728	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−1.250	−1.250	−1.250	−1.250	−1.250	−1.250	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	−1.002	−1.002	−1.002	−1.002	−1.002	−1.002	−1.000
	M^{22}	−0.001	−0.001	−0.001	−0.001	−0.001	−0.001	0.000
	N^{22}	−0.100	−0.100	−0.100	−0.100	−0.100	−0.100	−0.100
	σ_{xx}^{in}	0.214	0.214	0.214	0.214	0.214	0.214	—
	σ_{xx}^{out}	−0.039	−0.039	−0.039	−0.039	−0.039	−0.039	−

Анализ данных табл. 2 показывает, что в первом варианте расчета параметры НДС оболочки в точке пружинного опирания претерпевают весьма значительные изменения, которые возрастают по мере увеличения смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Так, при смещении оболочки на величину 0.10 м напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ уже меняют свой знак, а σ_{xx} возрастают на несколько порядков. На основе этого можно отметить, что использование общепринятой в МКЭ интерполяции компонент вектора перемещения, компонент тензоров усилий и моментов, деформаций и искривлений не позволяет учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. И напротив, использование разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в трехпольной формулировке МКЭ позволяет в полной мере учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Подтверждением этого факта является анализ значений параметров НДС оболочки, полученных во втором варианте расчета. Анализ данных, представленных в правой половине таблицы 2 показывает, что численные значения нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов остаются неизменными даже при существенной величине жестких смещений, что доказывает несомненные преимущества разработанного трехпольного конечного элемента с тензорно-векторной формой интерполяционной процедуры.

Эксперимент 2. Определено НДС эллиптической цилиндрической оболочки, имеющей первоначально шарнирное опирание по торцам (рис. 3).

Вдоль верхней образующей была приложена линейно распределенная нагрузка интенсивности $q = 10$ Н/см. Геометрические размеры оболочки были приняты равными: $L = 2.0$ м; толщина стенки $h = 0.015$ м; параметры эллипса поперечного сечения: $b = 1.0$ м; $c = 0.3$ м. Физические характеристики: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$.

Как и в эксперименте 1 определение НДС оболочки выполнялось при двух вариантах аппроксимации искомых величин. Результаты повариантных расчетов при шарнирном способе опирания оболочки приведены в табл. 3, в которой даются численные значения физических напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} на внутренней и наружной поверхностях оболочки в точках A, B, C и D (рис. 3) при различных размерах сетки дис-

