

УДК 534.16

ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© 2024 г. А. В. Ильяшенко^{1,*}¹Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: IlyashenkoAV@mgsu.ru

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Анализируются объемные волны в изотропном упругом пространстве, распространяющиеся по линии действия сосредоточенной силовой особенности. Показано, что на линии действия силовой особенности помимо P -волны распространяется также S -волна. Отмечены ошибочные утверждения, обнаруженные в ряде публикаций, об отсутствии S -волн на линии действия силовой особенности.

Ключевые слова: объемная волна, изотропия, силовая особенность, представление Гельмгольца, девиатор деформаций

DOI: 10.31857/S0032823524050069 EDN: JPKIGU

1. Введение. Ниже дается краткий обзор исследований по волнам в изотропном упругом пространстве, в которых исследуются объемные акустические волны, появляющиеся на линии действия силовой особенности.

В одной из первых работ по объемным волнам в изотропной упругой среде [1, 2], где анализировались сейсмограммы, вызванные точечным δ -образным (по временной переменной) силовым воздействием, расположенным в изотропном упругом полупространстве, был отмечен феномен появления всплеска на сейсмограмме, характерного по времени прихода для S -волны (рис. 1).

Факт присутствия на сейсмограммах пика, характерного для прихода S -волны, в дальнейшем неоднократно отмечался как в экспериментальных [3–5], так и в теоретических [6–20] исследованиях волновых процессов, связанных с решением внутренней задачи Лэмба [21], аналогичный эффект наблюдался и при численных исследованиях внутренней задачи Лэмба [22–27]. На рис. 1,б, показана сейсмограмма вертикальной компоненты смещения (в точке на линии действия сосредоточенной силовой особенности), имеющая пик, отвечающий приходу S -волны. Надо отметить, что горизонтальная компонента смещений на линии действия силы нулевая, см. рис. 1,б. В большинстве теоретических исследований [6–9, 16] появление этого пика, объясняется наличием соответствующего полюса в несобственных интегралах, описывающих решение для объемных волн, появляющихся при решении внутренней задачи Лэмба. В этой связи особый интерес представляют работы [28–30], в которых отмечено, что на линии действия силовой особенности, являющейся осью симметрии, поперечные волны не могут возникать, поскольку последние из-за присутствия касательных компонент напряжений и деформаций необходимо кососимметричны в окрестности линии действия силы.

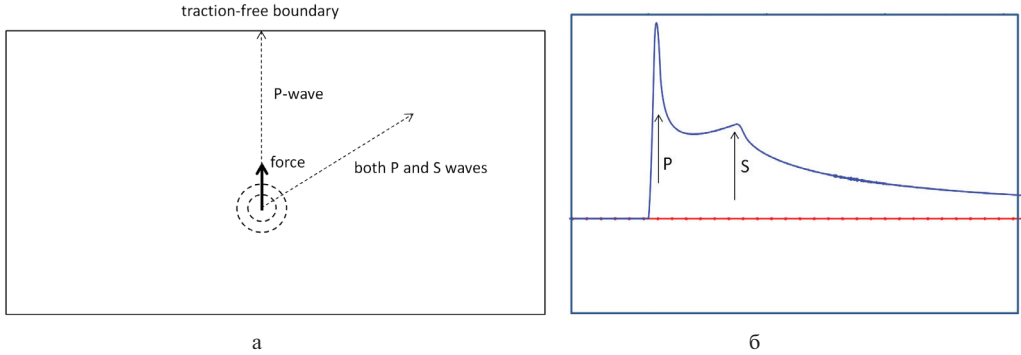


Рис. 1. а) Схема внутренней задачи Лэмба для вертикального силового воздействия в виде временного δ -образного импульса; б) Сейсмограмма на линии действия силовой особенности [25], показывающая наличие пика на сейсмограмме вертикальной компоненты перемещений, отвечающего приходу S волны

Ниже показано, что во внутренней задаче Лэмба для изотропного упругого полупространства или полуплоскости, см. рис. 1,а, на оси симметрии, определяемой линией действия силовой особенности, (i) S-волна существует; (ii) эта волна не содержит касательных компонент тензора напряжений, нормальных к оси симметрии; и (iii) горизонтальные компоненты смещения равны нулю. Решение рассматриваемой задачи связано с представлением Гельмгольца для поля смещений [31] и разложением тензорных полей на девиаторные и шаровые тензоры [32].

