

УДК 532.5

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БИЛИНЕЙНОМ ТЕЧЕНИИ
В ПЛАСТЕ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ АВТО-ГРП**© 2024 г. А. М. Ильясов^{1,*}, В. Н. Киреев^{2,**}¹ООО «РН-БашНИПИнефть», Уфа, Россия²Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

e-mail: amilyasov67@gmail.com*, kireevvn@uust.ru**

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 15.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Рассматривается задача о нестационарном билинейном течении однофазной ньютоновской жидкости в пласте с конечной трещиной авто-ГРП, соединяющей нагнетательную и добывающую скважину. Скважины одновременно начинают работать при постоянных давлениях в изначально невозмущенном бесконечном пласте с вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины. Методом преобразования Лапласа получены аналитические решения для полей давления в трещине и пласте, а также скорости течения в трещине. Рассмотрена приближенная модель, использующая автомодельное решение задачи о фильтрации несжимаемой жидкости в упругом полупространстве с постоянным давлением на границе для моделирования фильтрационных утечек. Выяснено, что для ряда модельных параметров простое аналитическое решение приближенной модели дает приемлемые результаты.

Ключевые слова: нестационарное течение, билинейный поток, конечная магистральная трещина, преобразование Лапласа, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0032823524050051 EDN: JPQEQN

1. Введение. На добывающих скважинах для повышения нефтеотдачи низкопроницаемых нефтяных коллекторов создают технологические трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Для того чтобы эти трещины не смыкались под действием нормальных сжимающих напряжений они закрепляются твердым гранулированным материалом – проппантом. С другой стороны, на нагнетательных скважинах, вводимых для поддержания высокого пластового давления в истощенных коллекторах, из-за высоких давлений нагнетания жидкости образуются разрывы породы – техногенные трещины авто-ГРП. Часто трещины авто-ГРП достигают добывающих скважин. Со временем эти разрывы породы промываются нагнетаемыми фильтрационными потоками и вследствие эрозии трансформируются в незакрепленные проппантом трещины с некоторым характерным раскрытием. Таким образом, в коллекторе образуется система скважина–трещина–скважина–пласт, в которой возникает билинейный поток, представляющий одномерное течение в трещине авто-ГРП и перпендикулярное трещине фильтрационное течение в коллекторе с прямолинейными траекториями частиц.

Впервые билинейный поток в бесконечном пласте в закрепленной проппантом трещине ГРП бесконечной длины был, вероятно, аналитически изучен в работе [1].

Методом преобразования Лапласа получена асимптотическая зависимость падения забойного давления как корень четвертой степени от времени на больших временах. Однако решение для давления в пласте в этой работе не было получено. Как и в [1] в работах [2, 3] также операционным методом изучалось течение в бесконечной трещине закрепленной проппантом в неограниченном пласте. В [2] описание фильтрационного течения в трещине сведено к интегральному уравнению типа свертки, получены решения для полей давления в трещине при постоянном давлении и постоянном расходе на забое добывающей скважины. В случае работы скважины с постоянным дебитом, как и в [1], получена зависимость забойного давления от времени в степени одна четвертая, а также закон изменения расхода на скважине при заданном постоянном давлении. Решение для давления в пласте также не рассматривается. В работе [3] пласт и трещина также предполагаются бесконечными. Для билинейного течения методом преобразования Лапласа получено решение как для давления в закрепленной трещине ГРП, так и для давления в пласте при постоянном давлении на забое скважины. В [4] методом преобразования Лапласа найдены аналогичные аналитические решения для закрепленной проппантом трещины конечной длины в бесконечном коллекторе при заданном забойном давлении или заданном расходе на скважине. В случае конечной трещины решения представляются в виде интегралов от рядов.

В работе [5] операционным методом получены аналитические решения для билинейного течения в бесконечном пласте с не закрепленной проппантом бесконечной трещине авто-ГРП постоянной ширины при заданном постоянном давлении на скважине и постоянном пластовом давлении. Аналитические решения для билинейного потока в случае заданного расхода на скважине для такой же геометрической конфигурации задачи получены в [6].

Недостатком решений [5, 6] является их ограниченность при применении к реальным трещинам авто-ГРП конечной длины. Эти решения можно использовать только до времен пока волна давления в трещине не достигнет конца трещины авто-ГРП или что то же самое, пока частицы жидкости не достигнут конца трещины. Для относительно широких трещин порядка 0.5 мм в низкопроницаемых пластах эти времена могут измеряться минутами и меньше. Очевидно, что характерные времена фильтрационного течения в конечном пласте вообще и билинейного режима течения [1] в частности намного больше, чем указанные времена существования решений для бесконечных трещин и могут применяться только для очень узких трещин или для высокопроницаемых пластов. В последнем случае вследствие большой утечки жидкости через стенки трещины авто-ГРП возникают ползущие течения.

Для того чтобы аналитические решения можно было применять для процессов фильтрации с характерными временами порядка времен существования билинейного течения, в данной работе рассматривается постановка задачи о билинейном течении в бесконечном в одном направлении коллекторе с трещиной авто-ГРП конечной длины и постоянной ширины.

2. Постановка задачи, математическая модель и безразмерные уравнения. Нагнетание жидкости в пласт через стенки трещины происходит со скоростью, имеющую только нормальную составляющую к стенкам трещины. Поэтому, траектории частиц жидкости в пласте непосредственно у стенки трещины всегда прямолинейны и перпендикулярны ей. На ранних временах фильтрации такая же картина будет наблюдаться и в объеме пласта. Однако на поздних временах фильтрации, вследствие нагнетания и/или отбора жидкости скважинами/скважиной, в пласте могут появиться значительные горизонтальные градиенты давления и составляющие скорости фильтрации, параллельные направлению трещины, станут величинами одного порядка с нормальными составляющими скорости фильтрации. Траектории течения жидкости в пласте начнут искривляться, и билинейный режим течения не будет иметь места.

