

УДК 532.612, 532.614

К ВЛИЯНИЮ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. И. Григорьев^{1,*}, Н. Ю. Колбнева^{2,**}, С. О. Ширяева^{3,***}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

e-mail: grigori@mail.ru*, kolbneva-nata@yandex.ru*, shir@uniyar.ac.ru***

Поступила в редакцию 22.01.2024 г.

После доработки 07.07.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Теоретическими асимптотическими методами показано, что эффект релаксации электрического заряда влияет на физические характеристики электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли. Получены аналитические выражения для частот, декрементов затухания капиллярных осцилляций капель из-за вязкого затухания и потерь энергии на излучение. Показано, что частоты электромагнитного излучения облачных капель, реализующиеся в диапазонах сотен килогерц и единиц мегагерц, уменьшаются с увеличением радиуса и зарядового параметра излучающей капли, как и декременты затухания, связанные с излучением. Интенсивность излучения электромагнитных волн снижается при уменьшении электропроводности и подвижности зарядов в жидкости.

Ключевые слова: заряженная капля, капиллярные осцилляции, релаксация заряда

DOI: 10.31857/S0032823524050046 EDN: JPXANL

1. Введение. Впервые проблема электромагнитного излучения от осциллирующей заряженной капли в облаке была рассмотрена в [1] и затем развита в [2–5]. В [5], в частности было указано на ошибку в расчетах [1] (неправильно была определена асимптотика функции Ханкеля), и эта ошибка перекочевала в [2–4]. В [6] было указано на необходимость учета кривизны заряженной поверхности жидкости при записи уравнения баланса поверхностной плотности заряда в жидкости с конечной электропроводностью. Все это сделало актуальным повторение расчетов [3–4].

Сама задача о расчете интенсивности радиоизлучения (конвективного) грозового облака актуальна в связи с широким спектром разнообразных приложений в геофизике, гидрометеорологии, технике и химической технологии. Большое количество работ посвящено теоретическому и экспериментальному изучению капиллярных осцилляций и электростатической неустойчивости жидкой капли, заряженной собственным или индуцированным внешним электрическим полем зарядами (см. [1–5] и цитируемую там литературу).

В частности, исследование излучения осциллирующей каплей электромагнитных волн привлекает внимание из-за проблем радиолокационного зондирования облаков и туманов [7–10], проблем радиопомех от огней Св. Эльма, появляющихся на обшивке самолетов, пролетающих через облака [11].

Что касается эффекта релаксации заряда, то он возможен только при отличной от нуля вязкости жидкости. Это связано тем, что на свободной поверхности электрические напряжения, возникающие из-за релаксационных движений, могут быть скомпенсированы только вязкими напряжениями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уединенную сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости, характеризующейся массовой плотностью ρ , коэффициентами поверхностного натяжения σ и кинематической вязкости ν , удельной проводимостью $\gamma_1 \equiv \gamma$, диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Примем, что капля несет заряд Q и находится в вакууме с удельной проводимостью $\gamma_2 = 0$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = 1$. Будем считать проводимость внутренней среды достаточной, чтобы обеспечить отсутствие объемного заряда в капле. Индекс j , принимает значения 1 и 2.

В сферической системе координат (r, θ, ϕ) с началом в центре масс капли уравнение ее поверхности, совершающей осесимметричные капиллярные осцилляции, в произвольный момент времени t представим в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t), \quad (2.1)$$

где $\xi(\theta, t)$ — малое возмущение равновесной сферической формы, генерируемое капиллярным волновым движением тепловой природы. При наличии внешних неконтролируемых силовых воздействий (коагуляция, дробление, столкновение, трение о воздух и т.д.) тепловая амплитуда $|\xi|$ может возрасти до десятков процентов от радиуса капли [12, 13].

Отношение $|\xi|/R$, имеющее смысл безразмерной амплитуды капиллярного волнового возмущения, примем в качестве малого параметра задачи: $\varepsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$. Так как движение жидкости вызывается осцилляциями капли, будем считать, что поле скоростей течения внутренней среды $\vec{V}(r, \theta, t)$ имеет тот же порядок малости, что и $\xi(\theta, t)$: $\vec{V}(r, \theta, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

В нижеследующих рассуждениях учтем, что собственный заряд капли равномерно распределен на равновесной поверхности с постоянной поверхностной плотностью $\kappa^{(0)}$. В виду конечности электропроводности жидкости перенос электрического заряда при волновом искажении формы капли приводит к эффекту релаксации заряда.

Выпишем систему электрогидродинамических уравнений, описывающих капиллярные осцилляции заряженной вязкой капли конечной проводимости и возникающего при этом электромагнитного излучения.

Система состоит из уравнения Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t), \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t), \quad (2.2)$$

уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, \theta, t) = 0,$$

уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D}_j(r, \theta, t) = 0, \quad \vec{D}_j(r, \theta, t) = \epsilon_j \vec{E}_j(r, \theta, t)$$

$$\Delta \vec{E}_j(r, \theta, t) - \frac{\epsilon_j \mu_j}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

условий ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \vec{V}(r, \theta, t) \rightarrow 0, \vec{E}_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty: \vec{E}_2(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

и граничных условий на свободной поверхности капли $F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$: кинематического:

$$\frac{\partial F(r, \theta, t)}{\partial t} + \vec{V}(r, \theta, t) \cdot \nabla F(r, \theta, t) = 0,$$

динамического для касательной компоненты тензора напряжений:

$$\Pi_{ex\tau} - \Pi_{in\tau} - \rho v \left[\vec{\tau}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}(r, \theta, t) (\vec{\tau}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) \right] = 0$$

$$\Pi_{in\tau} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} E_{1n}(r, \theta, t) E_{1\tau}(r, \theta, t), \Pi_{ex\tau} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} E_{2n}(r, \theta, t) E_{2\tau}(r, \theta, t)$$

и динамического для нормальной компоненты тензора напряжений:

$$P(r, \theta, t) - 2\rho v \vec{n}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + P_Q(r, \theta, t) = P_\sigma(r, \theta, t)$$

Чтобы учесть эффект релаксации электрического заряда, введем дополнительные граничные условия на поверхности капли $F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$: скачка нормальной компоненты электрической индукции:

$$D_{exn}(r, \theta, t) - D_{inn}(r, \theta, t) = 4\pi\kappa(r, \theta, t), \quad (2.4)$$

непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля:

$$E_{ex\tau}(r, \theta, t) = E_{in\tau}(r, \theta, t),$$

и баланса поверхностной плотности заряда [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(r, \theta, t)}{\partial t} - \gamma (\vec{n}(r, \theta, t), \vec{E}_m(r, \theta, t)) + \kappa(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \vec{V}(r, \theta, t)) \operatorname{div} \vec{n}(r, \theta, t) + \\ + \kappa(r, \theta, t) \operatorname{div}_\Sigma \vec{V}_\tau(r, \theta, t) + b \kappa(r, \theta, t) \operatorname{div}_\Sigma \vec{E}_{in\tau}(r, \theta, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Кроме того, потребуем выполнения естественных интегральных условий сохранения объема капли при ее осцилляциях, неизменности положения центра масс:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

а также постоянства суммарного заряда:

$$\oint_S \kappa(r, \theta, t) dS = Q, S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.6)$$

В приведенной математической формулировке задачи нижний индекс 1 относится к капле, индекс 2 – к внешней среде, μ_j – магнитная проницаемость j -й среды (ниже принимается $\mu_1 = \mu_2 = 1$), $\kappa(r, \theta, t)$ – поверхностная плотность электрического заряда на капле, c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, b – поверхностная подвижность носителей заряда, $E_j(r, \theta, t)$, $D_j(r, \theta, t)$ – векторы напряженности и индукции электрического поля, создаваемого собственным зарядом, $E_{jn}(r, \theta, t)$, $E_{j\tau}(r, \theta, t)$ – компоненты вектора $E_j(r, \theta, t)$ вдоль ортов нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к поверхности капли (2.1), P – давление внутри капли, $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ – давление

сил поверхностного натяжения, $P_Q = \frac{1}{8\pi} (E_{2n}^2 - E_{2\tau}^2 - \varepsilon_1 (E_{1n}^2 - E_{1\tau}^2))$ – давление электрических сил, $\Pi_{in\tau}, \Pi_{ex\tau}$ – электрические составляющие касательной компоненты тензора напряжений, относящиеся к капле (с нижним индексом «in») и внешней среде (с нижним индексом «ex»), $\text{div}_\Sigma \vec{A} = \left(\text{div} \vec{A} - \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \right)_\Sigma$ – оператор поверхностной дивергенции (символом Σ обозначена поверхность капли (2.1)), $\vec{V}_\tau, \vec{E}_{1\tau}$ – компоненты вектора скорости движения жидкости в капле и напряженности электрического поля внутри капли, лежащие в плоскости касательной к поверхности капли (2.1), и вычисляемые по формулам:

$$\vec{V}_\tau = \vec{V}(r, \theta, t) - \vec{n}(\vec{n}, \vec{V}), \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{1\tau} - \vec{n}(\vec{n}, \vec{E}_{1\tau})$$

Заметим, что в граничном условии (2.5) скорость изменения поверхностной плотности заряда $\frac{\partial \kappa(r, \theta, t)}{\partial t}$ (первое слагаемое в (2.5)) на возмущенной поверхности капли обуславливается несколькими физическими факторами. В этом случае второе слагаемое представляет собой нормальный к свободной поверхности капли ток проводимости за характерное время максвелловской релаксации $\tau_r \sim \varepsilon_1 / \gamma$. Появление третьего слагаемого обусловлено изменением площади свободной поверхности капли в процессе ее капиллярных осцилляций. Четвертый член имеет смысл конвективного потока заряда касательными составляющими течения жидкости за время порядка периода осцилляций капли $\tau \sim (R^3 \rho / \sigma)^{1/2}$. Пятый член связан с направленным переносом носителей заряда вдоль свободной поверхности капли под действием касательной составляющей электрического поля.

В уравнении (2.5) отсутствует вклад диффузионной компоненты, так как влияние механизма диффузии на конечность скорости переноса носителей заряда существенно лишь для плохо проводящих жидкостей типа жидкого гелия.

Отыскание решения приведенной выше системы уравнений проведем методом прямого разложения в рамках теории возмущений [14]. Ограничиваясь линейным приближением по малому параметру $\varepsilon \equiv |\xi| / R \ll 1$, все искомые функции представим в виде асимптотических разложений по ε :

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2), \vec{V}(r, \theta, t) = \vec{V}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \kappa(r, \theta, t) &= \kappa^{(0)}(r, \theta) + \kappa^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \vec{E}_j(r, \theta, t) &= \vec{E}_j^{(0)}(r, \theta) + \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2) \\ P(r, \theta, t) &= P^{(0)}(r, \theta) + P^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ P_Q(r, \theta, t) &= P_Q^{(0)}(r, \theta) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \Pi_{in\tau}(r, \theta, t) &= \Pi_{in\tau}^{(0)}(r, \theta) + \Pi_{in\tau}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \Pi_{ex\tau}(r, \theta, t) &= \Pi_{ex\tau}^{(0)}(r, \theta) + \Pi_{ex\tau}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Номер верхнего индекса указывает на порядок малости по ε соответствующих компонент. Индексом «0» обозначены величины, характеризующие равновесное состояние системы.

Обратим внимание, что в граничных условиях задействованы орты $\vec{n}(r, \theta, t)$ и $\vec{\tau}(r, \theta, t)$. В виду этого возникает необходимость в определении явного вида этих функций.

