ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2024, том 88, № 5, с. 649–664

УДК 531.381

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

© 2024 г. В. Ю. Ольшанский[1,*]

[1]ИПТМУ РАН, Саратов, Россия

**e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.
После доработки 24.06.2024 г.
Принята к публикации 10.09.2024 г.

В статье приведено решение задачи об условиях прецессии гиростата в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Выделен случай гиростата с осевой динамической симметрией, ось собственного вращения которого совпадает с осью симметрии гиростата. Показано, что нерегулярная прецессия возможна только при скорости прецессии вдвое большей скорости собственного вращения и гиростатическом моменте, отклоненном от оси симметрии на некоторый угол ε. Получено выражение каждой из скоростей через элементарные функции времени. При $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ. Найдена связь между углом нутации и отношением осевого и экваториального моментов инерции, при сферической симметрии $\cos\theta = 1/4$. Указано множество допустимых положений центров приведения сил при произвольных заданных углах между силовыми линиями однородных полей и для частного случая ортогональных полей.

Ключевые слова: гиростат, движение вокруг неподвижной точки, три однородных поля, нерегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823524050018 EDN: JQEEUU

1. Введение. Классическая задача движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет много обобщений для различных силовых полей. Наиболее исследован случай, когда поле одно или действуют несколько полей с общей осью симметрии. Получены [1] решения для тяжелого тела в магнитном поле, для гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2, 3].

Важным случаем движения является прецессия и случай симметричного тяжелого тела хорошо известен. Гриоли была найдены [4] условия регулярной прецессии несимметричного тела вокруг оси, отклоненной от вертикали. В наших работах [5–8] показано, что прецессия тела с полостью, заполненной жидкостью, также возможна при отсутствии динамической симметрии. Обзор прецессий твердого тела и гиростата под действием сил различной природы приведен в [9, 10].

Случай, когда направления полей заданы двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве, изучен в значительно меньшей степени и исследования в этой области активно проводятся в настоящее время. Первые примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела и гиростата в двух [11] и трех [12] однородных полях были построены Х. Яхья. В этих решениях оси прецессии и собственного вращения ортогональны, а скорости прецессии и собственного вращения совпадают; эти решения можно считать аналогами прецессии Гриоли для двух и трех полей. В наших работах описаны возможные случаи прецессии твердого тела и гиростата в двух [13] и трех [14] однородных полях; найден новый случай [14], когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения, угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\cos\theta = 1/6$.

Была рассмотрена [15] регулярная прецессия гиростата в трех полях, одно из которых – осесимметричное, и для частного случая, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, получены условия, связывающие параметры системы. В нашей работе [16] выполнено исследование всех возможных случаев регулярной прецессии в данной суперпозиции трех полей, найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Показано [16], что прецессия возможна при скорости прецессии равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для известного случая [15] с равными скоростями прецессии и собственного вращения указаны новые решения с осью прецессии, отклоненной от оси симметрии неоднородного поля. Найдены [16] новые случаи регулярной прецессии, когда отношение скоростей прецессии и собственного вращения равно двум либо одной второй. Показано, что в частном случае гиростата, гиростатический момент которого направлен по оси собственного вращения и в случае твердого тела скорость прецессии может быть вдвое меньше скорости собственного вращения, только если угол нутации задан равенством $\sin\theta = 4/5$.

Г.В. Горром была рассмотрена задача о нерегулярной прецессии вокруг вертикали динамически симметричного тела в трех однородных ортогональных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно [17–19]. В нашей работе [20] проанализированы возможные случаи нерегулярной прецессии динамически симметричного тела в трех однородных полях с постоянным отношением скоростей при произвольных углах между силовыми линиями полей и с произвольным направлением оси прецессии в инерциальном пространстве. В частном случае сферической симметрии тела при скорости прецессии вдвое меньшей или вдвое большей скорости собственного вращения угол нутации определен равенством $\cos\theta = 1/4$, при равных скоростях $\cos\theta = 1/2$.