Таким образом, рассматривается задача о билинейном потоке в сопряженной системе конечная трещина/бесконечный пласт. Геометрия задачи показана на рис. 1, где показана область течения. Трещина начинается на нагнетательной скважине и заканчивается на добывающей. Трещина имеет постоянную ширину w и длину L . Течение в пласте и трещине однофазное и изотермическое. Предполагается, что трещина заполнена той же ньютоновской жидкостью, что и пласт. На скважинах заданы различные постоянные давления. Далее все решения получены для верхней полуплоскости. Фильтрационное течение в нижней полуплоскости получается зеркальным отражением относительно оси симметрии трещины авто-ГРП.

Течение в пласте описывается уравнением пьезопроводности. Течение в трещине авто-ГРП описывается уравнениями сохранения массы и движения несжимаемой жидкости в гидравлическом приближении [7] для трещины постоянной ширины с учетом проницаемости стенок канала с пористостью (просветностью) m . В работе [6] показано, что данную нестационарную систему уравнений можно линеаризовать. Линеаризованная система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}, u_L = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12(1-m)\mu v}{\rho w^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 p_r}{\partial y^2}, \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_f + \beta_s)}, \quad (2.3)$$

где v – скорость течения жидкости ГРП в трещине; u_L – скорость фильтрационной утечки по нормали к стенкам трещины; p – давление в трещине; p_r – давление в пласте; ρ – постоянная плотность жидкости в трещине; m – коэффициент пористости породы; μ – динамическая вязкость жидкости; k – проницаемость пласта; β_f и β_s – коэффициенты сжимаемости жидкости в пласте и скелета породы, соответственно.

В системе уравнений (2.1)–(2.3) течение в трещине является одномерным, а течение в пласте – двумерным с прямолинейными траекториями, параллельными оси ординат (рис. 1).

На стенке трещины выполняется динамическое условие непрерывности давления:

$$p_r(x, y = 0, t) = p(x, t), \quad (2.4)$$

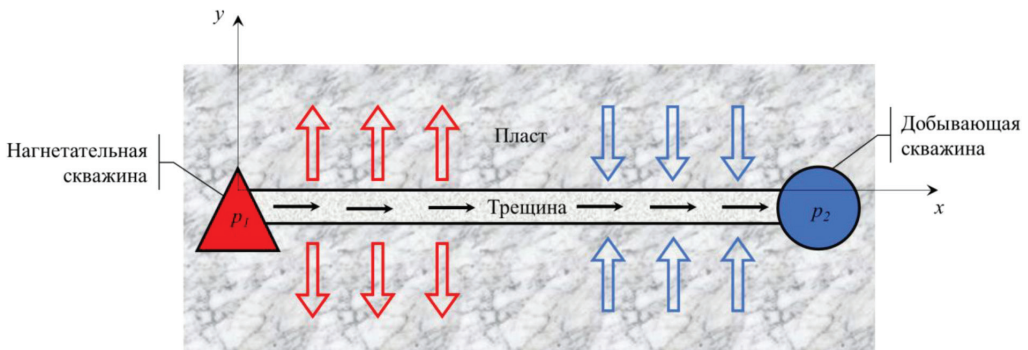


Рис. 1. Схема к постановке задачи

В начальный момент времени жидкость в трещине и пласте покоится, а давление в трещине равно пластовому давлению

$$v(x,0) = 0, \quad p(x,0) = p_k, \quad p_r(x,y,0) = p_k, \quad (2.5)$$

где p_k – пластовое давление.

В начальный момент времени обе скважины одновременно начинают работать с постоянными, но различными давлениями. Таким образом, граничные условия на скважинах следующие

$$p(0,t) = p_1, \quad p(L,t) = p_2, \quad (2.6)$$

где p_1 и p_2 – постоянное давление на левой и правой скважинах.

На бесконечности потребуем равенства давления в коллекторе пластовому давлению:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_r(x,y,t) = p_k \quad (2.7)$$

Уравнения (2.1)–(2.7) образуют замкнутую систему.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{p}_r = \frac{p_r - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}(x,t) = \frac{p - p_k}{p_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad (2.8)$$

где характерные и безразмерные параметры, а также размерный параметр C равны

$$t_* = \frac{L^2}{\chi}, \quad v_* = \frac{t_* p_*}{\rho L}, \quad p_* = p_1 - p_2 \quad (2.9)$$

$$A = \frac{2k p_*}{\mu v_*} > 0, \quad B = \frac{12\mu(1-m)t_*}{\rho w^2} > 0, \quad C = \frac{k p_*}{\mu L},$$

где L – расстояние между скважинами. Если $p_1 > p_k > p_2$, то левая скважина является нагнетательной, а правая – добывающей. Если $p_2 > p_k > p_1$, то наоборот. В обоих случаях безразмерные параметры A и B являются положительными величинами, а параметр C имеет размерность скорости и зависит от знака характерного давления p_* .

С учетом (2.8), (2.9) безразмерные уравнения (2.1)–(2.7) примут вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \quad (2.10)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B \bar{v} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.12)$$

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.13)$$

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0 \quad (2.14)$$

$$\bar{p}_1(0, \bar{t}) = \frac{p_1 - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}_2(1, \bar{t}) = \frac{p_2 - p_k}{p_*} \quad (2.15)$$

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \quad (2.16)$$

3. Применение метода преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа [8] по безразмерному времени

$$F(\bar{x}, \omega) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})\}$$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\}$$
(3.1)

к системе уравнений (2.10)–(2.16). Обозначим изображения искомых функций следующим образом:

$$V(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{v}(\bar{x}, \bar{t})\}, P(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})\}, P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = L\{\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\}$$
(3.2)

С учетом начальных условий (2.14) получим следующую систему ОДУ для изображений

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial P_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}$$
(3.3)

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} - BV$$
(3.4)

$$\omega P_r = \frac{\partial^2 P_r}{\partial \bar{y}^2}$$
(3.5)

Безразмерное условие непрерывности давления в изображениях преобразуется к виду

$$P_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \omega) = P(\bar{x}, \omega)$$
(3.6)

Граничные условия (2.15) для изображения запишутся в форме

$$P(0, \omega) = \frac{\bar{p}_1}{\omega}, \quad P(1, \omega) = \frac{\bar{p}_2}{\omega}$$
(3.7)

Условия на бесконечности (2.16) примут вид

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0$$
(3.8)

Получим следующее решение системы ОДУ (3.3)–(3.5) с дополнительными условиями (3.6)–(3.8):

$$P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{1}{\omega \left(1 - e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right)} \left\{ \left(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 e^{\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right) e^{\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}} + \right.$$

$$\left. + \left(\bar{p}_2 e^{\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} - \bar{p}_1 e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right) e^{-\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}} \right\}$$
(3.9)

$$P(\bar{x}, \omega) = P_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \omega), \quad V(\bar{x}, \omega) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \omega^{1/4} P(\bar{x}, \omega)$$

В первом выражении (3.9) берется положительная ветвь квадратного корня $\sqrt{\omega}$ на действительной оси.