Вычислим единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности капли вида $F(r, \theta, t) = 0$ по общей формуле: $\vec{n}(r, \theta, t) \equiv \nabla F / |\nabla F|$. В линейном по ε приближении получим:

$$\vec{n} = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (2.8)$$

В плоскости, касательной к возмущенной поверхности капли в любой ее точке, выберем ортогональные орты $\vec{\tau}_\varphi, \vec{\tau}_\theta$: орт касательной к параллелям $\vec{\tau}_\varphi$ и орт касательной к меридианам $\vec{\tau}_\theta$.

Представим касательную к параллелям как $\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{n}$, где в качестве постоянного вектора выбран орт оси симметрии $\vec{e}_z$. Несложно убедиться, что вектор $\vec{\tau}_\varphi$, имеющий единичную длину, совпадает с азимутальным ортом $\vec{e}_\varphi$ сферической системы координат:

$$\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_\varphi \quad (2.9)$$

Определим орт второй касательной при помощи векторного произведения: $\vec{\tau}_\theta = \vec{\tau}_\varphi \times \vec{n}$. Используя (2.8), (2.9) и учитывая, что орт должен иметь единичную длину, найдем единичный вектор касательной в меридиальном направлении в виде:

$$\vec{\tau}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta, \quad (2.10)$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат.

3. Решение задачи нулевого порядка малости по ε . Подставляя разложения (2.7) в систему уравнений (2.2)–(2.6) и собирая вместе слагаемые $\sim \varepsilon^0$, получим задачу нулевого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε для невозмущенного состояния системы:

$$\operatorname{div} \vec{E}_j^{(0)} = 0, \operatorname{rot} \vec{E}_j^{(0)} = 0$$

$$r \rightarrow 0: \vec{E}_1^{(0)}(r, \theta, t) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty: \vec{E}_2^{(0)}(r, \theta, t) \rightarrow 0$$

$$r = R: P^{(0)}(r, \theta) + P_Q^{(0)}(r, \theta) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta)$$

$$P^{(0)} = P_0, P_q = \frac{1}{8\pi} \left(\left(E_{2n}^{(0)} \right)^2 - E_{2\theta}^{(0)} - \varepsilon_1 \left(\left(E_{1n}^{(0)} \right)^2 - E_{1\theta}^{(0)} \right) \right)$$

$$P_\sigma^{(0)} = \sigma \operatorname{div} \vec{n}_0, \vec{n}_0 = \vec{e}_r$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \Pi_{in\varphi}^{(0)} = 0, \Pi_{ex\varphi}^{(0)} = 0, E_{ex\varphi}^{(0)}(r, \theta, t) = E_{in\varphi}^{(0)}(r, \theta, t)$$

$$-\gamma \left(\vec{n}_0(r, \theta) \cdot \vec{E}_{in}^{(0)}(r, \theta) \right) + b\kappa_0 \operatorname{div}_\Sigma \left[E_{in\varphi}^{(0)}(r, \theta) \vec{e}_\varphi \right] = 0$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{in\theta}^{(0)} = 0, \Pi_{ex\theta}^{(0)} = 0, E_{ex\theta}^{(0)}(r, \theta, t) = E_{in\theta}^{(0)}(r, \theta, t)$$

$$-\gamma(\vec{n}_0(r, \theta) \cdot \vec{E}_{in}^{(0)}(r, \theta)) + b\kappa_0 \operatorname{div}_\Sigma [E_{in\theta}^{(0)}(r, \theta) \vec{e}_\theta] = 0$$

$$E_{exn}^{(0)}(r, \theta) - \varepsilon_1 E_{inn}^{(0)}(r, \theta) = 4\pi\kappa_0$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\oint_S \kappa_0 dS = QV = [0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$S = [r = R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где $\vec{n}_0$, $\vec{\tau}_{0\varphi}$, $\vec{\tau}_{0\theta}$ — орты нормали и касательных к равновесной сфере, P_0 — равновесное давление внутри капли.

Решение вышеприведенной системы уравнений нетрудно найти:

$$\kappa^{(0)} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \vec{E}_1^{(0)} = 0, \vec{E}_2^{(0)} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r, P_0 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4} \quad (3.1)$$

В итоге приходим к тому, что равновесная форма поверхности капли совпадает с исходной сферической.

4. Решение задачи первого порядка малости по ε . Вывод дисперсионного уравнения. Подставляя асимптотические выражения (2.7) в полную математическую формулировку задачи (2.2)–(2.6) и выделяя слагаемые $\sim \varepsilon^1$, выпишем гидродинамическую часть задачи в первом порядке малости:

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{(1)}(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, \theta, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}_j^{(1)} = 0, \Delta \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t) - \frac{\varepsilon_j}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (4.3)$$

$$r \rightarrow 0: \vec{V}(r, \theta, t) \rightarrow 0, \vec{E}_{in}^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

$$r \rightarrow \infty: \vec{E}_{ex}^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t), \vec{e}_r) = 0 \quad (4.6)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi:$$

$$\Pi_{ex\varphi}^{(1)} - \Pi_{in\varphi}^{(1)} - \rho\nu [\vec{e}_\varphi(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}_0(\vec{e}_\varphi, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t)] = 0, \vec{n}_0 = \vec{e}_r \quad (4.7)$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{ex\theta}^{(1)} - \Pi_{in\theta}^{(1)} - \rho\nu [\vec{e}_\theta(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}_0(\vec{e}_\theta, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t)] = 0 \quad (4.8)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho\nu \vec{n}_0(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.9)$$

$$r = R: -2\frac{Q}{R^3} \xi(\theta, t) + E_{2r}^{(1)}(r, \theta, t) - \varepsilon_1 E_{inr}^{(1)}(r, \theta, t) = 4\pi\kappa^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.10)$$

$$\text{для } \vec{\tau} = \vec{\tau}_\theta: \frac{Q}{R^3} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + E_{ex\theta}^{(l)}(r, \theta, t) = E_{in\theta}^{(l)}(r, \theta, t) \quad (4.11)$$

$$\text{для } \vec{\tau} = \vec{\tau}_\varphi: E_{ex\varphi}^{(l)}(r, \theta, t) = E_{in\varphi}^{(l)}(r, \theta, t) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \kappa^{(l)}(r, \theta, t)}{\partial t} - \gamma E_{lr}^{(l)}(r, \theta, t) + \frac{Q}{4\pi R^2} (\vec{e}_r, \vec{V}(r, \theta, t)) \operatorname{div} \vec{e}_r + \\ & + \frac{Q}{4\pi R^2} \operatorname{div}_\Sigma [\vec{V}(r, \theta, t) + b \vec{E}_m^{(l)}(r, \theta, t)] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$3R^2 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0, \quad 4R^3 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.14)$$

$$2\pi R^2 \int_0^\pi \left(\kappa^{(l)} + \frac{Q}{2\pi R^3} \xi(\theta, t) \right) \sin \theta d\theta = 0, \quad (4.15)$$

где $E_{jr}^{(l)}, E_{j\theta}^{(l)}, E_{j\varphi}^{(l)}$ — проекции вектора $\vec{E}_j^{(l)}$ на орты сферической системы координат.

Скаляризуем уравнения (4.1), (4.2) по методике, подробно изложенной в [15]. Для этого разложим искомое поле скоростей $\vec{V}(r, \theta, t)$ на сумму трех ортогональных векторных полей:

$$\vec{V}(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \psi_m(r, \theta, t) \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.16)$$

где ψ_m — скалярные функции, а дифференциальные векторные операторы $\vec{N}_m$ в сферической системе координат определяются соотношениями:

$$\vec{N}_1 \equiv \nabla, \quad \vec{N}_2 \equiv \vec{N}_1 \times \vec{r} \equiv \nabla \times \vec{r}, \quad \vec{N}_3 \equiv \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r}), \quad (4.17)$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$(\vec{N}_m^+, \vec{N}_q) = 0, \quad (m \neq q), \quad (4.18)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа Δ :

$$\Delta \vec{N}_m = \vec{N}_m \Delta \quad (4.19)$$

В выражениях (4.17), (4.18) $\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{N}_m^+$ — операторы, эрмитово-сопряженные к $\vec{N}_m$, имеющие вид:

$$\vec{N}_1^+ \equiv -\nabla, \quad \vec{N}_2^+ \equiv \vec{r} \times \nabla, \quad \vec{N}_3^+ \equiv (\vec{r} \times \nabla) \times \nabla \quad (4.20)$$

Уравнение (4.16) означает, что поле скоростей течения вязкой жидкости представлено суперпозицией потенциальной и вихревой (обусловленных вязкостью) составляющих: оператор $\vec{N}_1$ выделяет потенциальную компоненту, а операторы $\vec{N}_2$ — вихревую тороидальную и $\vec{N}_3$ — вихревую полоидальную части движения реальной жидкости относительно оси симметрии z капли.

Учитывая разложение (4.16) и свойства операторов (4.18), (4.19), приведем систему векторных выражений (4.1), (4.2) к системе трех скалярных уравнений для функций ψ_m :

$$\Delta \psi_m(r, \theta, t) - \frac{1}{v} (1 - \delta_{1m}) \frac{\partial \psi_m(r, \theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.21)$$

и добавки к давлению внутренней среды капли, вызванной искажением $\xi(\theta, t)$ сферической поверхности:

$$P^{(1)}(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad (4.22)$$

δ_{lm} — дельта-символ Кронекера.

Прежде чем записать граничные условия (4.6)–(4.9) в терминах скалярных функций ψ_m , перепишем систему (4.6)–(4.9) через проекции вектора скорости $V(r, \theta, t)$ на орты сферической системы координат:

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + V_r(r, \theta, t) = 0 \quad (4.23)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial r} + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.24)$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{ex\theta}^{(1)} - \Pi_{in\theta}^{(1)} - \rho v \left[\frac{\partial V_\theta(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} V_\theta(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.25)$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \Pi_{ex\varphi}^{(1)} - \Pi_{in\varphi}^{(1)} - \rho v \left[\frac{\partial V_\varphi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\varphi(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.26)$$

Входящие в (4.23)–(4.26) компоненты V_r, V_θ, V_φ поля скоростей выражаются в виде:

$$V_r(r, \theta, t) = \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} L \psi_3(r, \theta, t); \quad L \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$V_\theta(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right)$$

$$V_\varphi(r, \theta, t) = -\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial \theta},$$

где L — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

После подстановки этих соотношений в (4.23)–(4.26) система скаляризованных граничных условий примет удобный для дальнейшего решения вид:

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{R} L \psi_3(r, \theta, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \left(\frac{\partial^2 \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r^2} - L \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_3(r, \theta, t)}{r} \right) \right) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.28)$$

$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta:$

$$\Pi_{2\theta}^{(1)} - \Pi_{1\theta}^{(1)} - \rho v \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1(r, \theta, t)}{r} \right) - \frac{1}{R^2} (2 + L) \psi_3(r, \theta, t) + \frac{\partial^2 \psi_3(r, \theta, t)}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (4.29)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \quad \Pi_{2\varphi}^{(1)} - \Pi_{1\varphi}^{(1)} + \rho v \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \psi_2(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.30)$$

В (4.28) выражения для линейных по ε поправок к давлению электрического поля $P_q^{(1)}$ и капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$ определяются в виде:

$$P_Q^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{E}_2^{(0)} \right)^2 \xi(\theta, t) + 2 \vec{E}_2^{(0)} \vec{E}_2^{(1)} \right) \quad (4.31)$$

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R} \left[- \left(2 + L \right) \frac{\xi(\theta, t)}{R} \right] \quad (4.32)$$

В случае стоячих капиллярных волн положим зависимость малых величин $\xi(\theta, t)$, $\psi_m(r, \theta, t)$ от времени периодической:

$$\xi(\theta, t) \sim \exp(-i\omega_n t), \quad \psi_m(r, \theta, t) \sim \exp(-i\omega_n t),$$

где i — мнимая единица, ω_n — частота n -ой моды капиллярных осцилляций капли, в общем случае комплексная: $\omega_n = \text{Re} \omega_n \pm i \text{Im} \omega_n$, где вещественная часть $\text{Re} \omega_n$ определяет собственную частоту осцилляций, а мнимая часть — декремент затухания в случае отрицательной мнимой компоненты: $\text{Im} \omega_n < 0$ или инкремент капиллярной неустойчивости капли по отношению к ее собственному заряду в случае положительной мнимой компоненты $\text{Im} \omega_n > 0$.