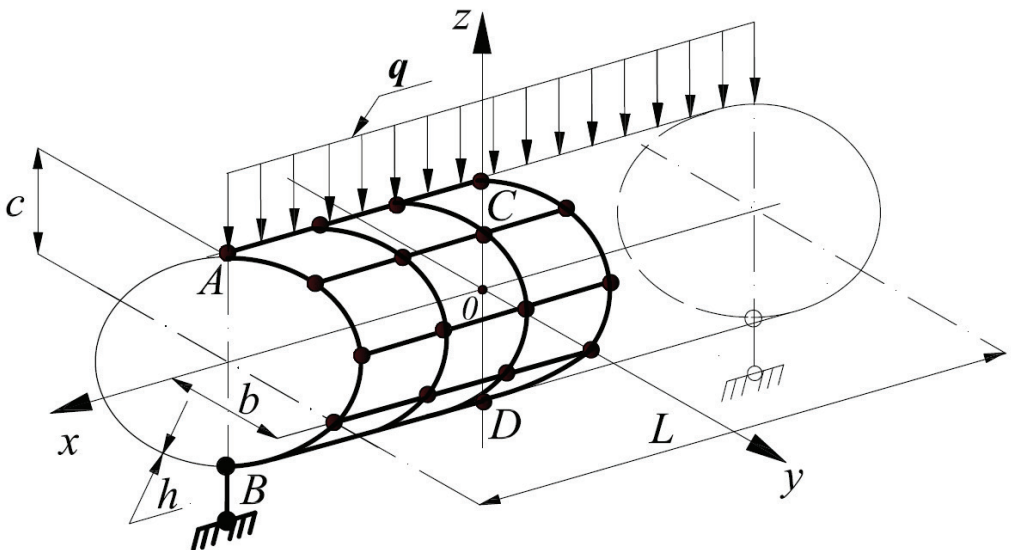


Рис. 3. Расчетная схема эллиптического цилиндра при шарнирном опирании

Таблица 3. Значения нормальных напряжений в точках при шарнирном опирании

Координаты точек, $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения $\sigma, \text{МПа}$	Варианты расчета							
		Первый				Второй			
		Сетка узлов							
		41×41	46×46	51×51	56×56	41×41	46×46	51×51	56×56
т. $A, x = 1.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	12.36	12.55	12.63	12.64	12.67	12.67	12.67	12.66
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-15.55	-15.53	-15.75	-15.73	-15.74	-15.75	-15.75	-15.76
т. $B, x = 1.00; \theta = \pi$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	49.63	51.44	56.33	57.19	53.56	55.02	56.33	56.33
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-65.20	-67.53	-73.47	-74.32	-71.06	-72.65	-74.08	-74.08
	σ_{xx}^{in}	-5.101	-5.183	-5.552	-5.528	-5.574	-5.579	-5.584	-5.584
	σ_{xx}^{out}	5.109	5.170	5.549	5.523	5.572	5.578	5.584	5.584
т. $C, x = 0.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	13.99	14.05	14.22	14.22	14.23	14.23	14.23	14.24
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-14.15	-14.22	-14.38	-14.38	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40
	σ_{xx}^{in}	4.286	4.299	4.350	4.349	4.357	4.357	4.357	4.358
	σ_{xx}^{out}	-4.110	-4.100	-4.177	-4.170	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188
т. $D, x = 0.00; \theta = \pi$	σ_{xx}^{in}	3.840	3.891	4.098	4.079	4.111	4.111	4.111	4.111
	σ_{xx}^{out}	-0.690	-0.705	-0.663	-0.664	-0.619	-0.619	-0.619	-0.618

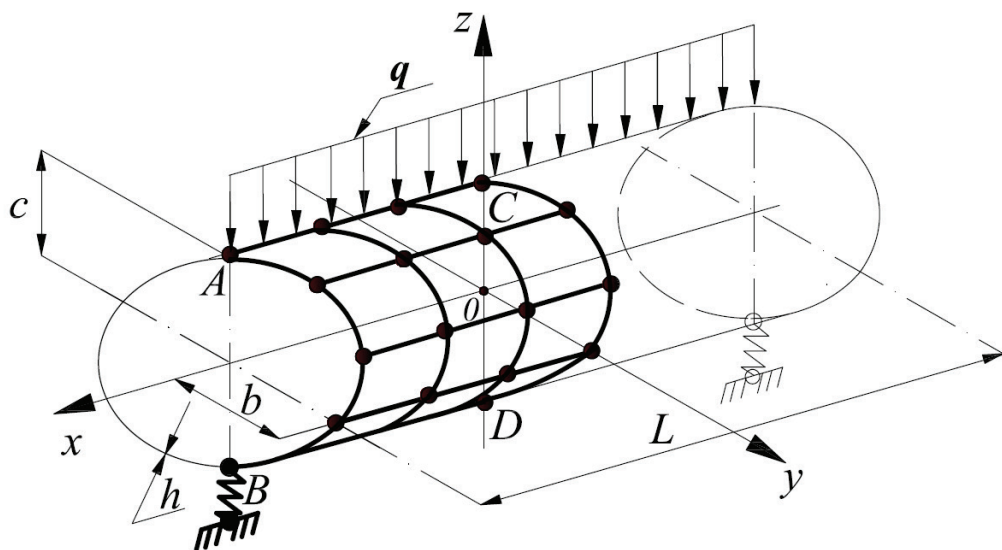


Рис. 4. Расчетная схема эллиптического цилиндра при пружинном опирании

кретизации $\frac{1}{4}$ части эллиптического цилиндра (была рассчитана только четвертая часть оболочки вследствие симметрии расчетной схемы).

Анализ данных, приведенных в табл. 3, показывает, что при использовании обоих вариантов аппроксимации искомых величин наблюдается сходимость вычислительного процесса, но во втором варианте аппроксимации искомых величин сходимость выше. Значения параметров НДС в обоих вариантах весьма близки между собой.

При замене шарнирных опор оболочки на пружинные при действии той же нагрузки она получает возможность смещаться по вертикали как твердое тело (рис. 4).

Результаты определения НДС оболочки при фиксированной сетке узлов 51×51 и различных смещениях оболочки как твердого тела приведены в табл. 4.

Как следует из анализа данных табл. 4, в первом варианте расчета наблюдается существенное изменение параметров НДС, причем фиксируемые изменения пропорциональны величине жесткого смещения оболочки в вертикальном направлении. Так, например, σ_{xx}^{in} в точке *B* уменьшились в 4.3 раза, а $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ — в 3.2 раза.