Для нахождения оригиналов изображений (3.9) применяется теорема обращения Меллина [8]:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = L^{-1}\{F(\bar{x}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \quad (3.10)$$

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = L^{-1}\{F(\bar{x}, \bar{y}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega$$

Для всех изображений (3.9) начало координат $\omega = 0$ является одновременно и полюсом, и точкой ветвления. Также полюсами всех изображений являются нули их знаменателей

$$1 - e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega}^{1/2}} = 0 \text{ или } \sqrt{\omega_k} = -\frac{\pi^2 k^2}{AB}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

но последнее выражение не является положительной ветвью квадратного корня на действительной оси.

Следовательно, для интегрирования изображений рассмотрим замкнутый контур на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, показанный на рис. 2. Внутри выбранного контура и на контуре функции (3.9) являются однозначными аналитическими функциями.

Обход от точки A_1 до C происходит по часовой стрелке. Далее обходится контур $CDEFB_1A_1$. Обозначим дуги A_1C и FB_1 соответственно через C_R^1 и C_R^2 . Окружность DE обозначается через C_r , а координаты точек $F(C)$ и $E(D)$ соответственно через $(-R, 0)$ и $(-r, 0)$. Координаты точек A_1 и B_1 равны $(a, \mp \sqrt{R^2 - a^2})$ соответственно.

С использованием второго выражения (3.10) найдем оригинал изображения пластического давления $P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, представленного последним выражением (3.9):

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right] \quad (3.11)$$

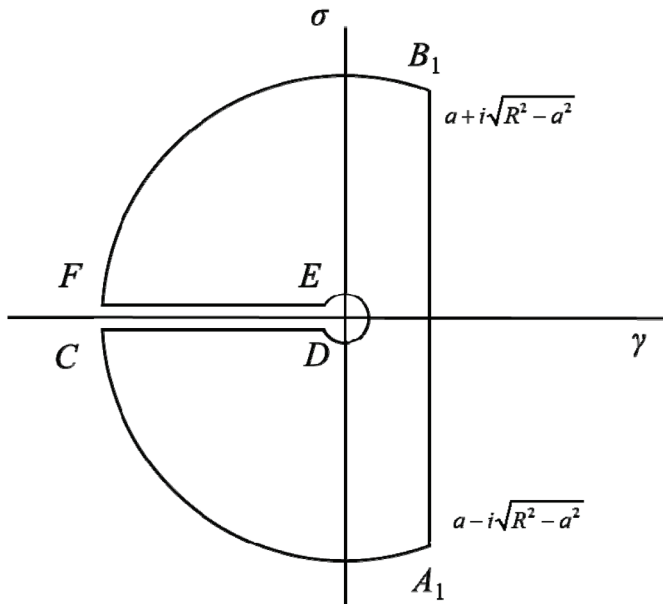


Рис. 2. Контур интегрирования

Внутри рассматриваемого контура и на контуре нет ни точек ветвления, ни полюсов, следовательно, по теореме Коши [8]:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{C_R^1} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{C_R^2} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим, что изображения (3.9) стремятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. По лемме Жордана [8] интегралы по C_R^1 и C_R^2 в (3.12) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

На контуре C_r имеем $\omega = re^{i\varphi}$, $\omega^{1/2} = r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, $\omega^{1/4} = r^{1/4}e^{i\varphi/4}$. Подстановка этих выражений в интеграл по этому контуру и применение правила Лопиталья дает

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = 2\pi i [\bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2 \bar{x}] \quad (3.13)$$

Остается рассмотреть интегралы на нижнем и верхнем берегах разреза вдоль действительной оси. Заметим, что вдоль нижнего разреза $\omega = \rho e^{-i\pi}$, $\sqrt{\omega} = -i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4} e^{-i\pi/4}$, а вдоль верхнего разреза $\omega = \rho e^{i\pi}$, $\sqrt{\omega} = i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4} e^{i\pi/4}$. Вычисление соответствующих интегралов дает:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho(1 - e^{2\alpha(1-i)})} \left(-\bar{p}_1 e^{\alpha \bar{x}} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x})} + \right. \\ \left. + \bar{p}_2 e^{\alpha(\bar{x}+1)} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(\bar{x}+1))} - \bar{p}_2 e^{\alpha(1-\bar{x})} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1-\bar{x}))} + \bar{p}_1 e^{\alpha(2-\bar{x})} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2-\bar{x}))} \right) d\rho \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho(1 - e^{2\alpha(1+i)})} \left(\bar{p}_1 e^{\alpha \bar{x}} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x})} - \right. \\ \left. - \bar{p}_2 e^{\alpha(\bar{x}+1)} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(\bar{x}+1))} + \bar{p}_2 e^{\alpha(1-\bar{x})} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1-\bar{x}))} - \bar{p}_1 e^{\alpha(2-\bar{x})} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2-\bar{x}))} \right) d\rho \end{aligned} \quad (3.15)$$

В (3.14) и (3.15) введено обозначение

$$\alpha = \sqrt{AB} \frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \geq 0$$

Из (3.11)–(3.15) после довольно громоздких выкладок, которые здесь не приводятся, следует решение для пластового давления

$$\begin{aligned} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2 \bar{x} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \\ Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha \bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right]$$

