ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2024, том 88, № 5, с. 679–691

УДК 532.59

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г.

А. А. Очиров[1,*], Ю. Д. Чашечкин[1,]**

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: otchirov@mail.ru, **e-mail: yulidch@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.04.2024 г.
После доработки 05.09.2024 г.
Принята к публикации 10.09.2024 г.

В линейном приближении рассматривается распространение периодического возмущения вдоль свободной поверхности вязкой стратифицированной жидкости в однородном гравитационном поле с учетом действия поверхностного натяжения. Получены полные решения линеаризованной системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей, определяющие регулярные волновые и сингулярные лигаментные компоненты. Рассчитана тонкая структура полей физических переменных: скорости жидкости, импульса, плотности и ее градиента.

Ключевые слова: периодические движения, свободная поверхность, вязкость, стратификация, тонкая структура, распределение давления, распределение плотности

DOI: 10.31857/S0032823524050031 EDN: JQAPNX

1. Введение

Перенос вещества нелинейными потенциальными волнами на поверхности однородной жидкости, установленный методами теории возмущений еще в середине XIX века [1], продолжает изучаться и теоретически, и экспериментально в лабораторных и природных условиях [2–4] в силу распространенности и практической важности явления. В последние годы развитие исследований волнового переноса было активизировано изучением движения поплавков (лагранжевых дрифтеров) [5] и экологических проблем, вызванных увеличением объема плавающего пластика и других загрязнителей в морской среде [6–8]. О математической сложности задачи описания волнового переноса вещества свидетельствует парадоксальное отсутствие рассчитанного во втором порядке теории возмущений стоксова дрейфа [1] в теории вихревых волн Герстнера [9], природа которого продолжает активно изучаться [10].

В последние годы внимание уделяется анализу переноса вещества и в приповерхностном свободном [11–13], и в подледном [14], и в придонном пограничном слое [15]. Проводятся расчеты взаимодействия процесса волнового переноса с течениями [16–18] и вихрями Лэнгмюра [19]. сопровождающегося формированием полос плавающих водорослей и пузырьков, вытянутых вдоль направления ветра [20].

В большинстве оригинальных работ и базовых трактатах [21–23] теория поверхностных волн развивается в приближении однородной жидкости, хотя, как правило, и в природных, и лабораторных условиях жидкости гетерогенны вследствие неоднородности распределений давления, температуры, концентрации растворенных веществ и взвешенных частиц. В поле массовых сил плотности жидкостей возрастают с глубиной (уменьшаются с высотой в атмосфере) – среды естественно стратифицируются. Наряду с общей плавной стратификацией, и в атмосфере, и в океане наблюдается тонкая структура, в которой однородные слои разделены более тонкими высокоградиентными прослойками [24].

Общая стратификация создает необходимые условия для существования внутренних волн, теоретический анализ которых, впервые проведенный в [25], отражен в отдельных разделах трактатов [21, 23] и монографии [26]. В последние годы, наряду с изучением общих свойств волновых процессов в гетерогенных средах [27], внимание уделяется анализу волновых полей, создаваемых равномерно движущимися источниками [28–31].

Волновой перенос вещества в слоистых средах рассмотрен в [32]. Влияние вязкости на распространение поверхностных волн проанализировано в [33, 34]. Методика одновременного учета влияния стратификации и действия диссипативных факторов на динамику и структуру периодических течений предложена в [35].

Совместный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований динамики и структуры периодических гравитационных волн в жидкости показал, что ряд ключевых вопросов теории волнового дрейфа в однородной жидкости все еще нуждается в уточнении и экспериментальном подтверждении [36]. Цель данной работы – анализ распространения поверхностных периодических возмущений, включающих волны и тонкоструктурные компоненты [24, 37] с учетом эффектов стратификации и диссипации.

2 2. Математическая формулировка задачи

В основу рассмотрения положена система фундаментальных уравнений механики жидкостей, включающая определяющую среду уравнения состояния для потенциала Гиббса G и плотности ρ [35]. Система дифференциальных уравнений неразрывности, переноса импульса, температуры, концентрации примесей в пренебрежении эффектами Людвига–Соре и Дюфура имеет вид [21]:

$$\begin{gathered}
G = G\left(P,T,S_i\right), \quad \rho = \rho\left(P,T,S_i,\right) \\
\partial_t\rho + \nabla_j\left(p^j\right) = Q_\rho \\
\partial_t\left(p^i\right) + \nabla_j\Pi^{ij} = \rho g^i + 2\varepsilon^{ijk}p_j\Omega_k + Q^i \\
\partial_t\left(\rho T\right) + \nabla_j\left(p^jT\right) = \Delta\left(\kappa_T\rho T\right) + Q_T \\
\partial_t\left(\rho S_i\right) + \nabla_j\left(p^jS_i\right) = \Delta\left(\kappa_{S,i}\rho S_i\right) + Q_{S,i}
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь P,T,S_i – термодинамические величины, обозначающие давление, температуру и концентрацию i-ой примеси – производные термодинамических потенциалов [38], p^i – компоненты импульса, $Q_\rho, Q^i, Q_T, Q_{S_n}$ – источники массы, импульса, тепла и растворенного вещества соответственно, Π^{ij} – компоненты тензора плотности потока импульса, ε^{ijk} – символ Леви-Чивиты, Ω_k – угловая скорость, $\kappa_T, \kappa_{S,i}$ – коэффициенты температуропроводности и диффузии i-ой примеси соответственно.