В настоящей статье приведено решение задачи об условиях нерегулярной прецессии гиростата в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Условия получены для случая гиростата с осевой динамической симметрией, ось собственного вращения которого совпадает с осью симметрии гиростата. Показано, что нерегулярная прецессия возможна только при скорости прецессии вдвое большей скорости собственного вращения и гиростатическом моменте, отклоненном от оси симметрии. При угле отклонения ε, меньшем ε_*, движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ. Решение найдено в элементарных функциях. Найдена связь между отношением осевого и экваториального моментов инерции гиростата и углом нутации, при сферической симметрии $\cos\theta = 1/4$. Указано множество допустимых положений центров приведения сил при произвольных заданных углах между силовыми линиями однородных полей и для частного случая ортогональных полей.

2. Постановка задачи. Для описания движения гиростата вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [12]

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \left(\mathbf{I}\omega + \sigma\right) = \mathbf{M} = \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 \tag{2.1}$$

$$\dot{\alpha}_i + \omega \times \alpha_i = 0; \; i = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

Здесь $(\ )^{\bullet}$ – производная по времени в системе отсчета, связанной с телом; векторы $\mathbf{u}_i$ постоянны в этой системе, $\mathbf{u}_i = p_i\mathbf{OC}_i$, C_i – центры приведения сил, $\mathbf{I}$ – оператор инерции тела в неподвижной точке, ω – угловая скорость тела, единичные векторы α_i задают направления сил каждого из полей, σ – гиростатический момент, $\mathbf{M}$ – момент действующих на тело сил относительно неподвижной точки O.

Прецессия тела задается равенством

$$\omega = \omega_r\mathbf{m} + \omega_p\rho \tag{2.3}$$

Единичные векторы $\mathbf{m}$ и ρ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах. Скалярные функции $\omega_r(t)$ и $\omega_p(t)$ – это величины скоростей собственного вращения и прецессии. Прецессия называется регулярной, если обе скорости ω_r и ω_p постоянны, и нерегулярной, если хотя бы одна из скоростей непостоянна [10].

Рассмотрим прецессии гиростата, для которых, как и в работах [17–20] для твердого тела, отношение скоростей постоянно

$$\omega_p/\omega_r = \kappa = \text{const} \tag{2.4}$$

Ниже решается следующая задача: при заданных в инерциальной системе отсчета направлениях полей α_i и оси прецессии ρ определить при каких ограничениях на оператор $\mathbf{I}$, гиростатический момент σ, векторы $\mathbf{u}_i$ и отношение скоростей κ гиростат может совершать прецессию и найти зависимость скоростей прецессии и собственного вращения от времени.

Векторная функция $\rho(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), которое, при учете равенства (2.3), становится линейным

$$\dot{\rho} + \omega_r(t)\mathbf{m} \times \rho = 0 \tag{2.5}$$

Пусть $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$ – некоторый связанный с телом ортонормированный правый базис такой, что $\boldsymbol{l}_3 = \mathbf{m}$. Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\rho = \sin\theta\left(\sin\tau\boldsymbol{l}_1 + \cos\tau\boldsymbol{l}_2\right) + \cos\theta\boldsymbol{l}_3; \; d\tau = \Omega dt \tag{2.6}$$

Здесь $\Omega = \omega_r(t)$ – скорость собственного вращения, произвольный параметр θ – это постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии (угол нутации), $\cos\theta = (\mathbf{m}, \rho)$. При $\Omega = \text{const}$ в рассматриваемом случае, когда отношение скоростей κ постоянно, прецессия является регулярной.