Легко проверяется, что числитель в подынтегральном выражении в (3.16) обращается в нуль на концах трещины. Из (2.13) и (3.16) следует решение для давления в трещине авто-ГРП:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) &= \bar{p}_r(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2\bar{x} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, 0, \rho) - Z_2(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, 0, \rho) - Z_4(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \\ Z_1(\bar{x}, 0, \rho) &= e^{\alpha\bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(2 - \bar{x})) + \sin(\alpha\bar{x}) \right] \\ Z_2(\bar{x}, 0, \rho) &= e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha\bar{x}) + \sin(\alpha(2 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$Z_3(\bar{x}, 0, \rho) = e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\alpha(1 - \bar{x})) \right]$$

$$Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 - \bar{x})) + \sin(\alpha(1 + \bar{x})) \right]$$

Поле скорости в трещине можно получить из (2.11) дифференцированием поля давления (3.17) по безразмерной пространственной координате:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{B} \left\{ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z'_1(\bar{x}, 0, \rho) - Z'_2(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z'_3(\bar{x}, 0, \rho) - Z'_4(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \right\} \\ Z'_1(\bar{x}, 0, \rho) &= \alpha e^{\alpha\bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(2 - \bar{x})) + \sin(\alpha\bar{x}) - e^{2\alpha} \cos(\alpha(2 - \bar{x})) + \cos(\alpha\bar{x}) \right] \\ Z'_2(\bar{x}, 0, \rho) &= -\alpha e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha\bar{x}) + \sin(\alpha(2 - \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha\bar{x}) + \cos(\alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ Z'_3(\bar{x}, 0, \rho) &= -\alpha e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\alpha(1 - \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha(1 + \bar{x})) + \cos(\alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ Z'_4(\bar{x}, 0, \rho) &= \alpha e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 - \bar{x})) + \sin(\alpha(1 + \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha(1 - \bar{x})) + \cos(\alpha(1 + \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

В (3.18) штрих наверху обозначает производную по безразмерной пространственной координате \bar{x} .

Непосредственная проверка показывает, что выражения (3.16)–(3.18) являются точными решениями системы уравнений (2.10)–(2.12). Для полученных решений проверка граничного условия (2.15), по сути, была уже выполнена выше. Граничное условие (2.16) следует из построения ограниченного решения для изображения пластического давления при $y \rightarrow \infty$. Выполнение начальных условий для решений (3.16)–(3.18) следует из теоремы обращения Меллина при $t < 0$ [8].

Из (3.16) можно получить выражения для составляющих размерной скорости фильтрации в пласте

$$W_y(x, y, t) = -C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}}, \quad W_x(x, y, t) = -C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{x}} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left[\frac{\bar{p}_1 [(Z_1)'_{\bar{y}} - (Z_2)'_{\bar{y}}] + \bar{p}_2 [(Z_3)'_{\bar{y}} - (Z_4)'_{\bar{y}}]}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right] d\rho \\ (Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha \bar{x}} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ (Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(2 - \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(1 - \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ (Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(1 + \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right], \end{aligned}$$

где $(Z_i)'_{\bar{y}}$, $i = \overline{1, 4}$ – производная соответствующей функции по безразмерной пространственной координате \bar{y} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} &= \bar{p}_2 - \bar{p}_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left[\frac{\bar{p}_1 [(Z_1)'_{\bar{x}} - (Z_2)'_{\bar{x}}] + \bar{p}_2 [(Z_3)'_{\bar{x}} - (Z_4)'_{\bar{x}}]}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right] d\rho \\ (Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha \bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) + \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ (Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(2 - \bar{x})} \left[-e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) + \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) + \right. \\ &\quad \left. + e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ (Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(1 - \bar{x})} \left[-e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) + \right. \\ &\quad \left. + e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ (Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(1 + \bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) + \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

В свою очередь из (3.20) следует выражение для размерной утечки в пласт (притока из пласта):

$$u_L(x, t) = C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \quad (3.22)$$

Уравнения прямолинейных траекторий жидкости в пласте имеют вид

$$\frac{dy_r(x, t)}{dt} = \frac{W_y(x, y_r, t)}{m}; \quad y_r(x, 0) = 0, \quad (3.23)$$

где правая часть (3.23) определяется первым уравнением (3.19) и (3.20).

Решение для скорости жидкости в трещине (3.18) определяет закон движения жидкости в трещине

$$\frac{dx_f}{dt} = v_* \bar{v}(\bar{x}_f, \bar{t}); \quad x_f(0) = 0 \quad (3.24)$$

Полученные решения можно использовать для моделирования однофазной фильтрации в реальном ограниченном пласте с трещиной конечной длины при одновременном выполнении двух условий. Первое условие – должен существовать билинейный поток с прямолинейными траекториями в пласте; второе условие – частицы жидкости, определяемые уравнением (3.23), не должны пересекать границ реального пласта. Таким образом, одновременно должны выполняться условия

$$\left| \frac{W_x}{W_y} \right| \ll 1 \text{ и } |y_r(x, t)| < L_y, \quad (3.25)$$

где L_y – протяженность симметричного в направлении координаты y реального пласта.

4. Аналитическое решение упрощенной модели. Если нет необходимости следить за фильтрационным течением в пласте, то можно ограничиться только рассмотрением течения в трещине. Такая задача была решена численно в работе [9], применительно к индикаторным (трассерным) исследованиям пласта, где в уравнении движения были учтены все слагаемые. Утечка (приток) жидкости из трещины в пласт (из пласта) моделировалась выражением

$$u_L = \frac{k(p - p_k)}{\mu w \sqrt{\pi \chi t}}, \quad (4.1)$$

которое является следствием автомодельного решения при геометрически линейной фильтрации изотермической однофазной жидкости в полуплоскости с заданными постоянными давлениями на добывающей (нагнетательной) галерее и на бесконечности [10]. В зарубежных научных изданиях выражение (4.1) называют утечкой Картера [11] и широко используют в симуляторах при моделировании ГРП в нефтегазовом деле [12].