Примем ряд упрощений для решения задачи. Будем производить рассмотрение в двумерной постановке в декартовой системе координат Oxz, в которой вертикальная ось Oz направлена вверх против ускорения свободного падения $\mathbf{g}$, ось Ox определяет равновесное положение свободной поверхности вязкой равномерно стратифицированной жидкости, занимающей все нижнее полупространство $z < 0$. Рассмотрение будем проводить без указания природы стратификации в пренебрежении эффектами глобального вращения. В этом случае уравнение состояния заменяется выражением для неоднородной плотности:

$$\rho = \rho_{00}\left(r(z) + \tilde{\rho}(x,z,t)\right)$$

Здесь $\rho_0(z) = \rho_{00}r(z)$ – профиль невозмущенной плотности, ρ_{00} – ее значение на равновесном уровне $z = 0$, функция $r(z)$характеризует равновесную стратификацию жидкости, а периодические возмущения плотности, связанные со смещениями свободной поверхности, определяются функцией $\tilde{\rho}(x,z,t)$. Система уравнений в этом случае заметно упрощается:

$$z < \zeta : \rho\left(\partial_t\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right) = \rho\nu\Delta\vec{u} - \nabla P + \rho\vec{g} \tag{2.3}$$

$$\partial_t\rho + \vec{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $\vec{u} = (u,w)$ – поле скоростей, давление в жидкости P определяется суммой атмосферного давления P_0, гидростатического $P_\zeta = \int_z^\zeta \rho(x,\xi,t)g\,d\xi$ и возмущением $\tilde{P}(x,z,t)$:

$$P = P_0 + P_\zeta + \tilde{P}(x,z,t) \tag{2.5}$$

В приближении Буссинеска жидкость считается несжимаемой, а плотность – постоянной во всех слагаемых за исключением слагаемых, включающих ускорение свободного падения в уравнении Навье–Стокса и слагаемых, включающих градиент плотности в уравнении неразрывности. В этом случае компоненты вектора скорости можно представить в виде пространственных производных функции тока ψ:

$$u = \partial_z\psi, \quad w = -\partial_x\psi \tag{2.6}$$

После линеаризации уравнений движения математическая формулировка задачи (2.3)–(2.4) для поверхностных периодических возмущений принимает вид:

$$\begin{gathered} z < 0: \\ \rho_{00}\left(\partial_t\vec{u} - \nu\Delta\vec{u}\right) + \nabla P - \rho\vec{g} = 0 \\ \rho_{00}\left(\partial_t\tilde{\rho} + \vec{u}\cdot\nabla r(z)\right) = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

С учетом (2.2) и (2.6) из уравнений (2.7) можно получить уравнение, содержащее только функцию тока. Для этого распишем первое уравнение в (2.7) по компонентам, произведем перекрестное дифференцирование по координатам и вычтем одно из другого:

$$\partial_t\Delta\psi - \nu\Delta\Delta\psi - g\partial_x\tilde{\rho} = 0 \tag{2.8}$$

Дифференцирование по горизонтальной координате x второго уравнения и умножение на модуль ускорения свободного падения g приводит к выражению:

$$g\left(\partial_{xt}\tilde{\rho} - \partial_z r\partial_{xx}\psi\right) = 0 \tag{2.9}$$

Продифференцировав (2.8) по времени и вычитая из результата (2.9) получим уравнение, содержащее только скалярную функцию тока ψ и равновесное начальное распределение стратификации $r(z)$:

$$\partial_{tt}\Delta\psi - \nu\partial_t\left(\Delta\Delta\psi\right) - g\partial_z r\partial_{xx}\psi = 0 \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) для жидкости с экспоненциальной стратификацией $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$ с масштабом $\Lambda = \left|d\ln\rho_0/dz\right|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi/N$ приобретает вид:

$$\partial_{tt}\Delta\psi - \nu\partial_t\left(\Delta\Delta\psi\right) + N^2\exp\left(-z_\Lambda\right)\partial_{xx}\psi = 0 \tag{2.11}$$

Для упрощения выражений в дальнейшем используется безразмерная высота $z_\Lambda = z/\Lambda$, нормированная на масштаб плавучести Λ.

3. Решение линеаризованной задачи

Подстановка в (2.9) решения в виде бегущих монохроматических поверхностных волн вида:

$$\psi = A\exp\left(ik_x x - i\omega t\right)\exp\left(k_z z\right) \tag{3.1}$$

с положительно определенной частотой ω и комплексным волновым числом $\vec{k} = \left(k_x, k_z\right)$ приводит к дисперсионному соотношению:

$$\omega\left(k_x^2 - k_z^2\right)\left(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega\right) - N^2 k_x^2\exp\left(-z_\Lambda\right) = 0 \tag{3.2}$$

Геометрия задачи естественным образом выделяет вертикальную компоненту волнового вектора k_z, вдоль которой невозмущенная среда неоднородна. Поэтому решение уравнения (3.2) в настоящей работе ищется в виде зависимости $k_z\left(k_x, \omega\right)$.

Уравнение (3.2) имеет два типа корней: регулярные и сингулярные. Принципы, согласно которым решения относятся к тому или иному типу можно понять, если рассмотреть задачу в безразмерных переменных, в которых в качестве параметров обезразмеривания выбраны собственные масштабы задачи: обратная частота плавучести $\tau_N = N^{-1}$ и вязкий волновой масштаб $\delta_N^{g\nu} = \left(g\nu\right)^{1/3}N^{-1}$. В случае малой вязкости отношение вязкого $\delta_g^{\nu} = \nu^{2/3}g^{-1/3}$ и вязкого волнового масштаба определяет безразмерный параметр $\varepsilon = \delta_g^{\nu}/\delta_N^{g\nu} = N\nu^{1/3}/g^{2/3}$. В этом случае дисперсионное уравнение (3.2) записывается следующим образом:

$$\omega_*^2\left(k_{*x}^2 - k_{*z}^2\right) + i\varepsilon\omega_*\left(k_{*x}^2 - k_{*z}^2\right)^2 - k_{*x}^2\exp\left(-z_\Lambda\right) = 0 \tag{3.3}$$