2. Уравнения движения

Линейные уравнения движения для изотропной упругой среды могут быть записаны в виде [31]

$$\left(c_p^2 \nabla_x \operatorname{div}_x - c_s^2 \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x - \mathbf{I} \partial_t^2\right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}$ — поле смещений, $\mathbf{x}$ — пространственные координаты, t — время, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, c_p и c_s — скорости объемных P- и S-волн соответственно

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

В этих соотношениях ρ — плотность среды, а λ и μ — параметры Ламе, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3)$$

Представление Гельмгольца для поля смещений имеет вид [31]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_x \varphi(\mathbf{x}, t) + \operatorname{rot}_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

где φ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ — векторный потенциал. Подстановка представления (2.4) в уравнения движения (2.1) и исключение из рассмотрения линейных (по пространственным координатам) составляющих, дает [32]

$$\left(c_p^2 \Delta_x - \partial_t^2\right) \nabla_x \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \left(c_s^2 \Delta_x - \partial_t^2\right) \operatorname{rot}_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) показывают, что скалярным потенциалом φ определяется объемная P волна, а векторным потенциалом $\boldsymbol{\psi}$ — объемная S волна [32].

3. Разложение тензорных полей на девиаторный и шаровой тензоры

Инфинитезимальное поле деформаций определяется по полю смещений соотношениями Коши [32]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T) \quad (3.1)$$

Шаровой тензор, определяемый тензором деформаций, представим в виде [32]

$$\theta \mathbf{I} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} = (\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \mathbf{I}, \quad (3.2)$$

где θ – объемная деформация. Аналогичным образом определяется девиатор деформаций $\mathbf{e}$ [32]

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \theta \mathbf{I} \quad (3.3)$$

Подстановка представления Гельмгольца (2.4) в выражение (3.2), дает [33]

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

Таким образом, объемная деформация однозначно определяется скалярным потенциалом, однако, девиатор (3.3) определяется как скалярным, так и векторным потенциалом [33, 34]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \left(\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)^T \right) \quad (3.5)$$

Рассматривая закон Гука для изотропной среды в форме соотношений между девиаторными и шаровыми компонентами [32]

$$p(\mathbf{x}, t) = -K \theta(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{e}(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

где p – давление, $\mathbf{s}$ – девиатор напряжений, а K – объемный модуль,

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (3.7)$$

получим следующие выражения для объемной и девиаторной составляющей тензора напряжений в терминах соответствующих потенциалов [11]

$$p(\mathbf{x}, t) = -K \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mu \left(\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) = \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}}^T \right) \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует, что в динамических задачах возмущение, связанное с девиатором напряжений, может распространяться либо со скоростью P -волны, если выполнены условия

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.10)$$

либо со скоростью S -волны, если

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \neq 0, \quad (3.11)$$

либо часть девиатора может двигаться со скоростью P -волны, а другая со скоростью S -волны, если

$$\mathbf{A}_1(\partial_x, \partial_x)\varphi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_x)\psi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (3.12)$$

4. Динамические поля на линии действия силы

В случае пространственной внутренней задачи Лэмба поле напряжений на линии действия силы представимо в виде [14]

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l} = f(x, t)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + g(x, t)(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (4.1)$$

где l – линия действия силы, $\mathbf{n}$ – единичный вектор, совпадающий с направлением действия силы, $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ – координата вдоль линии действия силы, $f(x, t)$ – функция, описывающая распространение волнового фронта компоненты напряжений σ_{nn} вдоль оси x , $g(x, t)$ – функция, описывающая распространение волнового фронта, связанного с компонентами, ортогональными к σ_{nn} . Заметим, что в силу осевой симметрии, тензор $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l}$ в выбранной системе координат не содержит касательных компонент.

Разложение поля напряжений (4.1) на шаровой и девиаторный тензор дает

$$p(x, t) = -\frac{2g(x, t) + f(x, t)}{3}, \quad \mathbf{s}(x, t) = (f(x, t) - g(x, t))(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (4.2)$$

Последнее выражение для девиатора показывает, что условие $\mathbf{s}(x, t) = 0$ возможно только при выполнении условия

$$\forall x, t: \quad f(x, t) = g(x, t) \quad (4.3)$$

Однако, как показывает анализ аналитических выражений для усилий во внутренней задаче Лэмба от сосредоточенного силового источника [14, 16], условие (4.3) не выполняется ни при каких значениях коэффициента Пуассона $\nu \in (-1; 0.5)$ и ни при каких (временных) профилях рассматриваемой силовой нагрузки. Таким образом, на линии действия силовой особенности, вне зависимости от временного профиля волны, всегда присутствует девиаторная компонента $\mathbf{s}(x, t)$, причем эта девиаторная компонента не связана со сдвигами в горизонтальной плоскости.