В трассерных исследованиях в закачиваемую в нагнетательную скважину жидкость добавляется индикатор в небольших концентрациях. Обычно это химические или радиоактивные соединения, не изменяющие реологических свойств жидкости. Трассерные исследования проводятся с целью определения наиболее проницаемых областей пласта по времени прихода первой порции концентрации индикатора, либо времени прихода максимума концентрации индикатора в добывающую скважину. Для самых высокопроницаемых каналов – трещин, можно пренебречь диффузионными процессами.

Если использовать уравнения (2.1), (2.2) и (4.1) то безразмерная система уравнений примет вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = -\frac{D(\bar{p} - \bar{p}_k)}{\sqrt{\bar{t}}}; \quad D = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \quad (4.2)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B\bar{v} \quad (4.3)$$

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = \bar{p}_1, \quad \bar{p}(1, \bar{t}) = \bar{p}_2 \quad (4.4)$$

В размерных переменных решение задачи (4.2)–(4.4) имеет вид

$$p(x, t) = p_* \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = p_* \left(\bar{p}_k + C_1 e^{\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4} \bar{x}} + C_2 e^{-\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4} \bar{x}} \right) \quad (4.5)$$

$$v(x, t) = v_* \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = -v_* \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -v_* \sqrt{\frac{D}{B}} \bar{t}^{-1/4} \left(C_1 e^{\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4} \bar{x}} - C_2 e^{-\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4} \bar{x}} \right) \quad (4.6)$$

$$C_1 = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_k - (\bar{p}_1 - \bar{p}_k) e^{-\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4}}}{2sh\left(\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4}\right)} < 0, \quad C_2 = \bar{p}_1 - \bar{p}_k - C_1 > 0 \quad (4.7)$$

Знаки в (4.7) соответствуют конфигурации, когда левая скважина нагнетательная, а правая – добывающая. Время в (4.5)–(4.7) является параметром. Это решение также применимо, пока выполняются неравенства (3.25). Характерные и безразмерные параметры определяются согласно (2.8), (2.9). Параметр D определяется согласно (4.2).

Из (4.6)–(4.7) можно найти закон движения координаты x_* , при которой мгновенная скорость течения в трещине равна нулю («координата застойной зоны»):

$$x_*(t) = \frac{Lt^{1/4}}{2t_*^{1/4} \sqrt{BD}} \ln \left(-\frac{C_1}{C_2} \right) \quad (4.8)$$

5. Результаты численных расчетов. По полученным аналитическим решениям построим графики для двумерного давления в пласте, давления и скорости в трещине, а также утечек в пласт в некоторые моменты времени. Результаты расчетов показаны на рис. 3–10. При построении графиков использовались следующие параметры. В качестве жидкости бралась вода с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ и вязкостью $\mu = 0.001$ Па·с. Коэффициент упругоэтомости воды равен $\beta_l = 10^{-10}$ Па⁻¹. Коэффициент упругоэтомости скелета породы равен $\beta_s = 10^{-11}$ Па⁻¹. Пористость пласта равна $m = 0.1$. Проницаемости пород варьировались от 1 мД до 100 мД. Длина трещины равна 200 м. Протяженность пласта в направлении y равна $L_y = 50$ м. Ширина трещины w варьировалась от $5 \cdot 10^{-5}$ м до $1.5 \cdot 10^{-4}$ м. Пластовое давление равно $p_k = 250$ атм ($2.5 \cdot 10^7$ Па). Давления на скважинах симметричны относительно пластового давления и равны $p_l = 350$ 350 атм ($3.5 \cdot 10^7$ Па) и $p_2 = 150$ 150 атм ($1.5 \cdot 10^7$ Па).

Поскольку полученные решения справедливы для пласта бесконечной протяженности, то при практическом применении этих решений к пласту конечной протяженности необходимо контролировать координату фронта жидкости в пласте и время существования билинейного режима согласно (3.25). Эти условия соблюдаются при построении графиков решений.

На рис. 3 показано изменение давления по длине трещины для трех моментов времени $t = 1, 24$ и 72 ч при различных проницаемостях пласта и ширине трещины $w = 0.0001$ м. Видно, что чем выше проницаемость пласта, тем выше градиент давле-

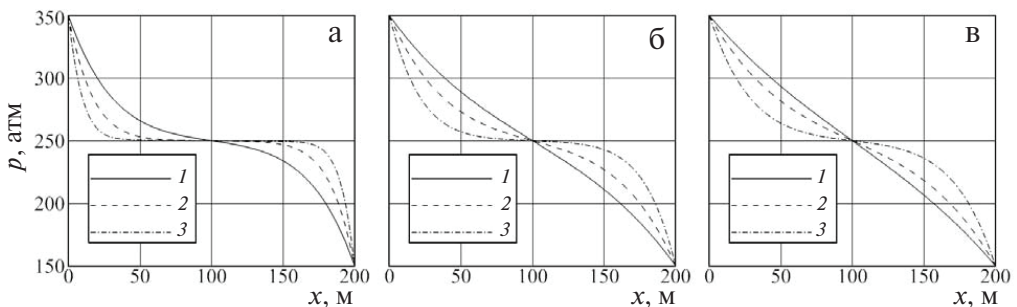


Рис. 3. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4} 10^{-4}$ м: $1-3-k = 1, 10, 100$ мД

ния около скважин и, тем более пологий профиль давления в середине трещины. Это является следствием большей скорости утечки жидкости через стенки трещины. Со временем профиль давления в трещине деформируется уменьшая свою кривизну. Для слабопроницаемых пластов профиль давления в трещине стремится к линейному профилю.