Здесь нижним индексом «*» обозначены соответствующие безразмерные величины. В жидкостях с малой вязкостью или со слабой стратификацией параметр $\varepsilon \ll 1$. Малый коэффициент, который при этом появляется в слагаемом с наибольшим показателем степени, позволяет отнести (3.3) к классу сингулярно возмущенных уравнений, асимптотические методы анализа которых развиты в [39]. Методы теории сингулярных возмущений позволяют строить полные решения уравнений вида (3.3), содержащие два типа корней: традиционные регулярные и сингулярные:

$$\begin{aligned} k_{*z} &\simeq \pm k_{*x}\frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp\left(-z_\Lambda\right)}}{\omega_*} \pm \varepsilon\frac{ik_{*x}\exp\left(-z_\Lambda\right)}{2\omega_*^2\sqrt{\omega_*^2 - \exp\left(-z_\Lambda\right)}} \\ k_{*l} &\simeq \pm\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\omega_*} \pm \sqrt{\varepsilon}\frac{(1+i)k_{*x}^2\left(\omega_*^2 - \exp\left(-z_\Lambda\right)\right)}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Точное решение биквадратного уравнения (3.2), построенное без обращения к технике асимптотических вычислений, имеет вид:

$$k_l = \pm\sqrt{k_x^2 - \frac{i\left(\omega^2 + (1+i)\tilde{R}(k_x,z)\right)}{2\nu\omega}},\ k_z = \pm\sqrt{k_x^2 - \frac{i\left(\omega^2 - (1+i)\tilde{R}(k_x,z)\right)}{2\nu\omega}}$$
$$\tilde{R}(k_x,z) = \sqrt{\frac{4\nu\omega N^2 k_x^2 \exp(-z_\Lambda) - i\omega^4}{2}} \tag{3.5}$$

При переходе к безразмерному виду главные члены полученных решений (3.5) определяются соотношениями:

$$k_{*l} \approx \pm\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\omega_*},\quad k_{*z} \approx \pm k_{*x}\frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}}{\omega_*} \tag{3.6}$$

Сравнение показывает, что главные члены асимптотического решения (3.4) и асимптотики точного решения (3.6) совпадают.

Отметим, что соотношения, соответствующие регулярным решениям k_z отвечают за волновой компонент периодического течения, а соответствующие сингулярным решениям k_l определяют лигаментный компонент, задающий тонкую структуру течения.

В выражении (3.1) компоненты волнового вектора полагаются независящими от координат, в то же время в решении (3.5) появляется зависимость от вертикальной координаты z и в волновом k_z и в лигаментном k_l решении. Такое приближение будет справедливо, если в решении ограничиваться областью, определяемой безразмерной глубиной, на которой проводится рассмотрение, остается малой величина $z_\Lambda \ll 1$. В реальных жидкостях масштаб стратификации принимает значения порядка километров и больше, поэтому описанные соображения незначительно ограничивают область применения полученных выражений.

С учетом выражений, определяющих волновой k_z и лигаментный k_l компонент течения (3.5) решение для функции тока (3.1) трансформируется в:

$$\psi = \exp(ik_x x - i\omega t)\left(A\exp(k_z z) + B\exp(k_l z)\right) \tag{3.7}$$

В качестве управляющего параметра периодического течения выступает положительно определенная частота ω. Связь между частотой и компонентой волнового вектора k_x находится из стандартных кинематических и динамических граничных условий на свободной поверхности и условием затухания движения с глубиной:

$$\begin{aligned} & z = \zeta: \\ & \frac{D(z-\zeta)}{Dt} = 0 \\ & P - 2\rho\nu\vec{n}\cdot\left((\vec{n}\cdot\nabla)\vec{u}\right) + \sigma\,\mathrm{div}\,\vec{n} = 0 \\ & \left(\vec{\tau}\cdot\left((\vec{n}\cdot\nabla)\vec{u}\right) + \vec{n}\cdot\left((\vec{\tau}\cdot\nabla)\vec{u}\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$z \to -\infty: \vec{u} \to 0 \tag{3.9}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{\left|\nabla(z-\zeta)\right|} = \left(\frac{-\partial_x\zeta}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}\right), \vec{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}, \frac{\partial_x\zeta}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}\right)$$

Здесь $\vec{n},\vec{\tau}$ – орты нормали и касательной к свободной поверхности соответственно, D/Dt – материальная производная, а σ – коэффициент поверхностного натяжения. Более подробно вывод граничных условий на свободной поверхности в вязкой жидкости разобран в [21, 40, 41]. Стоит отметить, что условие затухания движения с глубиной (3.9) накладывает ограничения на полученные ранее решения (3.5), (3.6). С учетом вида решения (3.1) физически реализуемыми решениями в (3.5) и (3.6) оказываются корни, с положительной действительной частью $\mathrm{Re}\left(k_{z,l}\right) > 0$, $\mathrm{Re}\left(k_{*z,l}\right) > 0$.