Далее, остается заметить, что в фундаментальном решении Стокса для уравнений движения изотропной упругой среды присутствует векторный потенциал [35]

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left(t - \frac{r}{c_s} \right) H \left(t - \frac{r}{c_s} \right) \nabla_x r + \frac{\mathbf{x} - \nabla_x r}{4\pi\rho c_s^2 r} \delta \left(t - \frac{r}{c_s} \right), \quad (4.4)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, H – функция Хэвисайда, δ – функция Дирака. Непосредственная подстановка потенциала (4.4) в соответствующий оператор (3.9), показывает, что $\mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_x)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l} \neq 0$. Таким образом, обеспечивается условие существования S -волны на оси линии действия силы.

Выводы

Показано, что во внутренней задаче Лэмба для изотропного упругого полупространства на оси симметрии, определяемой линией действия силовой особенности, S -волна существует и не содержит касательных компонент тензора напряжений в декартовых координатах, одна из осей которых совпадает с линией действия силы.

Представляется, что полученные результаты могут найти применение, как в аналитических, так и в численных и экспериментальных исследованиях при определении волновых полей на линии действия силовых воздействий. Кроме того, появле-

ние S -волны на линии действия силовой особенности, представляет интерес с точки зрения формирования поверхностных волн и, в частности, волн Рэлея [25, 26], дисперсионных волн Рэлея—Лэмба [34, 36], а так же волн Лява [37, 38].

Благодарность. Работа выполнена за счет гранта 24-49-02002 Российского Научного Фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nakano H.* On Rayleigh waves // Japan J. Astron.&Geophys. 1925. V. 2. P. 233–326.
2. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // Geophys. Mag. 1930. V. 2. P. 189–348.
3. *Fuchs K., Müller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1971. V. 23. P. 417–433.
4. *Kennett B.L.N., Kerry N.J., Woodhouse J.H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1978. V. 52. P. 215–230.
5. *Wang, D. et al.* Ground surface response induced by shallow buried explosions // Earthquake Eng.&Eng. Vib. 2014. V. 13. P. 163–169.
6. *Cagniard L.* Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939.
7. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1949. V. 242. P. 63–100.
8. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. 1955. V. 41. P. 629–639.
9. *Garvin W.W.* Exact transient solution of the buried line source problem // Proc. Roy. Soc. A. 1956. V. 234. P. 528–541.
10. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. P. 1233–1238.
11. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. New York: McGraw-Hill, 1957.
12. *Payton R.G.* Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving line sources // Int. J. Solids Struct. 1968. V. 4. P. 287–300.
13. *Norwood F.R.* Similarity solutions in plane elastodynamics // Int. J. Solids Struct. 1973. V. 9(7). P. 789–803.
14. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // Geophys. J.R. Astron. Soc. 1974. V. 37. P. 99–131.
15. *Payton R.G.* Epicenter motion of a transversely isotropic elastic half-space due to a suddenly applied buried point source // Int. J. Engng. Sci. 1979. V. 17. P. 879–887.
16. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer. 1993.
17. *Williams D.P., Craster R.V.* Cagniard-de Hoop path perturbations with applications to nongeometric wave arrivals // J. Eng. Math. 2000. V. 37. P. 253–272.
18. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // Bull. Seismol. Soc. Am. 2006. V. 96(4A). P. 1344–1351.
19. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U., Kausel E.* Garvin's generalized problem revisited // Soil Dyn. Earthquake Eng. 2013. V. 47. P. 4–15.
20. *Feng X., Zhang H.* Exact closed-form solutions for Lamb's problem // Geophys. J. Int. 2018. V. 214. P. 444–459.
21. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1904. V. 203. P. 1–42.
22. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 87–97.
23. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
24. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // Acoust. Phys. 2011. V. 57. P. 420–426.
25. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
26. *Il'yasov K.K. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // Mech. of Solids. 2016. V. 51. P. 39–45.

27. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comp. Geotech.* 2021. V. 131. Paper 103808.
28. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. P. 235–245.
29. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Ultrasonic beam focusing characteristics of shear-vertical waves for contact-type linear phased array in solid // *Chinese Phys. B.* 2020. V. 29. Paper 034304.
30. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Research on ultrasonic multi-wave focusing and imaging method for linear phased arrays // *Chinese Phys. B.* 2021. V. 30, Paper 074301.
31. *Auld B.A.* Acoustic Fields and Waves in Solids. Malabar (Florida): Krieger Pub., 1990.
32. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin; Heidelberg: Springer., 1973.
33. *Goldstein R.V. et al.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. P. 2021–2031.
34. *Pao Y.-H., Gajewski R.R.* The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids // *Phys. Acoust.* 1977. V. 13. P. 183–265.
35. *Kupradze V.D.* The Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Amsterdam: North-Holland, 1979.
36. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259.
37. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62. P. 749–766.
38. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM.* 2006. V. 70. P. 116–127.