На рис. 4 показано изменение давления по длине трещины для тех же моментов времени, что и на рис. 3 для проницаемости пласта $k = 1$ мД при различных ширинах трещин. Видно, что чем меньше ширина трещины, тем выше градиент давления около скважин и, тем более пологий профиль давления в середине трещины. Это также является следствием большей скорости утечки жидкости через стенки трещины при

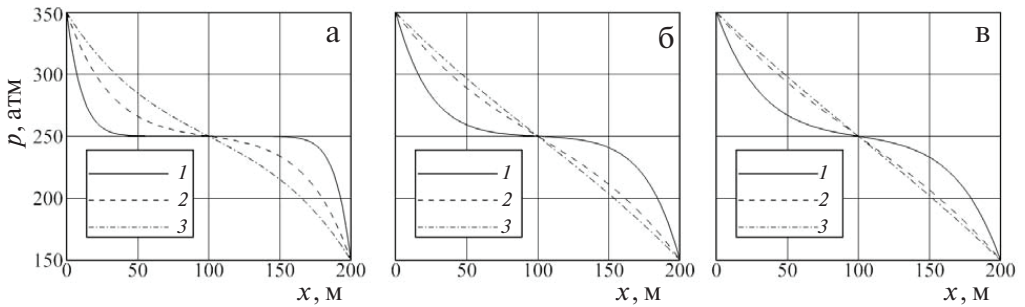


Рис. 4. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) $t = 1, 24$ и 72 ч для различных значений ширины трещины w . Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: 1–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

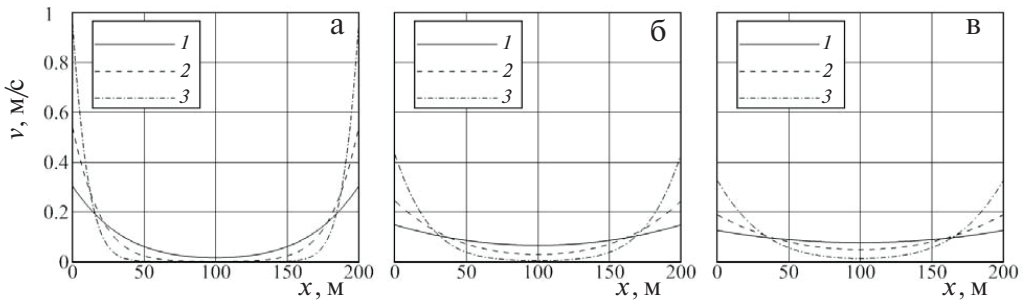


Рис. 5. Изменение скорости в трещине в моменты времени (а–в) $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м: 1–3 – $k = 1, 10, 100$ мД

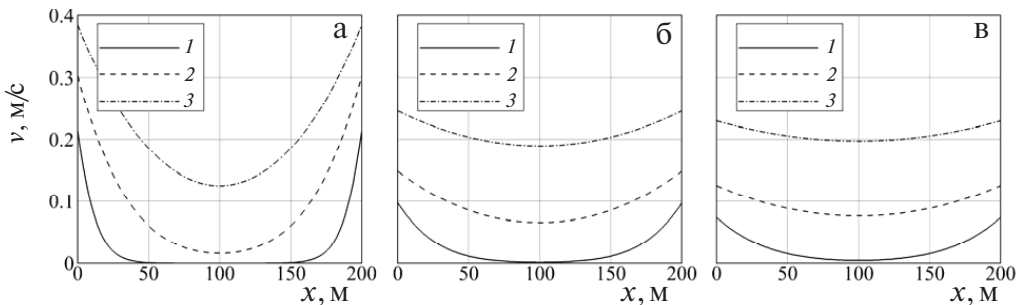


Рис. 6. Изменение скорости в трещине в моменты времени (а–в) $t = 1, 24$ и 72 ч для различных значений ширины трещины w . Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: 1–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

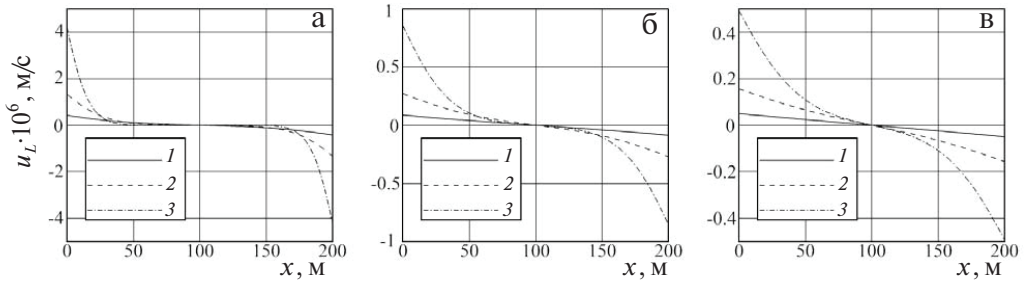


Рис. 7. Изменение скорости утечки жидкости в пласт по длине трещины в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м:

$$I-3 - k = 1, 10, 100 \text{ мД}$$

меньших ширинах трещин. В этом случае профиль давления в трещине также со временем деформируется уменьшая кривизну.

На рис. 5 представлено изменение скорости течения по длине трещины для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для трещины шириной $w = 0.0001$ м. при различных проницаемостях пласта. Видно, что чем меньше проницаемость пласта, тем ниже скорость течения в трещине у скважин и тем выше вдали от них из-за меньших утечек при течении. Со временем происходит деформация профилей скорости, а максимальные скорости течения уменьшаются.