Решения уравнения (4.21) для скалярных функций $\psi_m(r, \theta, t)$ с учетом условий ограниченности (4.4) представим в виде разложений [16]:

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-i\omega_n t) r^n P_n(\mu) \quad (4.33)$$

$$\psi_m(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \exp(-i\omega_n t) I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{\nu}} \right) P_n(\mu) (m = 2, 3), \quad (4.34)$$

где $\mu \equiv \cos \theta$, $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n -ого порядка, n — целое положительное число, $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [17]. В (4.34) нижний индекс m в амплитудном коэффициенте B_{mn} указывает на вихревую тороидальную ($m = 2$) или полоидальную ($m = 3$) компоненту поля скоростей движения жидкости в капле.

Отклонение поверхности осциллирующей капли от равновесной сферической запишем в форме ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.35)$$

Здесь суммирование начинается с $n = 2$, так как в первом порядке малости невозможно возбуждение нулевой ($n = 0$) и первой ($n = 1$) мод, отвечающих за радиальные пульсации капли и ее движение как целого соответственно, в силу дополнительных условий (4.14).

В (4.33)–(4.35) неизвестные амплитудные коэффициенты A_n , B_{mn} , M_n имеют первый порядок малости по ε и вычисляются из системы граничных условий (4.27), (4.29), (4.30).

Сосредоточим свое внимание на вычислении в динамическом граничном условии для нормальной компоненты тензора напряжений (4.28) линейных по ε компонент давлений $P^{(1)}$, $P_Q^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$, вызванных деформацией $\xi(\theta, t)$ равновесной формы поверхности капли.

Используя решение (4.33) для функции $\psi_1(r, \theta, t)$, из формулы (4.22) при $r = R$ выпишем добавку к гидродинамическому давлению внутри капли $P^{(1)}$:

$$P^{(1)}(r, \theta, t) = i\rho \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n A_n R^n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.36)$$

Для поправки к давлению сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(1)}$ из (4.32) с учетом разложения (4.35) для возмущения $\xi(\theta, t)$ получается соотношение:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) M_n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.37)$$

Чтобы найти выражения для добавки к давлению электрических сил $P_Q^{(1)}$ и электрических составляющих касательной компоненты тензора напряжений $\Pi_{2\theta}^{(1)} - \Pi_{1\theta}^{(1)}$, $\Pi_{2\varphi}^{(1)} - \Pi_{1\varphi}^{(1)}$, необходимо решить краевую задачу (4.3)–(4.5), (4.10)–(4.13), (4.15) для напряженности поля $\vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)$.

Для решения векторных уравнений (4.3) в рамках метода операторной скаляризации представим напряженность электрического поля $\vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)$ в виде суперпозиции:

$$\vec{E}_j^{(1)} = \sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \Phi_j^{(m)} \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.38)$$

где $\Phi_j^{(m)}$ – неизвестные скалярные функции, $\vec{N}_m$ – векторные дифференциальные операторы, описываемые выражениями (4.17) и подчиняющиеся свойствам (4.18), (4.19).

Подставляя (4.38) в уравнение непрерывности электрического поля (4.3) и применяя условие ортогональности, приходим к уравнению Лапласа для скалярной функции $\Phi_j^{(1)}$:

$$\Delta \Phi_j^{(1)} = 0 \quad (4.39)$$

В силу свойства коммутативности операторов-проекторов $\vec{N}_m$ с оператором Лапласа (4.19) подстановка разложения (4.38) в волновое уравнение (4.3) позволяет выписать систему трех скалярных уравнений:

$$\sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \left\{ \Delta \Phi_j^{(m)} - \frac{\varepsilon_j}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^{(m)}}{\partial t^2} \right\} = 0 \quad (m = 1, 2, 3)$$

Положим временную зависимость функций $\Phi_j^{(m)}$ экспоненциальной: $\Phi_j^{(m)} \sim \exp(-i\omega_n t)$. Тогда подействовав слева на выше записанное уравнение поочередно эрмитовосопряженными операторами $\vec{N}_m^+$ ($m = 1, 2, 3$), при использовании свойства (4.18) перейдем к уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_j^{(m)} + \varepsilon_j k^2 \Phi_j^{(m)} = 0, \quad k \equiv \frac{\text{Re } \omega_n}{c}, \quad (4.40)$$

где k – волновое число.

Из уравнения (4.40) при значении индекса $m = 1$ с учетом (4.39) легко прийти к решению: $\Phi_j^{(1)} = 0$, что соответствует отсутствию потенциальной составляющей электрического поля. В результате поправка к напряженности поля $\vec{E}_j^{(1)}$, связанная с возмущением $\xi(\theta, t)$ равновесной формы капли, представляется только вихревой частью:

$$\vec{E}_j^{(1)} = \vec{N}_2 \Phi_j^{(2)} + \vec{N}_3 \Phi_j^{(3)}$$

Учитывая явный вид векторных операторов $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, запишем составляющие вектора $\vec{E}_j^{(1)}$ в сферических координатах (r, θ, φ) , выраженные через неизвестные функции $\Phi_j^{(2)}$, $\Phi_j^{(3)}$:

$$\vec{N}_2 \Phi_2 \equiv -\frac{\partial \Phi_j^{(2)}}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \quad (4.41)$$

$$\vec{N}_3 \Phi_3 \equiv -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_j^{(3)} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_j^{(3)}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (4.42)$$

Решение уравнения Гельмгольца (4.40) при $j = 1$ (внутри капли), ограниченное в начале координат, представим в виде суперпозиции стоячих волн:

$$\Phi_1^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} \exp(-i\omega_n t) j_n(kr) P_n(\mu) \quad (m = 2, 3) \quad (4.43)$$

Решение уравнения (4.40) при $j = 2$ (вне капли), удовлетворяющее условию ограниченности на бесконечном удалении от капли, естественно искать в виде суперпозиции бегущих волн:

$$\Phi_2^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(m)} \exp(-i\omega_n t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \quad (m = 2, 3) \quad (4.44)$$

Здесь $j_n(z)$ – сферическая функция Бесселя первого рода, $h_n^{(2)}(z)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода или функция Ханкеля [18], $C_n^{(m)}$, $D_n^{(m)}$ – неизвестные коэффициенты первого порядка малости по ϵ , вычисляемые из граничных условий (4.10)–(4.13).

Несложно показать, что для выполнения условия равенства касательных компонент при $\vec{\tau} = \vec{\tau}_\phi$ необходимо потребовать, чтобы все константы $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ в решениях (4.43), (4.44) для функций $\Phi_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) обращались в ноль. Из сказанного следует отсутствие тороидальной части поля: $\Phi_j^{(2)} = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля внутри $\vec{E}_1^{(1)}$ и вне капли $\vec{E}_2^{(1)}$ описывается лишь полоидальной составляющей:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} \exp(-i\omega_n t) \left[\frac{1}{r} n(n+1) j_n(\epsilon_1^{1/2} kr) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} j_n(\epsilon_1^{1/2} kr) + \frac{\partial j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(3)} \exp(-i\omega_n t) \left[\frac{1}{r} n(n+1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} h_n^{(2)}(kr) + \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Исходя из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля для орта касательной $\vec{\tau} = \vec{\tau}_\theta$, найдем соотношение, связывающее амплитуды M_n , $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$ разложений (4.35), (4.45), (4.46):

$$C_n^{(3)} = \frac{Q}{R^2} M_n f_1 + D_n^{(3)} f_2 \quad (4.47)$$

$$f_1 \equiv \frac{1}{\partial_r (r j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)) \Big|_{r=R}}, \quad f_2 \equiv \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}{\partial_r (r j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)) \Big|_{r=R}}$$

Условие скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции на заряженной границе жидкости (4.10) после подстановки в него решений (4.45), (4.46) при использовании амплитудного коэффициента (4.47) позволяет определить поправку первого порядка малости к равновесной плотности заряда:

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{Q}{R^3} M_n \left(2 + \varepsilon_1 f_1 n(n+1) j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} D_n^{(3)} n(n+1) \left(h_n^{(2)}(kR) - \varepsilon_1 f_2 j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) \right) \right] \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Применяя (4.23), перепишем векторное условие баланса поверхностной плотности заряда в скалярном виде:

$$r = R:$$

$$\frac{\partial \kappa^{(1)}}{\partial t} - \gamma E_{1r}^{(1)} + \frac{Q}{2\pi R^3} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{Q}{4\pi R^4} L \left(\psi_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_3) \right) + b \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_{1\theta}^{(1)} \sin \theta) = 0,$$

из которого с учетом уравнений (4.33), (4.34) при $m = 3$, (4.45), (4.48) выразим коэффициент $D_n^{(3)}$ в (4.46) через амплитуды M_n, A_n, B_{3n} в виде:

$$D_n^{(3)} = \frac{Q}{R^2} F_2 \left[M_n f_1 F_1 + \frac{1}{R} \left(A_n R^n + B_{3n} \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \right) \right]_{r=R} \quad (4.49)$$

$$F_1 \equiv (-i\omega_n \varepsilon_1 + 4\pi\gamma) j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) + b \frac{Q}{R^3} \frac{1}{f_1}, \quad F_2 = \frac{1}{-i\omega_n h_n^{(2)}(kR) - f_2 F_1}$$

Заметим, что интегральное условие сохранения полного заряда капли (4.15) выполняется тождественно.

Наконец, подставляя в (4.31) полученные решения (3.1), (4.46) для напряженности поля $\vec{E}_2^{(0)}, \vec{E}_2^{(1)}$ с учетом амплитуды (4.49), запишем при $r = R$ выражение для добавки к давлению электрических сил $P_Q^{(1)}$:

$$P_Q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5} \sum_{n=0}^{\infty} [T_1 M_n + T_2 A_n + T_3 B_{3n}] \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.50)$$

$$T_1 \equiv -2 + n(n+1) f_1 F_1 F_2 h_n^{(2)}(kR), \quad T_2 \equiv R^{n-1} n(n+1) F_2 h_n^{(2)}(kR)$$

$$T_3 \equiv \frac{1}{R} n(n+1) F_2 h_n^{(2)}(kR) \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \Big|_{r=R}$$

Далее перейдем к вычислению электрических частей касательных компонент тензора напряжений в (4.29), (4.30). Воспользовавшись соотношениями (2.8)–(3.1), (4.45), (4.46), убедимся, что в первом порядке малости по ε компоненты $\Pi_{2\varphi}^{(1)} = \Pi_{1\varphi}^{(1)} = \Pi_{1\theta}^{(1)} = 0$,

а $\Pi_{2\theta}^{(1)}$ рассчитывается по формуле $\Pi_{2\theta}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} \left(E_2^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + E_2^{(0)} E_{2\theta}^{(1)} \right]$, из которой при $r = R$ несложно найти:

$$\Pi_{2\theta}^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5} \sum_{n=0}^{\infty} [G_1 M_n + G_2 A_n + G_3 B_{3n}] \exp(-i\omega_n t) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta}$$

$$G_1 \equiv 1 + f_1 F_1 F_2 \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}, \quad G_2 \equiv R^{n-1} F_2 \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}$$

$$G_3 \equiv \frac{1}{R} F_2 \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \Big|_{r=R} \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (4.27), (4.29), (4.30). Подставим найденные электрические составляющие в (4.29), (4.30) и подействуем на эти уравнения слева