В линеаризированной постановке после проведения процедуры сноса граничных условий на равновесную поверхность $z = 0$ граничные условия принимают вид:

$$\begin{gathered} z = 0: \\ \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0 \\ \tilde{P} + 2\rho_{00}\nu\partial_{xz}\psi + \sigma\partial_{xx}\zeta = 0 \\ \partial_{xx}\psi - \partial_{zz}\psi = 0 \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$z \to -\infty : \partial_x \psi \to 0,\ \partial_z \psi \to 0 \tag{3.11}$$

Подставляя выражения для давления из уравнения Навье–Стокса (2.7) в динамическое граничное условие получим, с учетом кинематического граничного условия (3.10), запись динамических граничных условий, содержащих только функцию тока:

$$\begin{gathered} z = 0: \\ \nu\partial_{zt}\Delta\psi - \partial_{ttz}\psi + 2\nu\partial_{tzxx}\psi + g\partial_{xx}\psi - \gamma\partial_{xxxx}\psi = 0 \\ \partial_{xx}\psi - \partial_{zz}\psi = 0 \end{gathered} \tag{3.12}$$

Здесь $\gamma = \sigma/\rho_{00}$ – нормированный на равновесное значение плотности на поверхности коэффициент поверхностного натяжения. Подставляя в (3.11) выражение для функции тока (3.7), получим условие совместности, определяющее дисперсионное соотношение между компонентами волнового вектора и частотой периодического течения:

$$\begin{gathered} \left(k_x^2 + k_z^2\right)\left(-gk_x^2 - i\nu\omega k_l^3 + \omega k_l\left(3i\nu k_x^2 + \omega\right) - \gamma k_x^4\right) - \\ -\left(k_x^2 + k_l^2\right)\left(-gk_x^2 + 3i\nu\omega k_x^2 k_z + \omega k_z\left(-i\nu k_z^2 + \omega\right) - \gamma k_x^4\right) = 0 \end{gathered} \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) допускает численное или приближенное решение, по которому строятся дисперсионные характеристики волнового и лигаментного компонента периодического течения.

Построим решения для неизвестных функций с учетом слагаемых, определяющих тонкую структуру течения. Вид искомых функций отклонения свободной поверхности от равновесного положения, периодической составляющей плотности и давления с учетом выражения для функции тока (3.7) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \zeta = Z\exp\left(ik_x x - i\omega t\right) \\ \tilde{\rho} = \exp\left(ik_x x - i\omega t\right)\left(G\exp\left(k_z z\right) + H\exp\left(k_l z\right)\right) \\ \tilde{P} = \exp\left(ik_x x - i\omega t\right)\left(K + L\exp\left(k_z z\right) + M\exp\left(k_l z\right)\right) \end{gathered} \tag{3.14}$$

Из динамического граничного условия на касательные напряжения найдем связь между амплитудными множителями для лигаментного и волнового компонента функции тока:

$$B = -A\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} \tag{3.15}$$

Подставляя (3.7), (3.11) и (3.12) в кинематическое граничное условие, найдем связь между амплитудой отклонения свободной поверхности и амплитудами компонентов периодического движения функции тока:

$$A = Z\frac{\omega\left(k_x^2 + k_l^2\right)}{k_x\left(k_l^2 - k_z^2\right)},\ B = -Z\frac{\omega\left(k_x^2 + k_z^2\right)}{k_x\left(k_l^2 - k_z^2\right)} \tag{3.16}$$

Амплитуды волнового G и лигаментного H компонента в выражении для периодической части плотности, которые определяются из уравнения неразрывности (2.7), с учетом (3.16) можно записать в виде:

$$G = Z\exp\left(-z_\Lambda\right)\frac{k_x^2 + k_l^2}{\Lambda\left(k_l^2 - k_z^2\right)},\qquad H = -Z\exp\left(-z_\Lambda\right)\frac{k_x^2 + k_z^2}{\Lambda\left(k_l^2 - k_z^2\right)} \tag{3.17}$$

Амплитуды для компонентов давления K, L, M определяются из уравнения Навье–Стокса с учетом (3.14)–(3.17):

$$\begin{aligned}
K &= -Z\frac{g\Lambda\rho_{00}\left(k_x^2 + k_z k_l\left(-1 + k_z\Lambda + k_l\Lambda\right)\right)}{\left(k_z + k_l\right)\left(k_z\Lambda - 1\right)\left(k_l\Lambda - 1\right)}\\
L &= -Z\frac{g\rho_{00}\left(k_x^2 + k_l^2\right)\exp\left(-z_\Lambda\right)}{\left(k_z^2 - k_l^2\right)\left(k_z\Lambda - 1\right)} - Z\frac{ik_z\omega\rho_{00}\left(k_x^2 + k_l^2\right)\left(\nu k_z^2 - \nu k_x^2 + i\omega\right)}{k_x^2\left(k_z^2 - k_l^2\right)}\\
M &= -Z\frac{g\rho_{00}\left(k_x^2 + k_z^2\right)\exp\left(-z_\Lambda\right)}{\left(k_l^2 - k_z^2\right)\left(k_l\Lambda - 1\right)} - Z\frac{ik_l\omega\rho_{00}\left(k_x^2 + k_z^2\right)\left(\nu k_l^2 - \nu k_x^2 + i\omega\right)}{k_x^2\left(k_l^2 - k_z^2\right)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Получим выражение для градиента плотности. При этом рассмотрим отдельно волновой и лигаментный компоненты плотности. В общем виде можно записать выражение для волнового компонента периодического возмущения плотности $\tilde{\rho}_w$ следующим образом:

$$\tilde{\rho}_w = \exp\left(ik_x x - i\omega t\right)G\left(z\right)\exp\left(k_z\left(z\right)z\right) \tag{3.19}$$

Для лигаментного компонента периодического возмущения плотности $\tilde{\rho}_l$ в общем виде выражение записывается:

$$\tilde{\rho}_l = \exp\left(ik_x x - i\omega t\right)H\left(z\right)\exp\left(k_l\left(z\right)z\right) \tag{3.20}$$