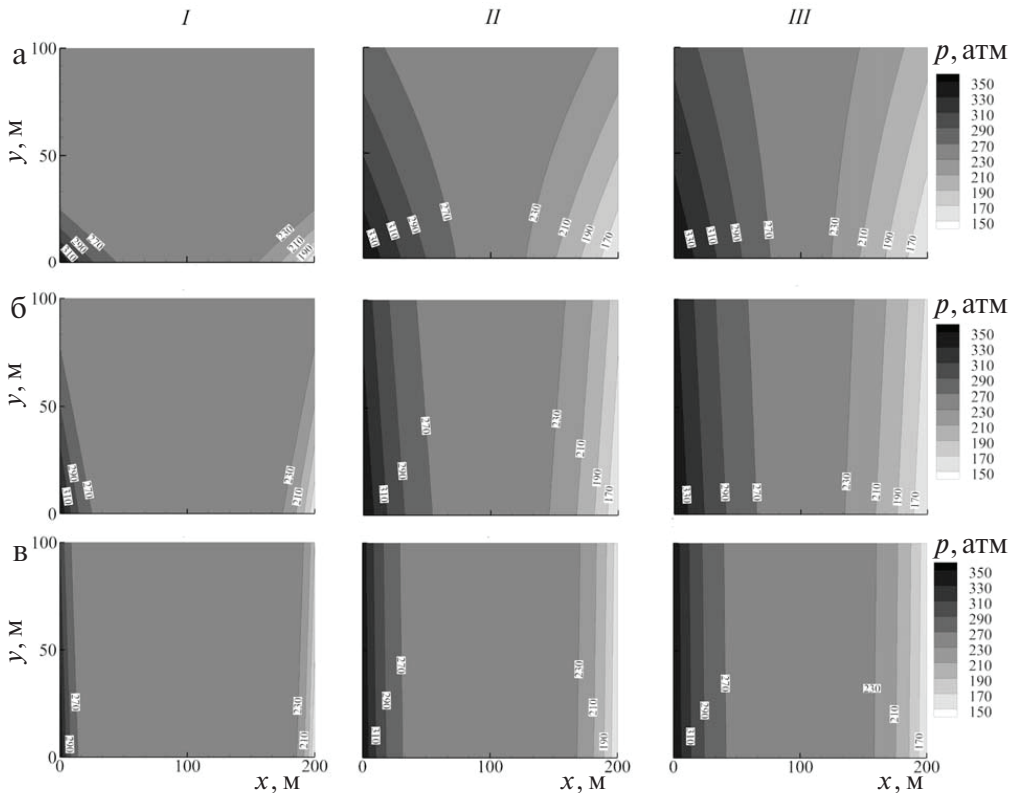


Рис. 8. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 1, 24$ и 72 ч. Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м: (а–в) – $k = 1, 10, 100$ мД.

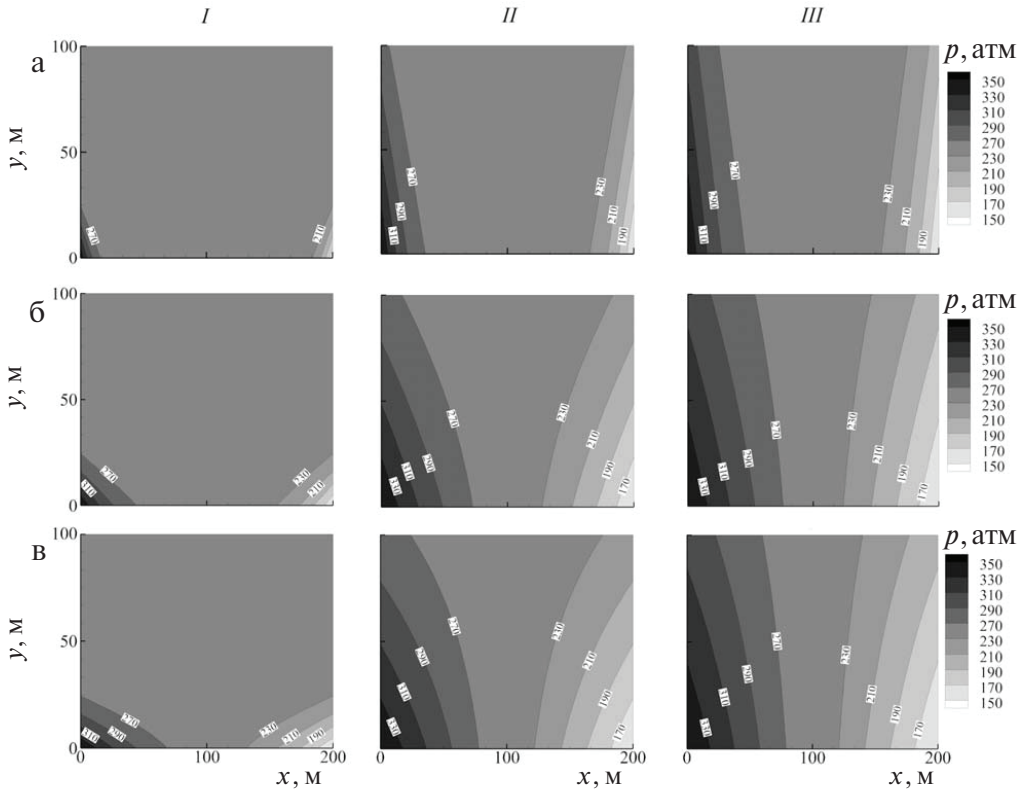


Рис. 9. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 1, 24$ и 72 ч.
 Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: (а–в) – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

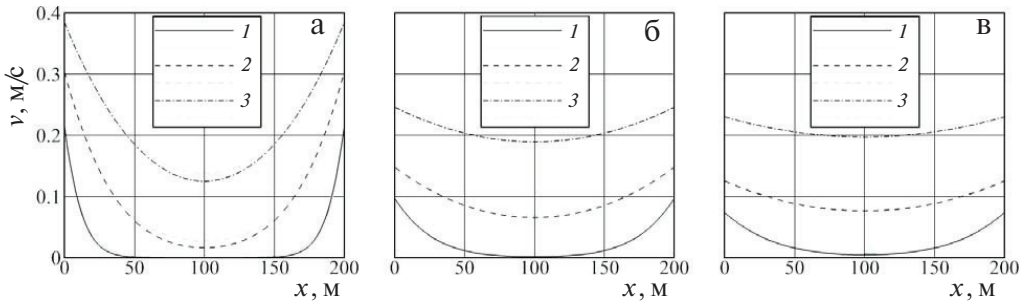


Рис. 10. Сравнение скорости в трещине в различные моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч при различных ширинах трещины: толстые линии – скорость, вычисленная по формуле (3.18), тонкие линии – скорость, вычисленная по упрощенной модели, формула (4.6).
 Проницаемость пласта $k = 1$ мД: I–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

На рис. 6 показано изменение скорости течения по длине трещины для трещин различной ширины и проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что чем меньше ширина трещины, тем ниже скорость течения в трещине из-за большего вязкого трения (гидравлического сопротивления) в этом случае. Максимальные скорости также со временем уменьшаются вследствие утечек жидкости в пласт.