Для наглядности полученных вычислений на рис. 5, 6 представлены повариантные графические зависимости изменения значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в точке *B* в зависимости от величины жесткого вертикального смещения.

На графиках отчетливо прослеживается тенденция к увеличению погрешности вычисления напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в первом варианте расчета по мере увеличения жесткого вертикального смещения оболочки. Во втором варианте расчета параметры НДС остаются неизменными, чему свидетельствуют строго горизонтальные графики $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} .

Из анализа данных табл. 4 видно, что во втором варианте расчета параметры НДС оставались абсолютно неизменными при любом значении величины вертикального жесткого смещения, что приводит к выводу о том, что разработанная тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искомых величин в трехпольном варианте МКЭ позволяет полностью учитывать смещения исследуемых оболочек как абсолютно твердых тел.

Таблица 4. Значения нормальных напряжений в точках при пружинном опирании

Координаты точек, x, м; θ , рад.	Напряжения σ , МПа	Величина жесткого смещения в вертикальном направлении, м					
		0.00	0.10	0.25	0.50	1.0	
Первый вариант							
т. A, $x = 1.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta 0}^{jn}$	12.63	10.31	8.312	6.568	5.035	
	$\sigma_{\theta 0}^{out}$	-15.75	-14.41	-13.24	-12.23	-11.34	
т. B, $x = 1.00; \theta = \pi$	$\sigma_{\theta 0}^{jn}$	56.33	45.80	36.72	28.79	21.83	
	$\sigma_{\theta 0}^{out}$	-73.47	-58.06	-44.76	-33.16	-22.96	
	σ_{xx}^{jn}	-5.552	-4.251	-3.128	-2.149	-1.288	
	σ_{xx}^{out}	5.549	4.328	3.273	2.353	1.544	
т. C, $x = 0.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta 0}^{jn}$	14.22	12.34	10.71	9.287	8.039	
	$\sigma_{\theta 0}^{out}$	-14.38	-12.50	-10.87	-9.447	-8.198	
	σ_{xx}^{jn}	4.35	3.953	3.609	3.310	3.046	
	σ_{xx}^{out}	-4.177	-3.253	-2.454	-1.758	-1.146	
т. D, $x = 0.00; \theta = \pi$	σ_{xx}^{jn}	4.098	3.571	3.117	2.721	2.372	
	σ_{xx}^{out}	-0.663	-1.432	-2.095	-2.6740	-3.183	

Таблица 4. Окончание

Координаты точек, $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения $\sigma, \text{МПа}$	Величина жесткого смещения в вертикальном направлении, m				
		0.00	0.10	0.25	0.50	1.0
Второй вариант						
т. $A, x = 1.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	12.66	12.66	12.66	12.66	12.66
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-15.76	-15.76	-15.76	-15.76	-15.76
т. $B, x = 1.00; \theta = \pi$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	56.33	56.33	56.33	56.33	56.33
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-74.08	-74.08	-74.08	-74.08	-74.08
	σ_{xx}^{in}	-5.584	-5.584	-5.584	-5.584	-5.584
	σ_{xx}^{out}	5.584	5.584	5.584	5.584	5.584
т. $C, x = 0.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	4.358	4.358	4.358	4.358	4.358
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188
	σ_{xx}^{in}	14.24	14.24	14.24	14.24	14.24
	σ_{xx}^{out}	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40
т. $D, x = 0.00; \theta = \pi$	σ_{xx}^{in}	4.111	4.111	4.111	4.111	4.111
	σ_{xx}^{out}	-0.618	-0.618	-0.618	-0.618	-0.618