оператором $\vec{N}_1$. При использовании свойства ортогональности операторов (4.18) и равенства $\vec{N}_2^+ \cdot \vec{N}_2 = -L$ преобразованное уравнение (4.29) и условие (4.30) с учетом разложений (4.33), (4.34) при $m = 3$ позволяют определить связь неизвестных констант A_n, B_{3n} с амплитудами капиллярных осцилляций M_n :

$$A_n = M_n \frac{-i\omega_n \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 - \frac{2}{x^2} (n-1)(n+1) \right) + \frac{G_3}{I_n(x)} \right] + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \frac{G_1 n(n+1)}{R}}{nR^{n-1} \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 \right) + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \left(-\frac{G_2(n+1)}{R^n} + \frac{G_3}{I_n(x)} \right) \right]}$$

$$B_{n3} = M_n \frac{-i\omega_n \left(2\rho v(n-1) - \frac{Q^2}{4\pi R^5} \frac{G_2}{R^{n-2}} \right) - \frac{Q^2}{4\pi R^5} nRG_1}{RnI_n(x) \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 \right) + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \left(-\frac{G_2(n+1)}{R^n} + \frac{G_3}{I_n(x)} \right) \right]}$$

$$f(x) = \frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}, x = R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}},$$

а из граничного условия (4.30) для неизвестной скалярной функции $\psi_2(r, \theta, t)$ после подстановки в него представления (4.34) при $m = 2$ несложно получить уравнение вида:

$$B_{2n} \left[\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} I_{n+1} \left(R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) + \frac{1}{R} (n-1) I_n \left(R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right] = 0$$

Легко заметить, что последнее равенство может выполняться, когда все коэффициенты B_{2n} положить равными нулю: $B_{2n} = 0$, либо приравнять нулю выражение в квадратных скобках. Из первого случая следует обнуление скалярной функции $\psi_2(r, \theta, t)$, что равносильно отсутствию вихревых тороидальных движений внутренней среды капли при ее капиллярных осцилляциях. Во втором случае получаем дисперсионное уравнение, определяющее апериодически затухающие вихревые тороидальные движения жидкости. При этом краевая задача для отыскания $\psi_2(r, \theta, t)$ полностью автономна и никак не связана с остальной частью анализируемой системы. В виду этого в нижеследующем изложении функция $\psi_2(r, \theta, t)$ рассматриваться не будет.

Для дальнейшего анализа решения удобнее рассмотреть динамическое граничное условие для нормальной составляющей тензора напряжений (4.28) относительно амплитуд возмущения M_n , которые легко оценить в экспериментальных и естественных условиях [11]. Для этого подставим в (4.28) выражения (4.36), (4.37), (4.50) для компонент давлений $P^{(1)}, P_Q^{(1)}, P_\sigma^{(1)}$ и разложения (4.33), (4.34) для скалярных функций $\psi_1(r, \theta, t), \psi_3(r, \theta, t)$ с учетом полученных амплитудных коэффициентов A_n, B_{3n} . Применяя известные рекуррентные соотношения для функции Бесселя $I_n(x)$ (см. [18], стр. 263):

$$\frac{\partial I_n(x)}{\partial x} = I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x), I_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x),$$

и пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, получим общий вид дисперсионного уравнения для полоидальных движений жидкости в излучающей капле:

$$\omega_n^3 + i\alpha_1 \omega_n^2 + \alpha_2 \omega_n + i\alpha_3 = 0 \quad (n \geq 2) \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\equiv 2 \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \frac{\sigma}{\rho R^3} W (n+1) F_2 \left(h_n^{(2)}(kR) n + \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} - \\
&\quad - x f(x) \left\{ \frac{\sigma}{\rho R^3} W F_2 \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} + 2 \frac{\nu}{R^2} \right\} \\
\alpha_2 &\equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} n \left\{ W (n+1) G_1 - (n-1)(n+2) \left[1 - W \frac{T_1}{(n-1)(n+2)} \right] \right\} + \\
&\quad + x f(x) \left\{ 4 \frac{\nu^2}{R^4} n(n-1)(n+2) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W F_2 n \left(n(n+1) h_n^{(2)}(kR) + 2 \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} \right\} \\
\alpha_3 &\equiv -x f(x) \left\{ 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W G_1 n^2 (n+1) + 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W T_1 n - 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} n(n-1)(n+2) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sigma}{\rho R^3} \right)^2 W F_2 n \left(\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} \left((n-1)(n+2) + 2W \right) + W h_n^{(2)}(kR) n(n+1) \right\}
\end{aligned}$$

В (4.51) параметр Релея $W \equiv Q^2/4\pi\sigma R^3$ характеризует устойчивость заряженной поверхности проводящей капли по отношению к собственному заряду (т.е. в случае, когда силы поверхностного натяжения преобладают над электрическими силами). При этом условие устойчивости капиллярных осцилляций n -ой колебательной моды представляется в виде $W < (n+2)$ [19]. Для основной моды $n=2$ критическая для начала реализации электростатической неустойчивости проводящей капли величина ее заряда выписывается в виде: $Q_{кр} = 4R\sqrt{\pi\sigma R}$.

Несложно заметить, что учет конечности скорости перераспределения заряда капли приводит к увеличению порядка алгебраического уравнения (4.51) по сравнению с дисперсионным уравнением при отсутствии эффекта релаксации заряда. Это объясняется усложнением структуры спектра реализующихся движений внутренней среды капли за счет появления релаксационных аperiодических движений жидкости, связанных с перераспределяющимся по возмущенной поверхности электрическим зарядом. Возникающие приповерхностные электрические токи, обусловленные сдвигом фаз между капиллярным волновым движением жидкости и течением, связанным с перемещением носителей заряда, приводят к диссипации кинетической энергии в виде тепла.

Обратим внимание, что влияние вязкости на капиллярные осцилляции капли (на основной (второй) колебательной моде $n=2$) оценивается величиной безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\mu = \frac{\nu}{\text{Re} \omega_2 R^2} = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$ [20]. Как видно, безразмерная комбинация μ зависит не только от самого коэффициента кинематической вязкости ν , но и от плотности жидкости ρ , коэффициента поверхностного натяжения σ и радиуса капли R . В связи с этим при неизменных величинах ν , ρ , σ жидкость может проявлять себя как маловязкая ($\mu \ll 1$) и сильновязкая ($\mu \gg 1$) в зависимости от размеров капель. Таким образом, выполнение критерия сильной вязкости ($\mu \gg 1$) возможно для очень мелких капель, когда их осцилляции подавляются вязкостью. Однако осцилляции капель имеют место для малых значений вязкости ($\mu \ll 1$), соответствующих большему радиусам.

Оценим величину безразмерного параметра μ , принимая во внимание, что линейные размеры R туманных, облачных и дождевых капель варьируются в пределах от

$R = 1$ мкм до $R = 3.5$ мм [21]. Используя средние характеристики водяных капель $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $v = 0.01$ см²/с и принятые радиусы R , легко показать, что значение параметра μ изменяется в диапазоне от $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ при $R = 3.5$ мм до $\mu \approx 0.117$ при $R = 1$ мкм. Это означает, что во всех случаях величина безразмерной вязкости μ удовлетворяет условию $\mu \ll 1$, что применительно к осцилляциям рассматриваемых капель.

Исходя из выше сказанного, для перехода к пределу малой вязкости ($\mu \ll 1$) воспользуемся асимптотическим выражением функции Бесселя $I_n(x)$ при больших значениях аргумента [18, стр. 262]:

$$x \rightarrow \infty: I_n(x) = \frac{1}{2x} \exp(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

с учетом которого имеем:

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right); x = R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}}, \quad (4.52)$$

O — символ порядка [14].

Учитывая асимптотическое поведение функции Бесселя $j_n(z)$ при малых значениях аргумента [18, стр. 257]:

$$z \rightarrow 0: j_n(z) = \frac{z^n}{(2n+1)!!} (1 + O(z^2)),$$

для которой справедливо рекуррентное соотношение (см. [18, стр. 258]):

$$\frac{\partial j_n(z)}{\partial z} = -j_{n+1}(z) + \frac{n}{z} j_n(z),$$

найдем асимптотическое выражение:

$$\frac{j_n(z_0)}{\partial_z (z j_n(z)) \Big|_{z=z_0}} = \frac{1}{n+1} + O(z_0^2); z_0 = \varepsilon_1^{1/2} kR \quad (4.53)$$

Используя разложение сферической функции $h_n^{(2)}(z)$ в степенной ряд [18]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}},$$

для случая $z = z_1 \ll 1$ получим решение:

$$\frac{h_n^{(2)}(z_1)}{\partial_z (z h_n^{(2)}(z)) \Big|_{z=z_1}} \approx -\frac{1}{n} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_1^{2n+1}, z_1 = kR \quad (4.54)$$

После подстановки асимптотических разложений (4.52)–(4.54) в (4.51), выпишем кубическое дисперсионное уравнение в относительно простом виде:

$$\omega_n^3 + il_1 \omega_n^2 - \omega_n (l_{21} + il_{22}) - il_{31} + l_{32} = 0 \quad (n \geq 2) \quad (4.55)$$

$$l_1 \equiv \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} + 2 \frac{v}{R^2} (n-1)(2n+1)$$

$$l_{21} = \omega_{n0}^2 + 2 \frac{v}{R^2} \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} (n-1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}\omega_{n0}^2 &\equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right) \\ l_{22} &\equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2(n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \\ l_{31} &\equiv \omega_{n0}^2 \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} \\ l_{32} &\equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} n^2(n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1},\end{aligned}$$

где ω_{n0} — собственная частота капиллярных осцилляций заряженной капли проводящей жидкости.

Как видно из (4.55), учет конечности скорости переноса заряда описывается соотношением $\left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1}$, которое при $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ обращается в ноль.

В этом случае отсутствие эффекта релаксации заряда обуславливается мгновенным перераспределением носителей заряда. В результате (4.55) превращается в дисперсионное уравнение для затухающих капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей маловязкой жидкости с учетом энергопотерь на электромагнитное излучение:

$$\begin{aligned}\omega_n^2 + 2i\omega_n \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \\ - \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} + i \frac{Wn(n+1)}{(n-1)(n+2)} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \right) = 0,\end{aligned}\quad (4.56)$$

где $k \equiv \frac{\text{Re}\omega_n}{c}$ — волновое число.

5. Решение дисперсионного уравнения. Обратимся теперь к решению дисперсионного уравнения (4.55). Данные натурных измерений средних зарядов на каплях естественного происхождения с типичными размерами от $R = 1$ мкм до $R = 3.5$ мм показывают, что в реальных условиях большая часть капель несет малые заряды, не превышающие одной десятой Рэлеевского предела [21]. Тогда в случае устойчивой поверхности капли по отношению к собственному заряду общий вид комплексной частоты задается в виде: $\omega_n = \text{Re}\omega_n - i\text{Im}\omega_n$. Вещественная компонента $\text{Re}\omega_n$ соответствует собственной частоте осцилляций, а мнимая отрицательная часть определяет полный декремент затухания $\text{Im}\omega_n = \eta_1 + \eta_2$, связанный с потерями первоначально запасенной энергии капиллярных осцилляций капли на диссипацию в виде тепла за счет вязкости (η_1) и на генерацию электромагнитных волн (η_2).