Векторные функции $\omega(t)$, $\alpha_i(t)$, как и ранее [14,16,20], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$ равенствами:

$$\omega = \Omega\tilde{\omega}, \tilde{\omega} = \kappa\sin\theta\left(\sin\tau\boldsymbol{l}_1 + \cos\tau\boldsymbol{l}_2\right) + \left(1 + \kappa\cos\theta\right)\boldsymbol{l}_3 \tag{2.7}$$

$$\alpha_i = -\mathbf{R}\mathbf{s}_i; \; i = 1, 2, 3, \; \rho = -\mathbf{R}\boldsymbol{l}_3 \tag{2.8}$$

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе $(\boldsymbol{l}_i)$ следующие:

$$r_{11} = -\cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\kappa+1)\tau - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\kappa-1)\tau,\ r_{31} = -\sin\theta\ \sin\kappa\tau$$

$$r_{12} = \cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\kappa+1)\tau + \sin^2\frac{\theta}{2}\sin(\kappa-1)\tau,\quad r_{13} = -\sin\theta\ \sin\tau \tag{2.9}$$

$$r_{21} = \cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\kappa+1)\tau - \sin^2\frac{\theta}{2}\sin(\kappa-1)\tau,\ r_{32} = -\sin\theta\ \cos\kappa\tau$$

$$r_{22} = \cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\kappa+1)\tau - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\kappa-1)\tau,\quad r_{23} = -\sin\theta\ \cos\tau\ ,\ r_{33} = -\cos\theta$$

Функции $\alpha_i(t)$, заданные равенствами (2.8), являются решениями линейных (при заданной формулой (2.7) функции $\omega(t)$) уравнений (2.2) при произвольных постоянных (в связанной с телом системе отсчета) векторах $\mathbf{s}_i$. При известных функциях $\alpha_i(t)$ момент внешних сил $\mathbf{M}$ задан в подвижной системе отсчета.

Задача, решаемая в работе, состоит в нахождении условий обращения в тождество равенства (2.1) при функциях $\omega, \alpha_i(t), \mathbf{M}$, заданных равенствами (2.7)–(2.9). Из формул (2.7) получим

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega}\tilde{\omega} + \Omega^2\kappa\sin\theta\left(\cos\tau\boldsymbol{l}_1 - \sin\tau\boldsymbol{l}_2\right) \tag{2.10}$$

Уравнение (2.1) записывается в виде

$$\Omega\frac{d\Omega}{d\tau}\mathbf{f} + \Omega^2\mathbf{g} + \Omega\mathbf{h} = \mathbf{M} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{I}\tilde{\omega},\ \mathbf{g} = \tilde{\omega}\times\mathbf{I}\tilde{\omega} + \kappa\sin\theta\mathbf{I}(\cos\tau\boldsymbol{l}_1 - \sin\tau\boldsymbol{l}_2),\ \mathbf{h} = \tilde{\omega}\times\sigma \tag{2.12}$$

Зависимость $\tau = \tau(t)$ найдем из равенства

$$t = \int\frac{d\tau}{\Omega(\tau)} \tag{2.13}$$

В общем случае, когда поля не ортогональны, удобно, как ранее в наших работах [14, 16, 20] преобразовать формулу для момента сил следующим образом. Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2\times\mathbf{s}_3}{\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_3\rangle}\ (1\ 2\ 3),\ \mathbf{u}_i = \mathbf{G}\mathbf{n}_i;\ i = 1, 2, 3 \tag{2.14}$$

Здесь $\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = (\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c}), (1\ 2\ 3)$ – знак циклической перестановки.

Всюду в работе рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы α_i некомпланарными, тогда, в силу равенств (2.8), $\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_3\rangle \neq 0$.

Имеем формулу [16] для суммы моментов внешних сил

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}\boldsymbol{l}_1\times\mathbf{R}\boldsymbol{l}_1 + \mathbf{G}\boldsymbol{l}_2\times\mathbf{R}\boldsymbol{l}_2 + \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3\times\mathbf{R}\boldsymbol{l}_3 \tag{2.15}$$