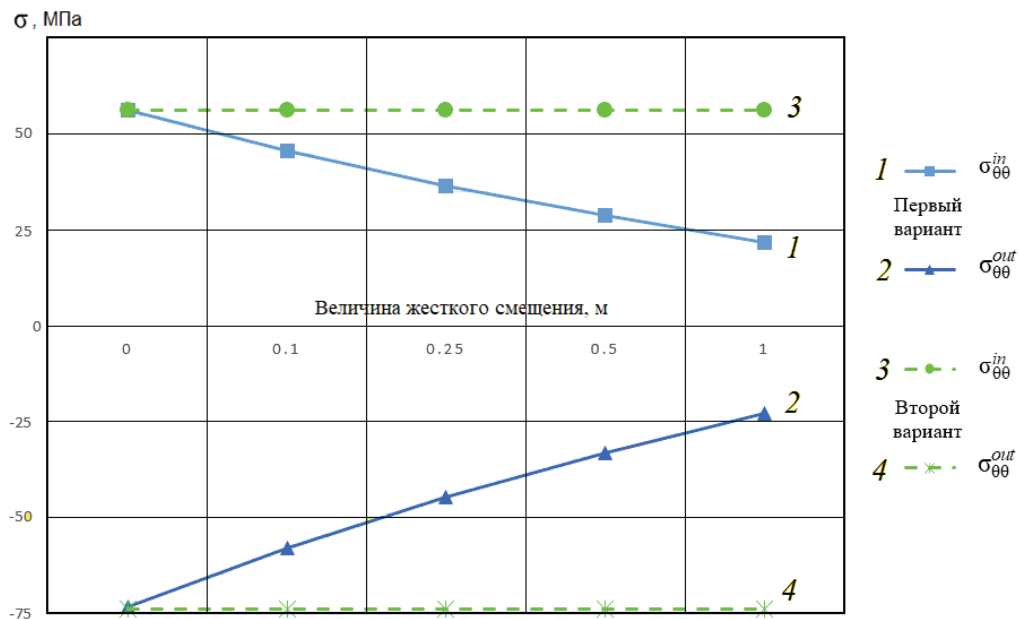


Рис. 5. Графики значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в точке B

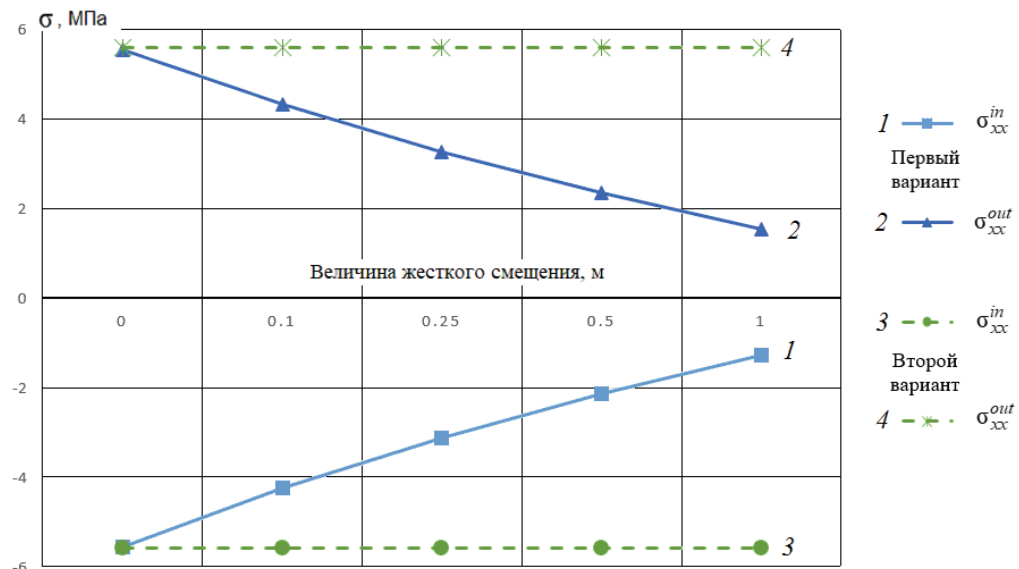


Рис. 6. Графики значений нормальных напряжений σ_{xx} в точке B

Заключение

Разработан векторно-тензорный способ интерполяционной процедуры для трехпольного варианта МКЭ, позволяющий выразить компоненты силовых (продольных сил и изгибающих моментов) и кинематических (деформаций и искривлений срединной поверхности) искомых неизвестных через полный набор узловых силовых или кинематических параметров.