При помощи пакета аналитических вычислений, учитывая условие $\eta_2 \ll \text{Re}\omega_n$ (это следует из того, что формула для η_2 , определяемая слагаемыми в (4.55), зависящими от параметра Релея W , будет содержать малый параметр $z_1 = kR \ll 1$), получим комплексные решения кубического уравнения (4.55). Их реальные $\text{Re}\omega_n^{(j)}$ и мнимые $\text{Im}\omega_n^{(j)}$ ($j = 1 - 3$) составляющие для разных диапазонов радиусов капель представляются в виде:

для $R < 42$ мкм:

$$\text{Re}\omega_n^{(1)} = 0 \quad (5.1)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} = -\alpha_1 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.3)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(1)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.4)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.5)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(3)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) - \alpha_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.6)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(1)} = 0 \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.8)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.9)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(1)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) - \alpha_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.10)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.11)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(3)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.12)$$

$$\alpha_0 \equiv \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \frac{1}{y} (l_1^2 - 3l_{21}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} y, \alpha_1 \equiv -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \frac{1}{y} (l_1^2 - 3l_{21}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} y, \alpha_2 \equiv \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y}$$

$$y_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} |2l_1^3 - 9l_1 l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}|, y \equiv |2l_1^3 - 9l_1 l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}|^{\frac{1}{3}}$$

$$x \equiv |27l_1^2 l_{21}^2 - 108l_{21}^3 - 108l_1^3 l_{31} + 486l_1 l_{21} l_{31} - 729l_{31}^2|$$

В выражениях (5.1)–(5.12) первый корень $\omega_n^{(1)} = -i \operatorname{Im} \omega_n^{(1)}$ соответствует зарядово-релаксационному апериодическому движению жидкости, второй $\omega_n^{(2)} = \operatorname{Re} \omega_n^{(2)} - i \operatorname{Im} \omega_n^{(2)}$ и третий $\omega_n^{(3)} = -\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} - i \operatorname{Im} \omega_n^{(3)}$ корни определяют затухающие капиллярные осцилляции капли ($\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = \operatorname{Im} \omega_n^{(3)}, \operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = -\operatorname{Re} \omega_n^{(3)}$).

В (5.1)–(5.12) верхний индекс в круглых скобках ($j = 1 - 3$) указывает на порядковый номер корня дисперсионного уравнения (4.55).

Вспомним, что волновое число $k \equiv \operatorname{Re} \omega_n^{(1)} / c$ и, принимая во внимание отсутствие реальной части (5.1), (5.7) мнимой частоты $\omega_n^{(1)}$, из (5.4), (5.10) найдем декремент затухания $\eta_1^{(1)}$ зарядово-релаксационного апериодического движения жидкости:

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_l^{(1)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.13)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_l^{(1)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

Из полного декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ ($j = 2, 3$), определяемого выражениями (5.5), (5.6) при $R < 42$ мкм и (5.11), (5.12) при $R \geq 42$ мкм, выделим отдельные решения для декремента затухания $\eta_l^{(j)}$ ($j = 2, 3$) полоидального движения жидкости в капле (при вязкости $\nu \neq 0$):

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_l^{(2)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.14)$$

$$\eta_l^{(3)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_l^{(2)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_l^{(3)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

Заметим, что полученные соотношения $\eta_l^{(2)}, \eta_l^{(3)}$ определяются двумя первыми слагаемыми в (5.5), (5.6), (5.11), (5.12), не зависящими от волнового числа $k \equiv \frac{\text{Re} \omega_n^{(j)}}{c}$ (в полном декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ принимается $c \rightarrow \infty$).

Подставляя в третье слагаемое в (5.5), (5.6), (5.11), (5.12) волновое число $k = \frac{\text{Re} \omega_n^{(j)}}{c}$ ($j = 2, 3$) и выражения (5.2), (5.3) при $R < 42$ мкм, (5.8), (5.9) при $R \geq 42$ мкм для реальных компонент $\text{Re} \omega_n^{(j)}$ ($j = 2, 3$), из полного декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ (в отсутствие вязкости $\nu = 0$) выразим поправки $\eta_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$), связанные с энергопотерями осциллирующей заряженной капли на излучение электромагнитных волн:

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_2^{(2)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_2^{(3)} = -\sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.15)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_2^{(2)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_2^{(3)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

$$l_{22} \equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2 (n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(\frac{R}{c} \alpha_1 \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right) \right)^{2n+1},$$

где коэффициенты где y_0, y зависят от физических параметров задачи.

Отметим, что поправки $\eta_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$) к декременту затухания на электромагнитное излучение зависят от волнового числа k и определяются конечным значением скорости распространения электромагнитных волн в вакууме c .

Для отыскания численных решений дисперсионного уравнения (4.55), положим, что осцилляции капель связаны с возбуждением основной (второй) моды $n = 2$, соответствующей сфероидальным деформациям [20]. Примем для расчетов согласно справочным данным [21]: $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ. Тогда для внутриоблачных капель, имеющих средние заряды $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм), при $R = 3$ мкм справедливо решение:

$$\omega_2^{(1)} = -8.33 \cdot 10^6 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (4.61 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(3)} = (-4.61 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 i) \text{ рад/с}$$

Для капли размером $R = 30$ мкм найдем:

$$\omega_2^{(1)} = -162 \cdot 10^3 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (147 \cdot 10^3 - 5.6 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(2)} = (-147 \cdot 10^3 - 5.6 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с}$$

Используя средние заряды дождевых капель $Q = 7 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 2 \cdot 10^{-3}Q_{кр}$ при $R = 0.25$ мм и $\sim 3 \cdot 10^{-5}Q_{кр}$ при $R = 3.5$ мм), для мелкой облачной капли с радиусом $R = 0.25$ мм получим следующие результаты:

$$\omega_2^{(1)} = -1,55 \cdot 10^5 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (6.1 \cdot 10^3 - 80 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(3)} = (-6.1 \cdot 10^3 - 80 i) \text{ рад/с}$$

Для крупной дождевой капли с характерным линейным размером $R = 3.5$ мм имеем:

$$\omega_2^{(1)} = -154 \cdot 10^3 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (117 - 0.4 i) \text{ рад/с}, \omega_2^{(3)} = (-117 - 0.4 i) \text{ рад/с}$$

Анализ численных расчетов показывает, что первый корень $\omega_2^{(1)}$ является чисто мнимым и соответствует релаксационному аperiодическому затухающему движению жидкости, порожденному перетеканием заряда по возмущенной поверхности капли. Второй $\omega_2^{(2)}$ и третий $\omega_2^{(3)}$ корни содержат одинаковые мнимые части и разные по знаку реальные компоненты. При этом $\omega_2^{(2)}$, $\omega_2^{(3)}$ ответственны за быстро затухающие капиллярные осцилляции облачных и дождевых капель. В этом случае величина декремента затухания $\eta_1^{(j)}$ ($j = 2, 3$) полоидального движения жидкости в капле на один-два порядка слабее частоты собственных осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$).

Кроме того, заметим, что среди решений $\omega_2^{(2)}$, $\omega_2^{(3)}$ физически значимым является второй корень $\omega_2^{(2)}$, имеющий положительную вещественную часть $\text{Re}\omega_2^{(2)} > 0$. В связи с этим для дальнейшего анализа будем использовать решение $\omega_2^{(2)} = \text{Re}\omega_n^{(2)} - i(\eta_1^{(2)} + \eta_2^{(2)})$.

В рассматриваемой ситуации декремент затухания $\eta_1^{(2)}$ проявляется в подавлении осцилляций капли и, следовательно, на прекращении радиоизлучения на соответствующей частоте. Так, осцилляции (электромагнитное излучение) на основной моде $n = 2$ облачной капли размером $R = 3$ мкм исчезают при значении кинематической вязкости $\nu = 0.08$ см²/с, а для капли $R = 30$ мкм — при $\nu = 0.26$ см²/с.

Численные расчеты показывают, что по сравнению с каплей идеально проводящей жидкости учет конечности скорости перераспределения заряда приводит к не-

большому увеличению собственной частоты осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ при снижении радиуса капли.

Из рис. 1, на котором представлены расчетные зависимости $\text{Re}\omega_2^{(2)}(R, W)$ по формуле (5.2), прослеживается весьма быстрое уменьшение частоты осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ при возрастании размера R и заряда Q капли (величины параметра Релея W). Заметим, что кривые построены для основной моды $n = 2$ при значениях параметра Релея, достаточно близких к критическому $W_{\text{кр}} = 4$. Однако в реальных условиях грозового облака заряды на каплях такие, что величина $W \ll 1$, поэтому приведенные зависимости имеют лишь качественный характер.

Графики зависимостей $\eta_1^{(2)}(R, \nu)$, изображенные в соответствии с (5.14) на рис. 2, показывают, что декремент затухания $\eta_1^{(2)}$, при возрастании радиуса R — снижается по обратной квадратичной зависимости, а с ростом кинематической вязкости ν увеличивается по линейному закону.

Согласно численным расчетам по (5.13) электропроводность жидкости γ и поверхностная подвижность носителей заряда b не оказывают влияние на декремент затухания $\eta_1^{(2)}$ капиллярных осцилляций. При этом зависимость собственной частоты $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ от величин γ, b весьма мала.

Из общефизических соображений очевидно, что периодически меняющаяся амплитуда $M_n(t)$ возмущения $\xi(\theta, t)$ равновесной формы капли за счет вязкости затухает со временем по экспоненциальному закону:

$$M_n(t) = \varepsilon R \cos(\text{Re}\omega_n^{(2)}t + \varphi) \exp(-\eta_1^{(2)}t) \quad (5.16)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\eta_1^{(2)}}{\text{Re}\omega_n^{(2)}} \right)^2}, \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{\eta_1^{(2)}}{\text{Re}\omega_n^{(2)}} \right),$$

где $\varepsilon_0 = 0.1$ — безразмерная амплитуда возмущения.

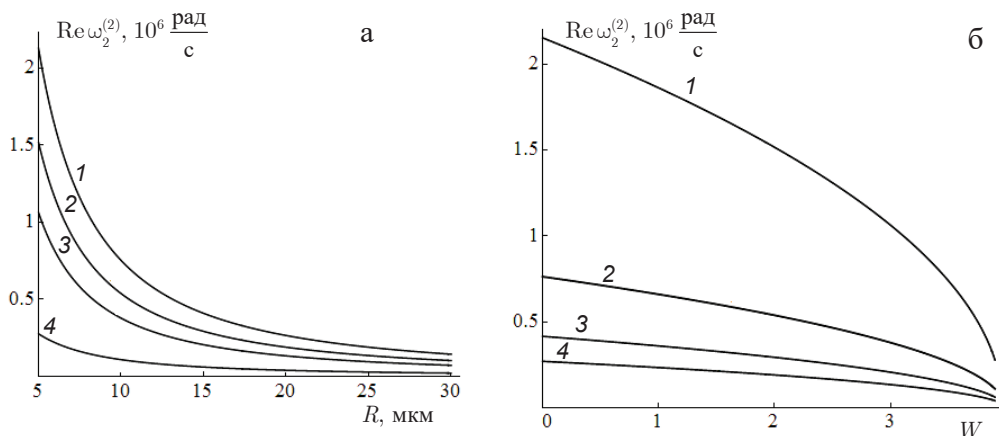


Рис. 1. Зависимость собственной частоты $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ капиллярных осцилляций вязкой заряженной облачной капли

а: от ее радиуса R ; кривые 1–4 соответствуют значениям $W = 0.1, 2, 3, 3.9$.

б: от величины параметра Релея W ; кривые 1–4 соответствуют значениям $R = 5, 10, 15, 20$ мкм
 Расчеты проведены по формуле (5.2) при $n = 2, \sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ.