В явном виде после подстановки дисперсионных соотношений (3.5) градиент волнового компонента периодического возмущения плотности определяется выражениями:

$$\begin{aligned}
&\partial_x\tilde{\rho}_w = \frac{\left(-1\right)^{3/4} Zk_x\left(k_x^2 + k_l^2\right)\nu\omega}{\sqrt{2}\tilde{R}\left(k_x, z\right)\Lambda}\exp\left(ik_x x - i\omega t\right)\exp\left(k_z z - z_\Lambda\right)\\
&\partial_z\tilde{\rho}_w = \frac{Z\nu\omega}{4\sqrt{2}k_z\tilde{R}\left(k_x, z\right)^3\Lambda^2}\exp\left(ik_x x - i\omega t\right)\exp\left(k_z z - 2z_\Lambda\right)\times\\
&\times\Big[-k_x^2\left(k_x^2 + k_l^2\right)N^2\sqrt{2}\tilde{R}\left(k_x, z\right)z + 4\left(-1\right)^{1/4}\exp\left(z_\Lambda\right)k_z^2\left(k_x^2 + k_l^2\right)\tilde{R}\left(k_x, z\right)^2\Lambda + 2k_z\times\\
&\times\left(2\left(-1\right)^{1/4}k_x^2\left(k_x^2 + k_l^2\right)N^2\nu\omega + \sqrt{2}k_x^2 N^2\tilde{R}\left(k_x, z\right) - 2\left(-1\right)^{1/4}\exp\left(z_\Lambda\right)\left(k_x^2 + k_l^2\right)\tilde{R}\left(k_x, z\right)^2\right)\Big]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Для градиента лигаментного компонента возмущения плотности в явном виде получим:

$$\begin{aligned}
&\partial_x\tilde{\rho}_l = -\frac{(-1)^{3/4} Zk_x\left(k_x^2 + k_z^2\right)\nu\omega}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)\Lambda}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_l z - z_\Lambda)\\
&\partial_z\tilde{\rho}_l = -\frac{Z\nu\omega}{4\sqrt{2}k_l\tilde{R}(k_x,z)^3\Lambda^2}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_l z - 2z_\Lambda)\times\\
&\times\Big[-k_x^2\left(k_x^2 + k_z^2\right)N^2\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)z + 4(-1)^{1/4}\exp(z_\Lambda)k_l^2\left(k_x^2 + k_z^2\right)\tilde{R}(k_x,z)^2\Lambda + 2k_l\times\\
&\times\Big(2(-1)^{1/4}k_x^2\left(k_x^2 + k_z^2\right)N^2\nu\omega + \sqrt{2}k_x^2N^2\tilde{R}(k_x,z) - 2(-1)^{1/4}\exp(z_\Lambda)\left(k_x^2 + k_z^2\right)\tilde{R}(k_x,z)^2\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Для экспериментальных наблюдений поверхностных волн отдельный интерес представляет горизонтальная компонента градиента плотности. На поверхности амплитуда волновой R_w и лигаментной R_l частей горизонтальной компоненты градиента плотности определяются выражениями:

$$z = 0 : R_w = \frac{(-1)^{3/4} Zk_x\left(k_x^2 + k_l^2\right)\nu\omega}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,0)\Lambda},\ R_l = \frac{(-1)^{3/4} Zk_x\left(k_x^2 + k_z^2\right)\nu\omega}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,0)\Lambda} \tag{3.23}$$

Выражения (3.23) характеризуют масштабы лигаментной и волновой части градиента плотности вдоль горизонтальной координаты в зависимости от частоты периодического течения. Масштаб лигаментного компонента горизонтальной составляющей градиента плотности относительно волнового определяется отношением амплитуд:

$$\frac{R_l}{R_w} = \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} = \frac{4\nu\omega k_x^2 - i\left(\omega^2 - (1+i)\tilde{R}(k_x,0)\right)}{4\nu\omega k_x^2 - i\left(\omega^2 + (1+i)\tilde{R}(k_x,0)\right)} \tag{3.24}$$

В безразмерном виде, подставляя приближенные значения (3.6) в (3.24) с точностью до членов более высокого порядка малости, получим:

$$\frac{R_l}{R_w} = \frac{k_{*x}^2 + k_{*z}^2}{k_{*x}^2 + k_{*l}^2} \approx \frac{\varepsilon k_{*x}^2\left(2\omega_*^2 - 1\right)}{\omega_*^2\left(\varepsilon k_{*x}^2 - i\omega_*\right)} \approx \frac{i\varepsilon k_{*x}^2\left(2\omega_*^2 - 1\right)}{\omega_*^3} + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.25}$$

При переходе в (3.25) от безразмерных переменных к размерным значениям получим для жидкостей с малой вязкостью:

$$\frac{R_l}{R_w} \approx ik_x^2\left(\delta_\omega^\nu\right)^2\left(2 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \tag{3.26}$$

Здесь $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$ – вязкий масштаб Стокса. Стоит отметить, что выражением, аналогичным (3.26) определяется соотношение лигаментной и волновой составляющей функции тока: из (3.7) и (3.15) следует:

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} \approx ik_x^2\left(\delta_\omega^\nu\right)^2\left(2 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \tag{3.27}$$

Подставляя в (3.26)–(3.27) решение дисперсионного уравнения (3.13), можно получить связь между масштабами лигаментного и волнового компонентов периодического течения в явном виде.