Ниже, в разд. 3, приведена система трех тождеств, выполнение которых необходимо и достаточно для существования искомого решения, описывающего прецессию гиростата с осевой динамической симметрией, для которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. В разд. 4 доказано, что для совместности названной системы тождеств в случае трех полей, неприводимых к двум или одному полю, необходимо, чтобы отношение скоростей было равно одному, двум или одной второй. Дальнейший анализ показывает, что случаи $\kappa = 1$ и $\kappa = 1/2$ возможны только при $\Omega = \mathrm{const}$, то есть при регулярной прецессии. Кроме того, показано, что вектор гиростатического момента должен быть отклонен от оси динамической симметрии гиростата. Разд. 5 и 6 содержат основные результаты статьи. В разд. 5 показано, что при $\kappa = 2$ система трех тождеств совместна и система уравнений (2.1), (2.2) имеет в случае трех неприводимых полей решение, описывающее нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей. Получено необходимое условие, выражающее угол нутации через отношение осевого и экваториального моментов инерции гиростата. Дано описание допустимых положений центров приведения сил. Найдено выражение $\Omega(\tau)$ через элементарные функции. В разд. 6 выполнен анализ возможных движений гиростата. Записана в элементарных функциях зависимость от времени компонент угловой скорости гиростата. Показано, что при угле ε отклонения гиростатического момента от оси симметрии гиростата, меньшем ε_*, движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ.

3. Прецессия гиростата с осевой симметрией. Определяющие тождества. Рассмотрим прецессию гиростата, имеющего осевую динамическую симметрию, ось симметрии которого совпадает с осью собственного вращения. В этом случае $I_{ij} = 0$; $i \neq j$, $I_1 = I_2$. Оси $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ выберем так, что $\sigma_2 = 0$. Запишем заданные формулой (2.12) параметры $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$

$$\mathbf{f} = \kappa\sin\theta I_1\left(\sin\tau\boldsymbol{l}_1 + \cos\tau\boldsymbol{l}_2\right) + \left(1 + \kappa\cos\theta\right)I_3\boldsymbol{l}_3 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{g} = \lambda_1\left(\cos\tau\boldsymbol{l}_1 - \sin\tau\boldsymbol{l}_2\right),\ \lambda_1 \overset{\text{def}}{=} \kappa\sin\theta\left(\left(1 + \kappa\cos\theta\right)I_3 - \kappa\cos\theta\, I_1\right) \tag{3.2}$$

$$\mathbf{h} = \kappa\sin\theta\sigma_3\left(\cos\tau\boldsymbol{l}_1 - \sin\tau\boldsymbol{l}_2\right) + \left(1 + \kappa\cos\theta\right)\sigma_1\boldsymbol{l}_2 - \kappa\sin\theta\sigma_1\cos\tau\boldsymbol{l}_3 \tag{3.3}$$

Отметим следующее. Если гиростатический момент коллинеарен оси симметрии, то $\sigma_1 = 0$ и векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ коллинеарны, что упрощает анализ уравнения (2.11). Проведенная проверка показала, что в этом случае искомое решение, описывающее прецессию с постоянным отношением скоростей осесимметричного гиростата в трех неприводимых однородных полях, существует, только если $\Omega = \mathrm{const}$. Прецессия является регулярной, все возможные случаи такой прецессии описаны в нашей работе [16]. Всюду ниже при построении условий нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей (то есть при условии (2.4)) считаем $\sigma_1 \neq 0$, гиростатический момент σ при этом отклонен от оси симметрии.

Запишем уравнение (2.11) в проекциях на оси $\mathbf{l}_i$

$$\kappa\sin\theta I_1\sin\tau\Omega\frac{d\Omega}{d\tau} + \lambda_1\cos\tau\Omega^2 + \kappa\sin\theta\sigma_3\cos\tau\Omega = M_1 \tag{3.4}$$

$$\kappa\sin\theta I_1\cos\tau\Omega\frac{d\Omega}{d\tau} - \lambda_1\sin\tau\Omega^2 + \left(\left(1 + \kappa\cos\theta\right)\sigma_1 - \kappa\sin\theta\sigma_3\sin\tau\right)\Omega = M_2 \tag{3.5}$$

$$\left(1 + \kappa\cos\theta\right)I_3\Omega\frac{d\Omega}{d\tau} - \kappa\sin\theta\sigma_1\cos\tau\Omega = M_3 \tag{3.6}$$