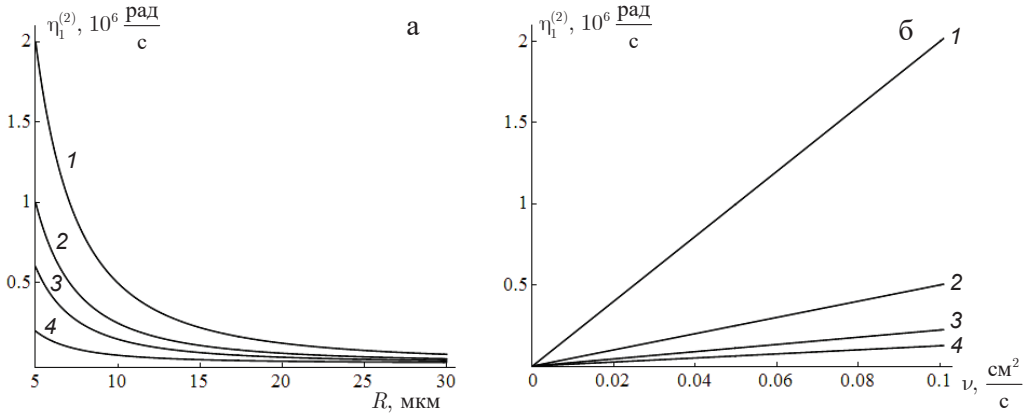


Рис. 2. Зависимость декремента затухания $\eta_l^{(2)}$ капиллярных осцилляций вязкой облачной капли с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06 Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002 Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм) от:
 а: радиуса R (а) кривые 1–4 соответствуют значениям $\nu = 0.01, 0.03, 0.05, 0.1$ см²/с
 б: коэффициента кинематической вязкости ν ,
 кривые 1–4 соответствует значениям $R = 5, 10, 15, 20$ мкм
 Расчеты проведены по формуле (5.14) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

На рис. 3,а иллюстрируются численно рассчитанные по соотношению (5.16) зависимости от времени t амплитуды $M_2(t)$ второй моды $n = 2$ капиллярных осцилляций мелкой облачной капли при различных радиусах. На приведенных графиках можно наблюдать, что внутриоблачная капля наименьшего размера $R = 3$ мкм, осциллирующая на частоте $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 4.61 \cdot 10^6$ рад/с с декрементом затухания $\eta_1^{(2)} = 0.56 \cdot 10^6$ рад/с и периодом затухающих осцилляций $T = 1.37$ мкс, возвращается к равновесной форме, совершив ≈ 8 колебаний. Для капли большего радиуса $R = 4$ мкм с характеристиками осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 3 \cdot 10^6$ рад/с, $\eta_1^{(2)} = 0.31 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2.1$ мкс число колебаний до полного их исчезновения увеличивается до ≈ 10 . Капля размером $R = 5$ мкм при $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 2.15 \cdot 10^6$, $\eta_1^{(2)} = 0.2 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2.93$ мкс совершает уже ≈ 11 колебаний за время вязкого затухания, при котором искажение равновесной формы снижается до нуля.

Из результатов численных расчетов и рис. 1,а можно сделать заключение, что снижение радиуса капли приводит к уменьшению периода T затухающих осцилляций так, что чем меньше размер капли, тем ее осцилляции быстрее гасятся вязкостью.

Для сравнения на рис. 3,б приведены временные зависимости амплитуды $M_5(t)$ пятой моды $n = 5$, построенные по (5.16) при тех же значениях физических параметров, что на рис. 3,а. Несложно видеть, что скорость снижения амплитуды отклонения поверхности капли от равновесной сферы увеличивается с ростом номера моды. Указанное обстоятельство объясняется повышением величины декремента затухания $\eta_1^{(2)}$ на высоких колебательных модах (см. рис. 4): увеличение номера моды в три раза приводит к возрастанию $\eta_1^{(2)}$ на порядок.

Для иллюстрации изобразим временную зависимость экспоненциально убывающей со временем амплитуды $M_n(t)$ возмущения $\xi(\theta, t)$ в случае релаксационного движения внутренней среды капли, порождаемого переносом заряда по искривленной сферической поверхности, в соответствие с законом:

$$M_n(t) = \varepsilon_0 \text{Rexp}(-\eta_1^{(1)} t), \quad (5.17)$$

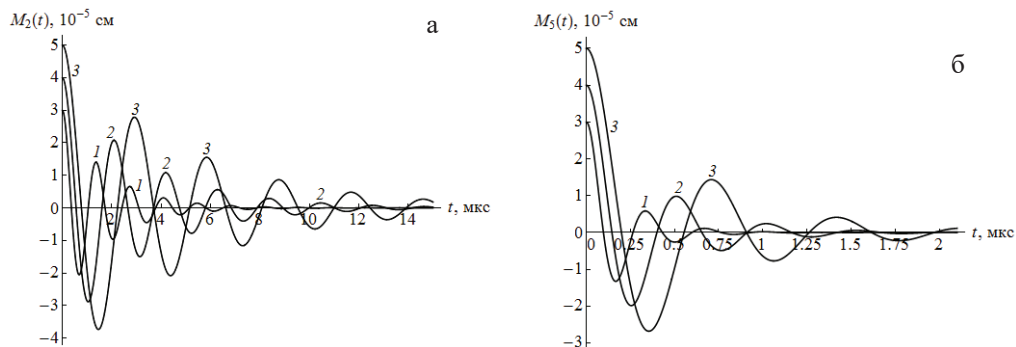


Рис. 3. Зависимость амплитуд $M_n(t)$ различных мод возмущения равновесной формы вязкой облачной капли с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.03Q_{кр}$ при $R = 5$ мкм) от времени t .

а – $n = 2$, б – $n = 5$. Кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 3, 4, 5$ мкм.

Расчеты проведены по формуле (5.16) при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

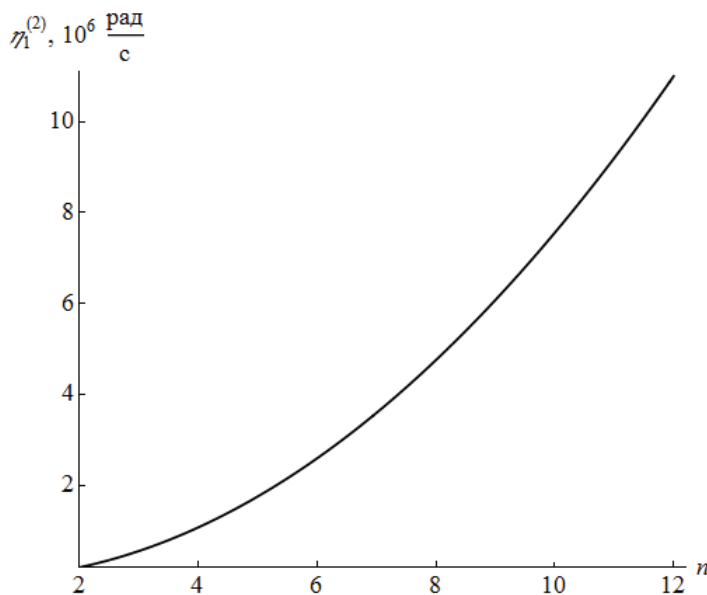


Рис. 4. Зависимость декремента затухания $\eta_1^{(2)}$ капиллярных осцилляций капли радиуса $R = 5$ мкм с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03Q_{кр}$) от номера моды n .

Расчеты проведены по формуле (5.14) при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

где безразмерная амплитуда возмущения принимается $\varepsilon_0 = 0.1$.

Из рис. 5, полученному по выражению (5.17) при $n = 2$, видно, что релаксационное движение жидкости имеет аperiодический быстро затухающий характер. В соответствие с численными расчетами для декремента затухания $\eta_1^{(1)}$ зарядово-релаксационного движения жидкости прослеживается линейная зависимость от проводимости γ и подвижности зарядов b . Причем, увеличение γ сказывается на весьма слабом возрастании декремента затухания $\eta_1^{(1)}$, а увеличение подвижности b в два раза приводит к удвоению величины $\eta_1^{(1)}$.

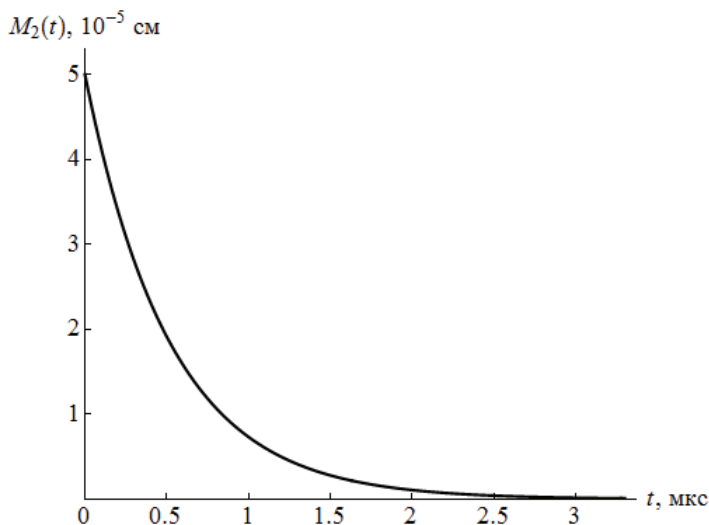


Рис. 5. Временная эволюция амплитуды $M_2(t)$ основной моды $n = 2$ возмущения равновесной формы капли радиуса $R = 5$ мкм с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03Q_{кр}$), соответствующая зарядово-релаксационному аperiodическому движению жидкости.

Расчеты проведены по формуле (5.17) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

На рис. 6 и 7 изображены рассчитанные по (5.15) зависимости декремента затухания $\eta_2^{(2)}$, связанного с излучением электромагнитных волн, от удельной электропроводности жидкости γ и подвижности носителей заряда b . Приведенные кривые качественно ожидаемы из общефизических тенденций: поправка к декременту затухания $\eta_2^{(2)}$ почти линейно возрастает при изменении величин γ , b .

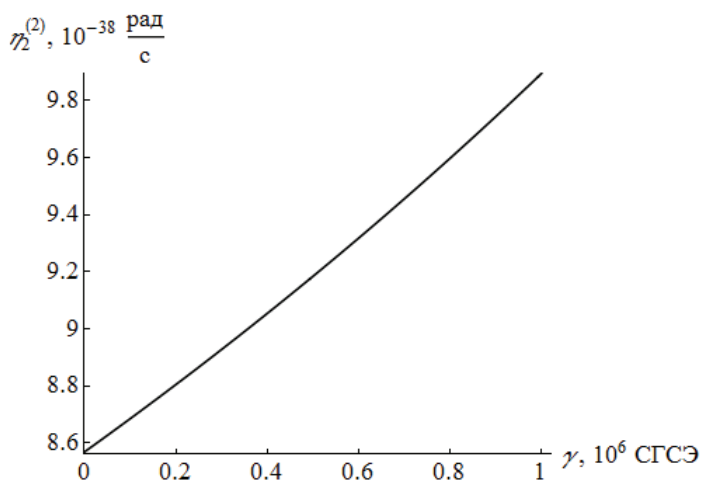


Рис. 6. Зависимость величины поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн капли радиуса $R = 10$ мкм и заряда $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01Q_{кр}$), от удельной проводимости γ .

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

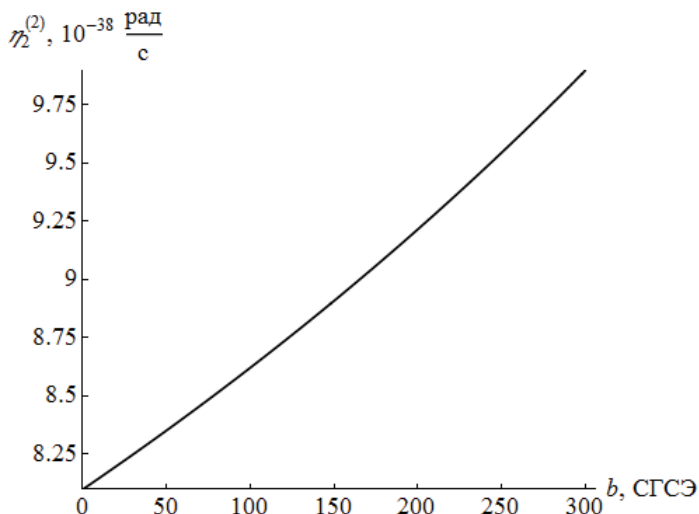


Рис. 7. Зависимость величины поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн капли радиуса $R = 10$ мкм и заряда $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01Q_{\text{кр}}$), от подвижности носителей заряда b .