Проследим за импульсом жидкости, переносимым периодическим волновым движением и распишем его по компонентам: отдельно лигаментный и волновой компоненты. В линейном приближении для волнового компонента импульса $\vec{p}_w = \left(p_{wx}, p_{wz}\right)$, используя (2.2), (3.7) и (3.16) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
&p_{wx} = \rho_{00}\exp(-z_\Lambda)\partial_z\psi_w = Z\frac{\rho_{00}\nu\omega^2}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_z z - z_\Lambda)\times\\
&\times\left[(-1)^{1/4}\frac{(k_x^2+k_l^2)}{k_x}\left(k_z - \frac{(-1)^{3/4}\exp(-z_\Lambda)k_x^2N^2z}{2k_z\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)\Lambda}\right)-\right.\\
&\left.-\exp(-z_\Lambda)\left(\frac{k_xN^2}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)\Lambda} - \frac{(-1)^{1/4}k_x(k_x^2+k_l^2)N^2\nu}{\tilde{R}(k_x,z)^2\Lambda}\right)\right]\\
&p_{wz} = -\rho_{00}\exp(-z_\Lambda)\partial_x\psi_w =\\
&= -Z\frac{(-1)^{3/4}\rho_{00}\nu\omega^2(k_x^2+k_l^2)}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_z z - z_\Lambda)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Для лигаментного компонента импульса $\vec{p}_l = (p_{lx}, p_{lz})$в линейном приближении получим выражения:

$$\begin{aligned}
&p_{lx} = \rho_{00}\exp(-z_\Lambda)\partial_z\psi_l = Z\frac{\rho_{00}\nu\omega^2}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_l z - z_\Lambda)\times\\
&\times\left[-(-1)^{1/4}\frac{(k_x^2+k_z^2)}{k_x}\left(k_l + \frac{(-1)^{3/4}\exp(-z_\Lambda)k_x^2N^2z}{2\sqrt{2}k_l\tilde{R}(k_x,z)\Lambda}\right)-\right.\\
&\left.-\exp(-z_\Lambda)\left(\frac{k_xN^2}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)\Lambda} + \frac{(-1)^{1/4}k_x(k_x^2+k_z^2)N^2\nu}{\tilde{R}(k_x,z)^2\Lambda}\right)\right]\\
&p_{lz} = -\rho_{00}\exp(-z_\Lambda)\partial_x\psi_l =\\
&= Z\frac{(-1)^{3/4}\rho_{00}\nu\omega^2(k_x^2+k_z^2)}{\sqrt{2}\tilde{R}(k_x,z)}\exp(ik_x x - i\omega t)\exp(k_l z - z_\Lambda)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Выражения (3.28)–(3.29) характеризуют импульс, передаваемый отдельными компонентами периодического течения, распространяющегося вдоль свободной поверхности стратифицированной вязкой жидкости. При этом формулы (3.28) определяют часть импульса, вызванного крупномасштабными волновыми компонентами периодического течения, а формулы (3.29) – часть, обусловленную тонкоструктурными лигаментными компонентами течения.

Заключение

Методами теории сингулярных возмущений в линейном приближении проведен расчет динамики и тонкой структуры полей плотности, градиента плотности, функции тока, давления и импульса в периодических возмущениях свободной поверхности в модели двумерной несжимаемой экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости.

Полученные выражения, совместно с оценками собственных пространственных и временных масштабов определяющей системы уравнений, задают требования к технике измерений, позволяющей наблюдать тонкую структуру периодических поверхностных течений, которые включают волны, изменяющие положения свободной поверхности, и лигаменты, расслаивающие поле плотности.

Научный и практический интерес представляет расчет влияния лигаментов на эволюцию картины поля плотности в бегущих возмущениях в полной нелинейной постановке.

Благодарности. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500442-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441–455.
2. *Monismith S.G., Cowen E.A., Nepf H.M. et al.* Laboratory observations of mean flows under surface gravity waves // J. Fluid Mech. 2007. V. 573. P. 131–147. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891
3. *Plueddemann A.J.; Weller R.A.* Structure and evolution of the oceanic surface boundary layer during the Surface Waves Processes Program // J. of Marine Syst. 1999. V. 21. № 1–4. P. 85–102. https://doi.org/10.1016/s0924-7963(99)00007-x
4. *Yan S., Zou Z., You Z.* Eulerian description of wave-induced Stokes drift effect on tracer transport // J. of Marine Sci.&Engng. 2022. V. 10. № 2. P. 253.
5. *Subbaraya S., Breitenmoser A. Molchanov A. et al.* Circling the seas: Design of Lagrangian drifters for ocean monitoring // IEEE Robotics & Autom. Mag. 2016. V. 23. № 4. P. 42–53. https://doi.org/10.1109/MRA.2016.2535154
6. *Bosi S. Broström G., Roquet F.* The role of Stokes drift in the dispersal of North Atlantic surface marine debris // Front. Mar. Sci., Sec. Marine Pollution. 2021. V. 8. https://doi.org/10.3389/fmars.2021.697430
7. *Higgins C., Vanneste J., van den Bremer T.S.* Unsteady Ekman–Stokes dynamics: Implications for surface wave-induced drift of floating marine litter // Geophys. Res. Lett. 2020. V. 47. P. e2020GL089189. https://doi.org/10.1029/2020GL089189
8. *Pizzo N., Melville W.K. Deike L.* Lagrangian transport by nonbreaking and breaking deep-water waves at the ocean surface // J. Phys. Ocean. 2019. V. 49. P. 983–993. https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0227.1
9. *Gerstner F.J.* Theorie der Wellen. Abhandlunger der Königlichen Böhmischen Geselschaft der Wissenschaften, Prague. 1802; Repr. in: Annalen der Physik. 1809. V. 32. № 8. P. 412–445.
10. *Абрашкин А.А., Пелиновский Е.Н.* О связи дрейфа Стокса и волны Герстнера // УФН. 2018. Т. 188. № 3. С. 329–334. https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038089
11. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. A. Math.&Phys. Sci. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581. https://doi.org/10.1098/rsta.1953.0006
12. *Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beats' // J. of Fluid Mech. 1962. V. 13. № 4. P. 481–504. https://doi.org/10.1017/S0022112062000877
13. *Van Den Bremer T.S., Whittaker C., Calvert R. et al.* Experimental study of particle trajectories below deep-water surface gravity wave groups // J. of Fluid Mech. 2019. V. 879. P. 168–186. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.584
14. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю.* Движение частиц в поле нелинейных волновых пакетов в слое жидкости под ледяным покровом // ТМФ. 2024. Т. 218. № 3. С. 586–600. https://doi.org/10.4213/tmf10585
15. *You Z.J., Wilkinson D.L., Nielsen P.* Near bed net drift under waves // in: Proc. of the 10th Australasian Conf. on Coastal and Ocean Engineering, Auckland, New Zealand. 1991. Dec. 2–6. P. 183–186.
16. *David H.* Stokes drift in equatorial water waves, and wave–current interactions // Deep Sea Res. Pt. II: Topical Studies in Oceanogr. 2019. V. 160. P. 41–47. https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2018.08.003
17. *Bühler O.* Waves and Mean Flows. Cambridge: Univ. Press, 2014. 374 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107478701
18. *McWilliams J.C., Restrepo J.M., Lane E.M.* An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters. // J. of Fluid Mech. 2004. V. 511. P. 135–178. https://doi.org/10.1017/S0022112004009358

19. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // Annual Rev. of Fluid Mech. 1983. V. 15. № 1. P. 391–427.
https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.002135;
20. *Kinsman, B.* Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean's Surface. Prentice Hall, 1965.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
22. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Т.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Л.;М.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. 535 с.
23. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
24. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат.
25. *Rayleigh (Lord).* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. London Math. Soc. 1882. V. s1–14. Iss. 1. P. 170–177.
https://doi.org/10.1112/plms/s1-14.1.170
26. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
27. *Xu F., Li F., Zhang Y.* The symmetry of steady stratified periodic gravity water waves // Monatshefte für Mathematik. 2024. V. 203. № 1. P. 247–266.
https://doi.org/10.1007/s00605-023-01904-4
28. *Байдулов В.Г.* О задаче определения положения источника внутренних волн // ПММ. 2023. Т. 87. №. 1 С. 36–44.
https://doi.org/10.31857/S0032823523010046
29. *Князьков Д.Ю., Байдулов В.Г., Савин А.С. и др.* Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия // ПММ. 2023. Т. 87. № 3. С. 442–453.
https://doi.org/10.31857/S0032823523030074
30. *Wang C.A., Zhang H., Zhu H.L.* Numerical predictions of internal waves and surface thermal signatures by underwater vehicles in density-stratified water using OpenFOAM // Ocean Engng. 2023. Т. 272. С. 113847.
https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.113847
31. *More R.V., Ardekani A.M.* Motion in stratified fluids // Annual Rev. of Fluid Mech. 2023. V. 55. P. 157–192.
https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-011132
32. *Dore B.D.* Mass transport in layered fluid systems // J. of Fluid Mech. 1970. V. 40. № 1. P. 113–126.
https://doi.org/10.1017/S0022112070000071
33. *Liu A.K., Davis S.H.* Viscous attenuation of mean drift in water waves // J. of Fluid Mech. 1977. V. 81. № 1. P. 63–84.
https://doi.org/10.1017/S0022112077001918
34. *Robertson S., Rousseaux G.* Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments, 2018.
http://arxiv.org/abs/1706.05255v3
35. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286.
https://doi.org/10.3390/axioms10040286
36. *Monismith S.G.* Stokes drift: theory and experiments // J. of Fluid Mech. 2020. V. 884. P. F1.
https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891
37. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics. 2023. V. 11. № 21. P. 4443.
https://doi.org/10.3390/math11214443
38. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean. Sci. 2018. V. 14. P. 471–502.
https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018
39. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984. 535 с
40. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 536 с.
41. *Баринов В.А.* Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербургского ун-та. Прикл. матем. Информ. Процессы управл. 2010. № 2. С. 18–31.

The Fine Structure of the Density Field in Two-Dimensional Periodic Flows on the Surface of a Viscous Stratified Liquid

A. A. Ochirov[a,#], **Yu. D. Chashechkin**[a,##]

[a]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: otchirov@mail.ru,* [##]*e-mail: yulidch@gmail.com*

In the linear approximation, the propagation of a periodic disturbance along the free surface of a viscous stratified fluid in a uniform gravitational field is considered, taking into account the action of surface tension. Complete solutions of the linearized system of fundamental equations of the mechanics of heterogeneous fluids, which determine the regular wave and singular ligament components, are obtained. The fine spatial structure of the fields of next physical variables: fluid velocity, momentum, density and density gradient is calculated.

Keywords: Periodic motion, free surface, viscosity, stratification, fine structure, pressure distribution, density distribution