На рис. 7 показана деформация со временем профиля скорости утечки по длине трещины за раскрытием $w = 0.0001$ м для различных проницаемостей пласта. Очевидно, что скорость утечки растёт с ростом проницаемости пласта. В силу симметрии рассматриваемых граничных условий в центральном сечении трещины утечка жидкости равна нулю. До этого сечения утечка жидкости отрицательная – жидкость утекает в пласт, а после этого сечения утечка становится положительной – жидкость поступает в трещину из пласта.

На рис. 8 показаны изолинии нестационарного двумерного поля давления в пласте для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для различных проницаемостей пласта и ширине трещины равной $w = 0.0001$ м. Видно, что с увеличением проницаемости пласта k наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается, изолинии искривляются, а области невозмущенного состояния пласта сокращаются.

На рис. 9 показаны изолинии нестационарного двумерного поля давления в те же моменты времени для трещин различной ширины и фиксированной проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что с увеличением проницаемости пласта k наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается, изолинии искривляются, а области невозмущенного состояния пласта сокращаются.

Сравнение полей скорости в трещине согласно решению (3.18) и по приближенному решению (4.6)–(4.7) показано на рис. 10. Видно, что для некоторых параметров выполняется хорошее соответствие.

Полученные аналитические решения могут использоваться при тестировании численных схем симуляторов, моделирующих процессы фильтрации в линейно-упругих пластах с вертикальными трещинами авто-ГРП с постоянным раскрытием. В частности, полученные решения могут использоваться при моделировании трассерных исследований.

Заключение. Представлена модель билинейного нестационарного течения в системе трещина конечной длины/водонасыщенный линейно-упругий пласт бесконечной протяженности. Получены аналитические решение для нестационарных полей давления в пласте и трещине, а также скорости течения в трещине при заданных постоянных давлениях на нагнетательной и добывающей скважине. Получено аналитическое выражение для фильтрационных утечек (притока) из трещины в пласт (из пласта), а также уравнения траекторий течения жидкости в трещине и пласте. Для некоторых характерных параметров построены графики решений. Полученные решения позволяют определять времена существования билинейного потока в реальных пластах конечных размеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. № 9. P. 1749–1766.
2. *Нагаева З.М., Шаганов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
3. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
4. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 4. С. 116–125.
5. *Ильясов А.М., Киреев В.Н.* Нестационарное течение в пласте с магистральной трещиной, пересекающей нагнетательную или добывающую скважину // ПМТФ. 2023. Т. 60. № 5. С. 124–138.
6. *Ilyasov A.M., Kireev V.N.* Analytical solution to the problem of injection or reduction of the formation pressure in the reservoir with a fracture // Fluid Dyn. 2024. V. 59. № 2. P. 189–201.
7. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.

9. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Моделирование течения вязкой жидкости в магистральной вертикальной трещине с проницаемыми стенками // Матем. модел. 2016. Т. 28. № 7. С. 65–80.
10. *Баренблатт Г.И., Ентов В.И., Рыжик В.М.* Движение жидкости и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
11. *Carter R.D.* Derivation of the general equation for estimating the extent of fractured area // *Drilling&Product. Practice.* 1957. P. 261–269.
12. *Economides M.J., Nolte K.G.* Reservoir Stimulation. New York;Chichester: Wiley, 2000.

Analytical Solution of the Problem on Bi-Linear Flow in a Formation with a Finite Auto-Fracture

A. M. Il'yasov^{a,*}, V. N. Kireev^{b,**}

^a*RN-BashNIPIneft, LLC, Ufa, Russia*

^b*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

^{*}*e-mail: amilyasov67@gmail.com*

^{**}*e-mail: kireevvn@uust.ru*

The problem of unsteady bilinear flow of a single-phase Newtonian fluid in a formation with a finite auto-fracture connecting an injection and production well is considered. The wells simultaneously begin to operate at constant pressures in an initially undisturbed infinite formation with a vertical main fracture of constant width. Using the Laplace transform method, analytical solutions were obtained for the pressure fields in the fracture and formation, as well as the flow velocity in the fracture. An approximate model is considered that uses a self-similar solution to the problem of filtration of an incompressible fluid in an elastic half-space with constant pressure at the boundary to simulate filtration leaks. It was found that for a number of model parameters a simple analytical solution of the approximate model gives acceptable results.

Keywords: unsteady flow, bilinear flow, finite main fracture, Laplace transform, analytical solution.

REFERENCES

1. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient pressure analysis for fractured wells // *J. Petrol. Technol.*, 1981, vol. 33, no. 9, pp. 1749–1766.
2. *Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh.* On the elastic regime of flow through a porous medium in the fracture located in an oil or gas reservoir // *Prikl. Mat. Mekh.*, 2017, vol. 81, no. 3, pp. 319–329. (in Russian)
3. *Khabibullin I.L., Khisamov A.A.* Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 594–602.
4. *Khabibullin I.L., Khisamov A.A.* Modeling of unsteady fluid filtration in a reservoir with a hydraulic fracture // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, pp. 652–660.
5. *Il'yasov A.M., Kireev V.N.* Unsteady flow in a reservoir with a main fracture crossing an injection or production well // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2023, vol. 64, no. 5, pp. 840–852.
6. *Il'yasov A.M., Kireev V.N.* Analytical solution to the problem of injection or reduction of the formation pressure in the reservoir with a fracture // *fluid dyn.*, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 189–201.
7. *Charnyi I.A.* Unsteady Pipe Flow of a Real Fluid. Moscow: Nedra, 1975. (in Russian)
8. *Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.* Methods of Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
9. *Il'yasov A.M., Bulgakova G.T.* Modeling of viscous fluid flow in a main vertical fracture with permeable walls // *Math. Mod.*, 2016, vol. 28, no.7, pp. 65–80. (in Russian)
10. *Barenblatt G.I., Entov V.I., Ryzhik V.M.* Movement of Liquids and Gases in Natural Formations. Moscow: Nedra, 1984. (in Russian)
11. *Carter R.D.* Derivation of the general equation for estimating the extent of fractured area // *Drilling&Product. Practice.* 1957, pp. 261–269.
12. *Economides M.J., Nolte K.G.* Reservoir Stimulation. N.Y.; Chichester: Wiley, 2000.