Выполненные численные эксперименты по расчету оболочек с эллиптическим поперечным сечением, имеющих возможность под действием заданной нагрузки смещаться как абсолютно твердые тела, показали, что применение разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры позволяет корректным образом учитывать жесткие смещения оболочек и вычислять искомые параметры НДС без какой-либо погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилев В.В. Теория тонких оболочек. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
2. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. Строительная механика ракет. М.: Высшая школа, 1984. 391 с.
3. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
4. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Булычев Л.И. и др. Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
5. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
6. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Знание, 1988. 284 с.
7. Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
8. Schöllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells // Numer. Methods in Engng. 2021. № 122(5). P. 1217–1238.
9. Yeongbin Ko, Phill-Seung Lee, Klaus-Jürgen Bathe. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Comput.&Struct. 2017. V. 192. P. 34–49.
10. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. of Math. 2021. № 42(9). P. 2263–2271.
11. Nguyen Nhung, Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. // ZAMP. Z. Angew. Math.&Phys. 2016. V. 67. № 9. P. 35/1–35/24.
12. Gao L., Wang C., Liu Z. et al. Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method // Chinese J. of Aeronautics. 2017. V. 30. № 4. P. 1417–1426.
13. Jin He, Jiaxi Zhao, Chenbo Yin. Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations // Int. J. of Solids & Struct. 2020. V. 202. № 1. P. 660–671.
14. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Ключков Ю.В. и др. Конечно-элементный алгоритм расчета эллипсоидальной оболочки при учете смещения как жесткого целого // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 251–262.
15. Бакулин В.Н. Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 148–152.
16. Бакулин В.Н. Модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 112–122.
17. Бакулин В.Н. Эффективная модель несущих слоев для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических нерегулярных оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 82–92.
18. Бакулин В.Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 89–105.
19. Бакулин В.Н. Блочный-послойный подход для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 383–395.

20. Бакулин В.Н. Модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 122–132.
21. Бакулин В.Н. Уточненная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 3. С. 272–277.
22. Бакулин В.Н. Тестирование конечно-элементной модели, предназначенной для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых нерегулярных оболочек // Матем. моделир. 2009. Т. 21. № 8. С. 121–128.
23. Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S. et al. Mixed finite-element method in V. I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Mag. of Civil Engng. 2019. № 5(89). P. 79–93.
24. Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A. et al. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Mag. of Civil Engng. 2023. № 4(120). P. 12003.
25. Клочков Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П. и др. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строит. мех. инж. констр. и сооруж. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72.
26. Magisano D., Liang K., Garcea G. et al. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // Int. J. for Numer. Meth. in Engng. 2018. № 113(4). P. 634–655.
27. Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S. et al. A C1 Virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // SIAM J. Numer. Anal. 2016. V. 54. № 1. P. 34–56.
28. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. et al. A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2016. V. 306. P. 216–251.
29. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
30. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
31. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A. et al. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii J. of Math. 2020. № 41 (3). P. 373–381.
32. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В. и др. Учет смещения как твердого тела в алгоритме МКЭ при расчете оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 23–38.

Three-Field FEM in Shell Calculations with Options for Interpolation of the Sought Values

Yu. V. Klochkov^{a, #}, A. P. Nikolaev^{a, ##}, V. A. Pshenichkina^{b, ###}, O. V. Vakhnina^{a, ####},
A. S. Andreev^{a, #####}, M. Yu. Klochkov^{b, #####}

^aVolgograd State Agricultural University, Volgograd, Russia

^bVolgograd State Technical University, Volgograd, Russia

e-mail: klotchkov@bk.ru[#], anpetr40@yandex.ru^{##}, vap_hm@list.ru^{###},

ovahnina@bk.ru^{####}, aandreev.07.1988@gmail.com^{#####}, m.klo4koff@yandex.ru^{#####}

A three-field finite element of a quadrangular shape of a thin shell with nodal unknowns in the form of: displacements and their first derivatives has been developed; deformations and curvatures of the median surface; forces and moments of the middle surface.

The approximation of the required quantities was carried out in two versions. In the first version, the components of the displacement vector and the components of the strain and curvature tensors, as well as the force and moment tensors, were approximated using traditional shape functions as components of scalar fields. In the second version, tensor quantities were

approximated through the corresponding tensors of nodal points, and only after coordinate transformations based on the relations of the used curvilinear coordinate system were approximating expressions for the components of the corresponding tensors obtained.

Specific examples show the effectiveness of using the second version of approximating expressions in shell calculations.