REFERENCES

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc., 1847, vol. 8, pp. 441–455.
2. *Monismith S.G., Cowen E.A., Nepf H.M. et al.* Laboratory observations of mean flows under surface gravity waves. // J. Fluid Mech., 2007, vol. 573, pp. 131–147. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891
3. *Plueddemann A.J., Weller R.A.* Structure and evolution of the oceanic surface boundary layer during the surface waves processes program // J. of Marine Syst., 1999, vol. 21, no. 1–4, pp. 85–102. https://doi.org/10.1016/s0924-7963(99)00007-x
4. *Yan S., Zou Z., You Z.* Eulerian description of wave-induced stokes drift effect on tracer transport // J. of Marine Sci.&Engng., 2022, vol. 10, no. 2, pp. 253.
5. *Subbaraya S., Breitenmoser A. Molchanov A. et al.* Circling the seas: Design of Lagrangian drifters for ocean monitoring // IEEE Robotics&Autom. Mag., 2016, vol. 23, no. 4, pp. 42–53. https://doi.org/10.1109/MRA.2016.2535154
6. *Bosi S. Broström G., Roquet F.* The role of Stokes drift in the dispersal of North Atlantic surface marine debris // Front. Mar. Sci., Sec. Marine Pollution, 2021, vol. 8. https://doi.org/10.3389/fmars.2021.697430
7. *Higgins C., Vanneste J., van den Bremer T.S.* Unsteady Ekman–Stokes dynamics: Implications for surface wave-induced drift of floating marine litter // Geophys. Res. Lett., 2020, vol. 47, pp. e2020GL089189. https://doi.org/10.1029/2020GL089189
8. *Pizzo N., Melville W.K. Deike L.* Lagrangian transport by nonbreaking and breaking deep-water waves at the ocean surface // J. Phys. Ocean, 2019, vol. 49, pp. 983–993. https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0227.1
9. *Gerstner F.J.* Theorie der Wellen. Abhandlunger der Königlichen Böhmischen Geselschaft der Wissenschaften, Prague. 1802. Repr. in: Annalen der Physik. 1809, vol. 32, no. 8, pp. 412–445.
10. *Abrashkin A.A., Pelinovsky E.N.* On the relation between Stokes drift and the Gerstner wave // Phys. Uspekhi, 2018, vol. 61, no. 3, pp. 307. https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038089
11. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. A. Math.&Phys. Sci., 1953, vol. 245, no. 903, pp. 535–581. https://doi.org/10.1098/rsta.1953.0006
12. *Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beats' // J. of Fluid Mech., 1962, vol. 13, no. 4, pp. 481–504. https://doi.org/10.1017/S0022112062000877
13. *Van Den Bremer T.S., Whittaker C., Calvert R. et al.* Experimental study of particle trajectories below deep-water surface gravity wave groups. // J. of Fluid Mech., 2019, vol. 879, pp. 168–186. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.584
14. *Il'ichev A.T., Savin A.S., Shashkov A.Y.* Motion of particles in the field of nonlinear wave packets in a liquid layer under an ice cover // Theor.&Math. Phys., 2024, vol. 218, no. 3, pp. 503–514. https://doi.org/10.1134/S0040577924030097
15. *You Z.J., Wilkinson D.L., Nielsen P.* Near bed net drift under waves // in: Proc. of the 10th Australasian Conf. on Coastal and Ocean Engineering, Auckland, New Zealand, 1991, Dec. 2–6, pp. 183–186.
16. *David H.* Stokes drift in equatorial water waves, and wave–current interactions // Deep Sea Res. pt. II: Topical Studies in Oceanogr., 2019, vol. 160, pp. 41–47.

https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2018.08.003
17. *Bühler O.* Waves and Mean Flows,.. Cambridge: Univ. Press, 2014. 374 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107478701
18. *McWilliams J.C., Restrepo J.M., Lane E.M.* An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters // J. of Fluid Mech., 2004, vol. 511, pp. 135–178. https://doi.org/10.1017/S0022112004009358
19. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // Annual Rev. of Fluid Mech., 1983, vol. 15, no. 1, pp. 391–427. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.002135
20. *Kinsman B.* Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean's Surface. Prentice Hall, 1965.
21. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics Vol. 6. Oxford: Pergamon, 1987. 560 p.
22. *Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.* Theoretical Hydromechanics. Moscow: Intersci. Pub., 1964. V. 1.
23. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1924.
24. *Fedorov K.N.* The Thermohaline Finestructure of the Ocean. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1976. (in Russian)
25. *Rayleigh (Lord).* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. London Math. Soc., 1883, vol. s1–14, iss. 1, pp. 170–177. https://doi.org/10.1112/plms/s1-14.1.170
26. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978. 524 p.
27. *Xu F., Li F., Zhang Y.* The symmetry of steady stratified periodic gravity water waves // Monatshefte für Mathematik, 2024, vol. 203, no. 1, pp. 247–266. https://doi.org/10.1007/s00605-023-01904-4
28. *Baydulov V.G.* On the problem of determining the position of a source of internal waves // Fluid Dyn., 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1206–1212. https://doi.org/10.1134/S0015462823602085
29. *Knyazkov D.Y., Baydulov V.G., Savin A.S. et al.* Direct and inverse problems of the dynamics of surface waves caused by the flow around an underwater obstacle // Fluid Dyn., 2023, vol. 58, no. 9, pp. 1725–1733. https://doi.org/10.1134/S0015462823603030
30. *Wang C.A., Zhang H., Zhu H.L.* Numerical predictions of internal waves and surface thermal signatures by underwater vehicles in density-stratified water using OpenFOAM // Ocean Engng., 2023, vol. 272, pp. 113847. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.113847
31. *More R.V., Ardekani A.M.* Motion in stratified fluids // Annual Rev. of Fluid Mech., 2023, vol. 55, pp. 157–192. https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-011132
32. *Dore B.D.* Mass transport in layered fluid systems // J. of Fluid Mech., 1970, vol. 40, no. 1, pp. 113–126. https://doi.org/10.1017/S0022112070000071
33. *Liu A.K., Davis S.H.* Viscous attenuation of mean drift in water waves // J. of Fluid Mech., 1977, vol. 81, no. 1, pp. 63–84. https://doi.org/10.1017/S0022112077001918
34. *Robertson S., Rousseaux G.* Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments // http://arxiv.org/abs/1706.05255v3
35. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 286. https://doi.org/10.3390/axioms10040286
36. *Monismith S.G.* Stokes drift: theory and experiments // J. of Fluid Mech., 2020, vol. 884, pp. F1. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891
37. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics, 2023, vol. 11, no. 21, pp. 4443. https://doi.org/10.3390/math11214443
38. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean. Sci., 2018, vol. 14, pp. 471–502. https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018
39. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Technique. N.Y.: Wiley, 1993. 536 p.
40. *Sedov L.I.* Mechanics of Continuous Media. World Scientific, 1997.
41. *Barinov V.A.* Distribution of waves on free surface of viscous liquid // Vestn. St.-Pb. univ., ser. 10. Prikl. Matem., Inform., Process Upravl., 2010, no. 2, pp. 18–31. (in Russian)