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

Что касается малой добавки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания капиллярных осцилляций, определяемой энергопотерями капли на электромагнитное излучение, рассмотрим ее поведение при конечных значениях электропроводности жидкости (рис. 8,а), а также в двух предельных случаях: для капли идеально проводящей жидкости ($\epsilon_1 \rightarrow \infty$) (рис. 8,б) и капли идеально диэлектрической жидкости ($\epsilon_1 \rightarrow 0$) (рис. 8,в). Из графиков рис. 8, построенных в соответствии с (5.15), можно заметить, что величина поправки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания, связанного с излучением электромагнитных волн, сильно заряженных капель в случае конечной удельной проводимости жидкости на порядок ниже по сравнению с идеальным проводником и на два порядка выше по сравнению с идеальным диэлектриком. Из этого факта следует, что чисто диэлектрическая капля, для которой заряд равномерно распределен по поверхности и заморожен в нее, при осцилляциях излучает электромагнитные волны с наименьшей интенсивностью.

Как видно из рис. 8, увеличение параметра Релея W приводит к весьма быстрому нарастанию добавки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания капиллярных осцилляций капли, связанного с радиоизлучением. Достигнув наибольшего значения, величина $\eta_2^{(2)}$ снижается до нуля в широком диапазоне изменения параметра Релея W (вплоть до критических значений). Кроме того, рис. 8 показывает, что возрастание размера капли сказывается на быстром уменьшении малой поправки $\eta_2^{(2)}$.

6. Электромагнитное излучение. Известно, что вихревая полоидальная часть течения связана с вязкостью реальной жидкости. Тогда механическая энергия капиллярных осцилляций капли, определяемая кинетической энергией полоидальной составляющей поля скоростей движения реальной жидкости, теряется на диссипацию в виде тепла. В случае маловязкой жидкости положим диссипацию энергии капиллярных осцилляций пренебрежимо малой. Учитывая это обстоятельство, в приближении идеальной жидкости ($\nu = 0$) вязкое затухание отсутствует. Тогда согласно закону сохранения энергии потери механической энергии капиллярных осцилляций,

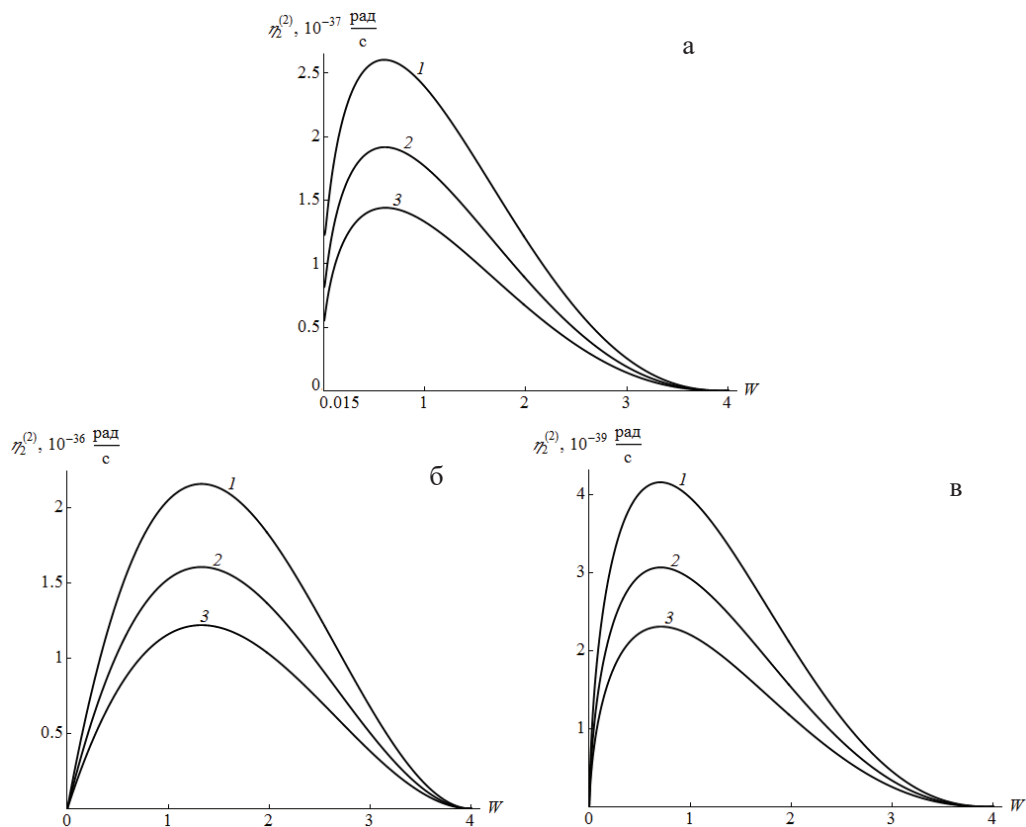


Рис. 8. Зависимость поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн заряженной облачной капли, от величины параметра Релея W .

а – $\epsilon_1 = 80$, б – $\epsilon_1 = \infty$, в – $\epsilon_1 = 0$; кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 26, 28, 30$ мкм.

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

определяемые кинетической энергией потенциальной составляющей поля скоростей течения идеальной жидкости, связываются с излучением электромагнитных волн, вызванным наличием ускоренно движущегося заряда. Принимая во внимание, что энергия поверхностных колебаний n -й моды ϑ_n снижается по экспоненциальному закону: $\vartheta_n \sim \exp(-2\eta_2)$, запишем общее выражение для мощности излучения [1]:

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} = 2\eta_2\vartheta_n, \quad (6.1)$$

где величина η_2 находится из дисперсионного уравнения (4.56) в виде [22]:

$$\eta_2 = W \frac{1}{2} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1}} n^{n+2} ((n-1)(n+2))^n (n+1) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right)^n \quad (6.2)$$

При использовании теоремы вириала представим ϑ_n в виде удвоенной средней за период кинетической энергии потенциального движения жидкости в капле:

$$\vartheta_n = \frac{2\pi\rho R^3 M_n^2 \omega_{n0}^2}{n(2n+1)}, \quad (6.3)$$

где $M_n = \varepsilon R$ – размерная амплитуда осцилляций n -ой колебательной моды.

В итоге, подставляя (6.2), (6.3) в (6.1), получим окончательное аналитическое выражение для мощности излучения единичной заряженной капли идеальной проводящей жидкости, осциллирующей на фиксированной частоте ω_{n0} :

$$I = \frac{2\pi W \sigma^{n+2} M_n^2 n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1} (n+1)}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1} (2n+1)} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right)^{n+1} \quad (6.4)$$

Согласно данным натурных измерений большая часть облачной воды сосредоточена в каплях с типичными радиусами от 3 до 30 мкм и концентрацией $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Максимум функции распределения таких капель по размерам приходится на диапазон 3–7 мкм [21].

Подставляя в (6.4) приведенные ранее средние характеристики внутриоблачных капель, осциллирующих на основной (второй) моде $n = 2$ с амплитудой $M_2 = 0.1R$, несложно оценить интенсивность электромагнитного излучения, равную $I \sim 1 \cdot 10^{-39} \text{ эрг/с}$, для капли размером $R = 3 \text{ мкм}$ и зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-5} \text{ СГСЭ}$ ($\sim 0.16Q_{\text{кр}}$), осциллирующей на частоте $\omega_{20} = 4.6 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ с поправкой к декременту невязкого затухания $\eta_2 = 2 \cdot 10^{-33} \text{ рад/с}$, идущего на генерацию электромагнитного излучения. При возрастании радиуса капли на порядок $R = 30 \text{ мкм}$, имеющей заряд $Q = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ}$ ($\sim 0.11Q_{\text{кр}}$), мощность излучения снижается на два порядка величины: $I \sim 7 \cdot 10^{-42} \text{ эрг/с}$ при $\omega_{20} = 146 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ и $\eta_2 = 1 \cdot 10^{-37} \text{ рад/с}$.

На рис. 9 приведены результаты расчетов по формуле (6.4) в виде зависимостей $I(R, W)$. Видно, что интенсивность излучения I единичной облачной капли идеальной идеально проводящей жидкости, осциллирующей на основной (второй) моде $n = 2$, при возрастании радиуса R убывает по обратному квадратичному закону. Несложно заметить, что график функции $I(W)$ (рис. 9, а) качественно повторяет зависимость поправки $\eta_2^{(2)}(W)$ к декременту затухания капиллярных осцилляций капли маловязкой идеально проводящей жидкости, определяемого потерями на электромагнитное излучение (рис. 8, б). Интересно отметить, что учет малой вязкости по

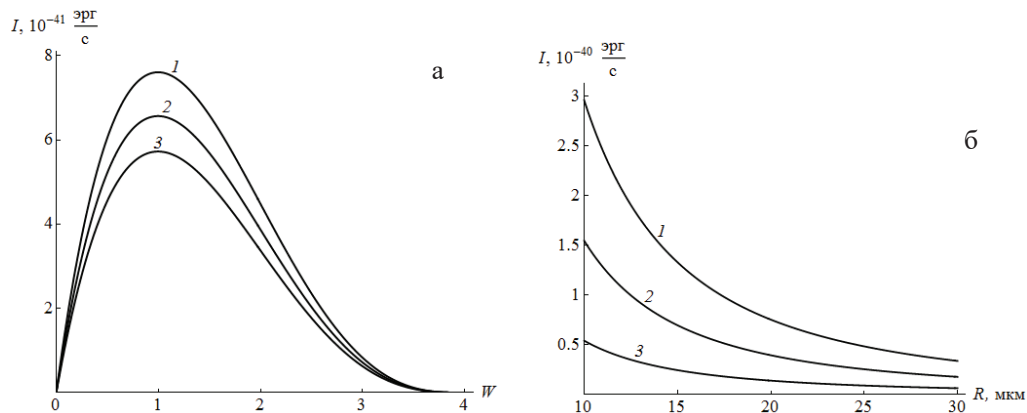


Рис. 9. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной капли идеальной идеально проводящей жидкости от параметра Релея W (а) и радиуса R (б).

а: Кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 26, 28, 30 \text{ мкм}$.

б: Кривые 1–3 соответствуют значениям $W = 2, 2.5, 3$.

Расчеты проведены по формуле (5.4) при $n = 2$, $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$

сравнению с идеальной жидкостью приводит лишь к весьма малым количественным изменениям.

Сравним теперь между собой интенсивности излучения I заряженной невязкой идеально проводящей капли в двух случаях: учитывая в степенном асимптотическом разложении сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ при малых z (см. [18, стр. 257, ф-ла 10.1.17]) все члены ряда по методике Н.А. Богатова [7] и сохраняя только старшие слагаемые как это делалось в [1].

Зависимость $I(R, W)$ (см. рис. 10), построенная для второй моды осцилляций $n = 2$ по выражению [1]:

$$I = \frac{2\pi W \sigma^2 M_n^2}{c\rho R^2} \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(2n+1)} \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right), \quad (6.5)$$

указывает на качественные и количественные расхождения по сравнению с численными расчетами по формуле (6.4) при $n = 2$ в методике Н.А. Богатова. Из выражения (6.5) при амплитуде возмущения $M_2 = 0.1R$ и рис. 10 видно, что мощность излучения не зависит от размера капли и на 31–33 порядка величины выше (при изменении радиуса облачной капли от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм).