Keywords: displacement vector, strain tensor, stress tensor, force tensor, curvature tensor, three-field finite element, tensor-vector interpolation

REFERENCES

1. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Shells. St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Pub. House, 2010. 378 p. (in Russian)
2. *Balabukh L.I., Alfutov N.A., Usyukin V.I.* Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Higher School, 1984. 391 p. (in Russian)
3. *Balabukh L.I., Kolesnikov K.S., Zarubin V.S. et al.* Fundamentals of Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Higher School, 1969. 494 p. (in Russian)
4. *Obratsov I.F., Vasiliev V.V., Bulychev L.I. et al.* Structural mechanics of aircraft. Moscow: Mechanical Engineering, 1986. 536 p. (in Russian)
5. *Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya.* Finite Element Method in Calculations of Ship Structures. Leningrad: Shipbuilding, 1974. 342 p. (in Russian)
6. *Rickards R.B.* Finite Element Method in the Theory of Shells and Plates. Riga: Zinatne, 1988. 284 p. (in Russian)
7. *Sekulovich M.* Finite Element Method. Moscow: Stroyizdat, 1993. 664 p. (in Russian)
8. *Schöllhammer D., Fries T.P.* A Higher-order trace finite element method for shells // Numerical Methods in Engineering, 2021, vol. 122, no. 5. P. 1217–1238.
9. *Yeongbin Ko, Phill-Seung Lee, Klaus-Jürgen Bathe.* A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Computers & Structures, 2017, vol. 192, pp. 34–49.
10. *Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M.* Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. of Mathematics, 2021, vol. 42, no 9, pp. 2263–2271.
11. *Nguyen Nhung, Waas Anthony.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // ZAMP. Z. Angew. Math. and Phys, 2016, vol. 67, no. 9, pp. 35/1–35/24.
12. *Gao L., Wang C., Liu Z. et al.* Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method // Chinese Journal of Aeronautics, 2017, vol. 30, no. 4, pp. 1417–1426.
13. *Jin He, Jiaxi Zhao, Chenbo Yin.* Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations // International J. of Solids & Structures, 2020, vol. 202, no. 1, pp. 660–671.
14. *Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. et al.* Finite element algorithm for calculating an ellipsoidal shell taking into account the displacement as a rigid whole // Appl. Math. & Mech., 2022, vol. 86, no. 2, pp. 251–262.
15. *Bakulin V.N.* An effective model for layer-by-layer analysis of three-layer irregular shells of rotation of a cylindrical shape // Reports of the Academy of Sci., 2018, vol. 478, no. 2, pp. 148–152.
16. *Bakulin V.N.* Model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells of rotation of double curvature // Izv. RAS. MTT, 2020, no. 2, pp. 112–122.
17. *Bakulin V.N.* An effective model of load-bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical irregular shells of revolution // Izv. RAS. MTT, 2020, no. 3, pp. 82–92.
18. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of irregular three-layer shells of rotation of non-zero Gaussian curvature // Appl. Math. & Mech., 2021, vol. 85, no. 1, pp. 89–105.
19. *Bakulin V.N.* Block-layer approach for analyzing the stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells of revolution // Appl. Math. & Mech., 2021, vol. 85, no. 3, pp. 383–395.
20. *Bakulin V.N.* Model for analyzing the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts // Izv. RAS. MTT, 2022, no. 1, pp. 122–132.

21. *Bakulin V.N.* Refined model of layer-by-layer analysis of three-layer irregular conical shells // Reports of the Academy of Sciences, 2017, vol. 472, no. 3, pp. 272–277.
22. *Bakulin V.N.* Testing a finite element model designed to study the stress-strain state of layered irregular shells // Math. Modeling, 2009, vol. 21, no. 8, pp. 121–128.
23. *Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S. et al.* Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Magazine of Civil Engineering, 2019, vol. 5, no. 89, pp. 79–93.
24. *Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A. et al.* Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Magazine of Civil Eng., 2023, vol. 4, no. 120, pp. 12003.
25. *Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P. et al.* Quadrangular finite element in a mixed FEM formulation for the calculation of thin shells of rotation // Structural Mechanics of Engineering Structures and Structures, 2023, vol. 19, no. 1, pp. 64–72.
26. *Magisano D., Liang K., Garcea G. et al.* An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International J. for Numerical Methods in Engineering, 2018, vol. 113, no. 4, pp. 634–655.
27. *Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S. et al.* A C1 Virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // SIAM J. Numer. Anal, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 34–56.
28. *Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. et al.* A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2016, vol. 306, pp. 216–251.
29. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Finite Element Method in the Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures. Moscow: Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian)
30. *Skopinsky V.N.* Stresses in Intersecting Shells. Moscow: Fizmatlit, 2008. 400 p. (in Russian)
31. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A. et al.* The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 373–381.
32. *Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. et al.* Taking into account displacement as a rigid body in the FEM algorithm when calculating shells of revolution // Izv. RAS. MTT, 2023, no. 6, pp. 23–38.