Body Waves Induced by a Concentrated Force

A. V. Ilyashenko^{a,*}

^a*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: IlyashenkoAV@mgsu.ru*

Body waves in an isotropic elastic space propagating along the line of action of a concentrated force singularity are analyzed. It is shown that along the line of action of the force singularity, in addition to the *P*-wave, the *S*-wave also propagates. The erroneous statements found in a number of publications about the absence of *S*-waves on the line of action of the force singularity are noted.

Keywords: body wave, isotropy, force singularity, Helmholtz representation, deviator

REFERENCES

1. *Nakano H.* On Rayleigh waves // *Japan J. Astron. & Geophys.*, 1925, vol. 2, pp. 233–326.
2. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // *Geophys. Mag.*, 1930, vol. 2, pp. 189–348.
3. *Fuchs K., Müller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 1971, vol. 23, pp. 417–433.
4. *Kennett B.L.N., Kerry N.J., Woodhouse J.H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves // *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 1978, vol. 52, pp. 215–230.
5. *Wang, D. et al.* Ground surface response induced by shallow buried explosions // *Earthquake Eng. & Eng. Vib.*, 2014, vol. 13, pp. 163–169.
6. *Cagniard L.* Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939.
7. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 1949, vol. 242, pp. 63–100.
8. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1955, vol. 41, pp. 629–639.
9. *Garvin W.W.* Exact transient solution of the buried line source problem // *Proc. Roy. Soc. A*, 1956, vol. 234, pp. 528–541.
10. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1957, vol. 29, pp. 1233–1238.

11. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
12. *Payton R.G.* Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving line sources // *Int. J. Solids Struct.*, 1968, vol.4, pp. 287–300.
13. *Norwood F.R.* Similarity solutions in plane elastodynamics // *Int. J. Solids Struct.*, 1973, vol. 9(7), pp. 789–803.
14. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 1974, vol. 37, pp. 99–131.
15. *Payton R.G.* Epicenter motion of a transversely isotropic elastic half-space due to a suddenly applied buried point source // *Int. J. Engng. Sci.*, 1979, vol. 17, pp. 879–887.
16. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993.
17. *Williams D.P., Craster R.V.* Cagniard-de Hoop path perturbations with applications to nongeometric wave arrivals // *J. Eng. Math.*, 2000, vol. 37, pp. 253–272.
18. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 2006, vol. 96(4A), pp. 1344–1351.
19. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U., Kausel E.* Garvin's generalized problem revisited // *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 2013, vol. 47, pp. 4–15.
20. *Feng X., Zhang H.* Exact closed-form solutions for Lamb's problem // *Geophys. J. Int.*, 2018, vol. 214, pp. 444–459.
21. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 1904, vol. 203, pp. 1–42.
22. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.*, 2002, vol. 60, pp. 87–97.
23. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, pp. 952–959.
24. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 420–426.
25. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
26. *Ilyasov K.K. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. of Solids*, 2016, vol. 51, pp. 39–45.
27. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comp. Geotech.*, 2021, vol. 131, Paper 103808.
28. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.*, 2019, vol. 65, pp. 235–245.
29. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Ultrasonic beam focusing characteristics of shear-vertical waves for contact-type linear phased array in solid // *Chinese Phys. B*, 2020, vol. 29, Paper 034304.
30. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Research on ultrasonic multi-wave focusing and imaging method for linear phased arrays // *Chinese Phys. B*, 2021, vol. 30, Paper 074301.
31. *Auld B.A.* Acoustic Fields and Waves in Solids. Malabar (Florida): Krieger Pub., 1990.
32. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin;Heidelberg: Springer, 1973.
33. *Goldstein R.V. et al.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, pp. 2021–2031.
34. *Pao Y.-H., Gajewski R.R.* The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids // *Phys. Acoust.*, 1977, vol. 13, pp. 183–265.
35. *Kupradze V.D.* The Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Amsterdam: North-Holland, 1979.
36. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2017, vol. 53, pp. 243–259.
37. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.*, 2004, vol. 62, pp. 749–766.
38. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM*, 2006, vol. 70, pp. 116–127.