Следует отметить, что использование корректного асимптотического представления сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ (а именно: учет всех членов степенного ряда) приводит к качественному и количественному согласованию полученных результатов интенсивности излучения капли идеально проводящей жидкостью, осциллирующей на основной (второй) моде $n = 2$, выполненных на основе физико-химической гидродинамики двумя методами: на основе закона сохранения энергии и в рамках теории излучения [11].

Ясно, что при снижении электропроводности жидкости уже сказывается конечность скорости переноса электрического заряда при деформациях равновесной фор-

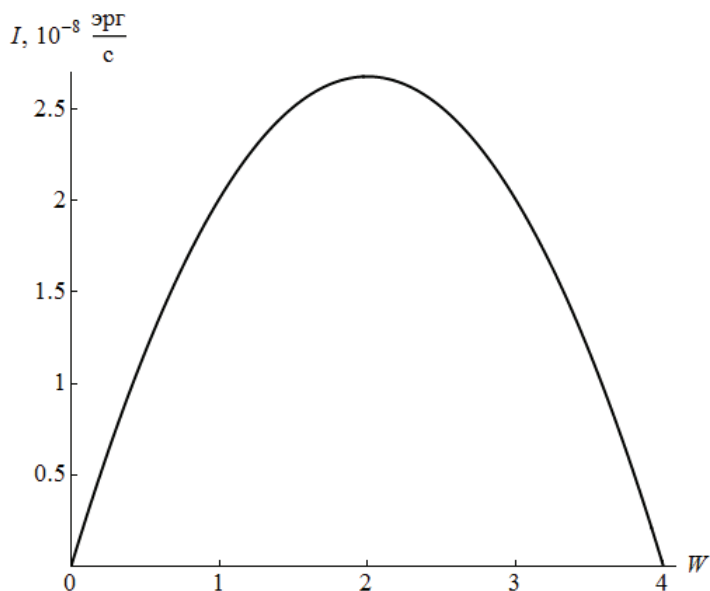


Рис. 10. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной капли идеально проводящей жидкости от параметра Релея W , построенная по [1].

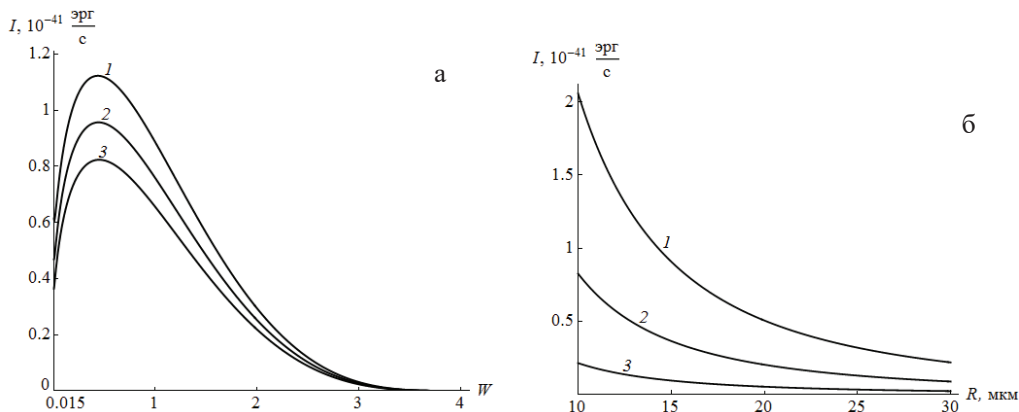


Рис. 11. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной вязкой капли конечной электропроводности от параметра Релея W (а) и радиуса R (б).

Расчеты проведены при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

мы капли. Данное обстоятельство приводит к снижению характеристик излучения, полученных без учета эффекта релаксации заряда. Примем для оценки $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ. Так для наименьшей облачной капли $R = 3$ мкм с зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16Q_{кр}$), осциллирующей на частоте $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 4.56 \cdot 10^6$ рад/с, получена интенсивность излучения $I \sim 8 \cdot 10^{-40}$ эрг/с при добавке к декременту затухания капиллярных осцилляций, равной $\eta_2^{(2)} = 1 \cdot 10^{-33}$ рад/с. Для наиболее крупной внутриоблачной капли $R = 30$ мкм, несущей заряд $Q = 1.1 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.11Q_{кр}$), интенсивность излучения составила $I \sim 5 \cdot 10^{-42}$ эрг/с при $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 146 \cdot 10^3$ рад/с, $\eta_2^{(2)} = 7 \cdot 10^{-38}$ рад/с.

Из проведенных численных расчетов, проиллюстрированных на рис. 11, для заряженной капли вязкой жидкости с конечной электропроводностью, осциллирующей на второй моде $n = 2$, выясняется, что интенсивность излучения I при изменении размера капли R снижается по закону $\sim R^{-2}$. При этом зависимость мощности излучения I от величины параметра Релея W (рис. 11,а) качественно схожа с графиком зависимости малой поправки $\eta_2^{(2)}(W)$ к декременту затухания, связанного с излучением электромагнитных волн (рис. 8,а).

Из сравнения рис. 9 и 11 можно сделать заключение, что учет конечности скорости переноса электрического заряда при капиллярных осцилляциях капли маловязкой жидкости приводит к снижению (примерно на порядок величины или в пределах порядка величины в зависимости от параметра Релея W) интенсивности излучения.

Заключение. Согласно выше изложенному учет конечности скорости переноса заряда приводит к уменьшению интенсивности радиоизлучения от осциллирующей заряженной капли, и в первую очередь этому способствует вязкость жидкости, снижающая частоты осцилляций.

Работа выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
2. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Голованов А.С., Рыбакова М.В. Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли // ЖТФ. 2002. Т. 72. № 1. С. 8–14.

3. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли конечной проводимости // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С.74–80.
4. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Крючков О.С. Об осцилляциях заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 6. С.13–21.
5. Богатов Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // Сб. тез. докл. VI Международной конф. "Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений". Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН. 2013. С.22–26.
6. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 11. С.22–27.
7. Белоцерковский А.В., Дивинский Л.И. Активно-пассивная радиолокация грозовых и грозоопасных очагов в облаках. СПб: Гидрометеиздат, 1992. 286 с.
8. Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 463 с.
9. Горелик А.Г., Козлов А.И., Стерлядкин В.В. Рассеяние радиоволн на несферических и осциллирующих дождевых каплях // Науч. вест. МГТУ ГА. 2012. № 176. С. 25–30.
10. Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. Распознавание опасных явлений погоды в современной метеорологической радиолокации // Проблемы военнопприкладной геофизики и контроля состояния природной среды : материалы VI Всерос. науч. конф. СПб. 2020. С. 40–50.
11. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Этюды о грозе. Огни св. Эльма, свечение воронок смерчей, разные молнии. М.;Берлин: Durect-MEDIA, 223 с.
12. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
13. Beard K.V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophysical research letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
14. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
15. Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач. М.: Русайнс, 2020. 140 с.
16. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
17. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
19. Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
20. Григорьев А.И. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 10. С.1–7.
21. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
22. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. О влиянии эффекта релаксации вязкости жидкости на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли // Коллоидный ж. 2023. Т. 85. № 4. С.483–501.

Effect of Charge Relaxation Effect on Electromagnetic Radiation Intensity of Oscillating Viscous Liquid Drop

A. I. Grigoryev^{a, #}, N. Yu. Kolbneva^{b, ##}, S. O. Shiryaeva^{b, ###}

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia

^bDemidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

e-mail: grigorai@mail.ru[#], kolbneva-nata@yandex.ru^{##}, shir@uniyar.ac.ru^{###}

Theoretical asymptotic methods have shown that the electric charge relaxation effect affects the physical characteristics of the electromagnetic radiation of the oscillating charged droplet. Analytical expressions are obtained for frequencies, decrements of attenuation of capillary

oscillations of droplets due to viscous attenuation and energy losses on radiation. It has been shown that the frequencies of electromagnetic radiation of cloud droplets, realized in the ranges of hundreds of kilohertz and megahertz units, decrease with an increase in the radius and charge parameter of the emitting droplet, as well as attenuation decrements associated with radiation. Intensity of emission of electromagnetic waves decreases with decrease of electrical conductivity and mobility of charges in liquid.

Keywords: charged drop, capillary oscillations, charge relaxation

REFERENCES

1. *Kalechits V.I., Nakhutin I.E., Poluektov P.P.* On the possible mechanism of radio emission of convective clouds // Dokl. AN USSR, 1982, vol. 262, no.6, pp. 1344–1347.
2. *Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I., Golovanov A.S., Rybakova M.V.* Electromagnetic radiation generated by linear vibrations of a charged drop // ZhTF, 2002, vol.72, no. 1S, pp. 8–14.
3. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* Electromagnetic radiation of an oscillating charged drop of finite conductivity // Izv. RAS. Fluid&Gas Mech., 2002, no. 5, pp.74–80.
4. *Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I., Kryuchkov O.S.* On oscillations of a charged drop of viscous liquid with final conductivity // ZHTF, 2007, vol. 77, no.6, pp.13–21.
5. *Bogatov N.A.* Electromagnetic field generated by capillary oscillations of drops // VI Int. Conf. "Solar-Earth Connections and Physics of Earthquake Precursors." Petropavlovsk-Kamchatsky, FEB RAS. Abstracts. 2013. pp.22–26.
6. *Belonozhko D.F., Grigoriev A.I.* On the correct form of recording the law of preserving the amount of matter at the moving interface of two liquid media // ZHTF, 2004, vol.74, no. 11, pp. 22–27.
7. *Belotserkovsky A.V., Divinsky L.I.* Active-Passive Radar of Thunderstorm and Menacing Foci in the Clouds. St. Petersburg: Hydrometeoizdat, 1992. 286 p.
8. *Kachurin L.G.* Physical Basis of Impact on Atmospheric Processes. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1990. 463 p.
9. *Gorelik A.G., Kozlov A.I., Sterlyadkin V.V.* Scattering of radio waves on non-spherical and oscillating rain drops // Sci. Vest. MSTU GA, 2012, no. 176, pp. 25–30.
10. *Zhukov V.Yu., Shchukin G.G.* Recognition of weather hazards in modern meteorological radar // Problems of Prisoner of War Geophysics and Monitoring of the State of the Natural Environment: Materials All Russian Sci. Conf. SPb.: 2020. pp. 40–50.
11. *Grigoriev A.I., Shiryayeva S.O.* Etudy about a Thunderstorm. Lights of St. Elm, the Glow of Tornadoes, Different Lightning. Moscow;Berlin: Durect-MEDIA. 223 p.
12. *Sterlyadkin V.V.* Full-scale measurements of precipitation drop oscillations // Izv. USSR AS. FAO, 1988, vol.24, no.6, pp. 613–621.
13. *Beard K.V., Tokay A.* A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett., 1991, vol.18, no.12, pp. 2257–2260.
14. *Naiife A.H.* Methods of Perturbation. Moscow: Mir, 1976. 455 p.
15. *Lazaryants A.E., Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I.* Scalarization of Vector Boundary Problems. Moscow: Russines, 2020. 140 p.
16. *Arfken G.* Mathematical Methods in Physics. Moscow: Atomizdat, 1970. 712 p.
17. *Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Kherson V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Leningrad: Nauka, 1975. 436 p.
18. *Abramowitz M., Steegan I.* Handbook of Mathematical Functions. Moscow: Nauka, 1979. 830 p.
19. *Rayleigh.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag., 1882, vol.14, pp.184–186.
20. *Grigor'ev A.I.* On some regularities of the implementation of instability of a highly charged viscous drop // ZHTF, 2001, vol.71, no.10, pp.1–7.
21. *Mazin I.P., Hrgian A.H., Imyaninov I.M.* Clouds and Cloud Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. 647 p.
22. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* On the effect of the liquid viscosity relaxation effect on the electromagnetic radiation intensity of an oscillating charged drop // Colloid J., 2023, vol.85, no. 4, pp. 483–501.