Уравнения (3.4), (3.5) эквивалентны системе

$$\kappa\sin\theta\ I_1\Omega\frac{d\Omega}{d\tau}+\left(1+\kappa\cos\theta\right)\sigma_1\cos\tau\Omega=M_1\sin\tau+M_2\cos\tau\overset{\text{def}}{=}\tilde{M}_1 \tag{3.7}$$

$$\lambda_1\Omega^2+\left(\kappa\sin\theta\ \sigma_3-\left(1+\kappa\cos\theta\right)\sigma_1\sin\tau\right)\Omega=M_1\cos\tau-M_2\sin\tau\overset{\text{def}}{=}-\tilde{M}_2 \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.6) и (3.7) находим

$$\lambda_2\sigma_1\cos\tau\ \Omega=\left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3\tilde{M}_1-\kappa\sin\theta\ I_1M_3 \tag{3.9}$$

$$\lambda_2\Omega\frac{d\Omega}{d\tau}=\kappa\sin\theta\ \tilde{M}_1+\left(1+\kappa\cos\theta\right)M_3 \tag{3.10}$$

Здесь

$$\lambda_2=\left(\kappa\sin\theta\right)^2I_1+\left(1+\kappa\cos\theta\right)^2I_3 \tag{3.11}$$

Таким образом, исходное векторное уравнение (2.11) эквивалентно системе трех уравнений (3.8)–(3.10).

Из формул (2.9) и (2.15) получим компоненты M_i момента в базисе $\left(\boldsymbol{l}_i\right)$ и затем запишем величины $\tilde{M}_i$, заданные в формулах (3.7) и (3.8)

$$\begin{gathered}\tilde{M}_1=\cos\theta\left(G_{13}\cos\tau-G_{23}\sin\tau\right)+G_{32}\sin\kappa\tau-G_{31}\cos\kappa\tau+\\+\frac{\sin\theta}{2}\Big(\left(G_{12}+G_{21}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau+\left(G_{11}-G_{22}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau\Big)+\\+\Big(\left(G_{12}-G_{21}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau+\left(G_{11}+G_{22}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau\Big)\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\tilde{M}_2=\cos\theta\left(G_{23}\cos\tau+G_{13}\sin\tau+G_{32}\cos\kappa\tau+G_{31}\sin\kappa\tau\right)-\\-\frac{\sin\theta}{2}\Big(2G_{33}+\left(G_{11}-G_{22}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau-\left(G_{12}+G_{21}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau-\\-\left(G_{11}+G_{22}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau+\left(G_{12}-G_{21}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau\Big)\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}M_3=\sin\theta\left(-G_{13}\cos\tau+G_{23}\sin\tau\right)+\\+\sin^2\frac{\theta}{2}\Big(\left(G_{21}-G_{12}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau-\left(G_{11}+G_{22}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau\Big)+\\+\cos^2\frac{\theta}{2}\Big(\left(G_{12}+G_{21}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau+\left(G_{11}-G_{22}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau\Big)\end{gathered} \tag{3.14}$$

Правые части уравнений (3.9), (3.10) записываются в виде

$$\begin{gathered}\kappa\sin\theta\ \tilde{M}_1+\left(1+\kappa\cos\theta\right)M_3=\\=\sin\theta\Big(-G_{13}\cos\tau+G_{23}\sin\tau+\kappa\left(G_{32}\sin\kappa\tau-G_{31}\cos\kappa\tau\right)\Big)+\\+\frac{1+\cos\theta}{2}\left(\kappa+1\right)\Big(\left(G_{12}+G_{21}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau+\left(G_{11}-G_{22}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau\Big)+\\+\frac{1-\cos\theta}{2}\left(\kappa-1\right)\Big(\left(G_{12}-G_{21}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau+\left(G_{11}+G_{22}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau\Big)\end{gathered} \tag{3.15}$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3\tilde{M}_1-\kappa\sin\theta\, I_1 M_3 = {} & \left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3\left(G_{32}\sin\kappa\tau-G_{31}\cos\kappa\tau\right)+\\
&+\lambda_3\left(G_{13}\cos\tau-G_{23}\sin\tau\right)+\\
&+\frac{1}{2}\lambda_4\left(\left(G_{12}+G_{21}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau+\left(G_{11}-G_{22}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau\right)+\\
&+\frac{1}{2}\lambda_5\left(\left(G_{12}-G_{21}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau+\left(G_{11}+G_{22}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau\right)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 &= \cos\theta\,\left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3+\kappa\left(\sin\theta\right)^2 I_1\\
\lambda_4 &= \sin\theta\,\left(\left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3-\kappa\left(1+\cos\theta\right)I_1\right)\\
\lambda_5 &= \sin\theta\,\left(\left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3+\kappa\left(1-\cos\theta\right)I_1\right)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

4. Предварительный анализ. Необходимо определить условия, при которых равенства (3.8)–(3.10) тождественно выполнены для некоторой функции $\Omega(\tau)\neq\mathrm{const}$ и найти эту функцию. Из формулы (3.10) получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{2}\Omega^2 = {} & \sin\theta\,\left(-G_{13}\sin\tau-G_{23}\cos\tau-G_{31}\sin\kappa\tau-G_{32}\cos\kappa\tau\right)+\\
&+\frac{1+\cos\theta}{2}\left(\left(G_{12}+G_{21}\right)\sin\left(\kappa+1\right)\tau-\left(G_{11}-G_{22}\right)\cos\left(\kappa+1\right)\tau\right)+\\
&+\frac{1-\cos\theta}{2}\left(\left(G_{12}-G_{21}\right)\sin\left(\kappa-1\right)\tau-\left(G_{11}+G_{22}\right)\cos\left(\kappa-1\right)\tau\right)+C
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Если $\kappa\neq1$, то необходимы условия

$$
G_{11}=G_{22},\; G_{12}=-G_{21}
\tag{4.2}
$$

Формулы (3.9) и (4.1) при условиях (4.2) записываются в виде

$$
\begin{aligned}
\lambda_2\sigma_1\cos\tau\,\Omega = {} & \left(1+\kappa\cos\theta\right)I_3\left(G_{32}\sin\kappa\tau-G_{31}\cos\kappa\tau\right)+\\
&+\lambda_3\left(G_{13}\cos\tau-G_{23}\sin\tau\right)+\lambda_5\left(G_{12}\cos\left(\kappa-1\right)\tau+G_{11}\sin\left(\kappa-1\right)\tau\right)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{2}\Omega^2 = {} & \sin\theta\,\left(-G_{13}\sin\tau-G_{23}\cos\tau-G_{31}\sin\kappa\tau-G_{32}\cos\kappa\tau\right)+\\
&+\left(1-\cos\theta\right)\left(G_{12}\sin\left(\kappa-1\right)\tau-G_{11}\cos\left(\kappa-1\right)\tau\right)+C
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Если функцию $\Omega(\tau)$ из равенства (4.3) подставить в равенство (4.4), то получим тождество, одним из условий выполнения которого при $\kappa\neq1$, $\kappa\neq2$, $\kappa\neq1/2$ является $G_{11}=G_{12}=0$. Учитывая условие (4.2), получим, что матрица G – вырожденная и имеем приводимый случай. Таким образом, искомое решение, описывающее нерегулярную прецессию гиростата в трех полях с постоянным отношением скорости прецессии к скорости собственного вращения, может существовать только в одном из указанных случаев. В нашей работе [20] показано, что нерегулярная прецессия твердого тела в трех однородных полях возможна, когда отношение скорости прецессии к скорости собственного вращения равно одному, двум или одной второй. Ниже показано, что аналогичное решение для гиростата существует, только если скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

Рассмотрим случай $\kappa=1$. Условия (3.9), (3.10) записываются в виде

$$\lambda_2\sigma_1\cos\tau\ \Omega = (1+\cos\theta)I_3(G_{32}\sin\tau - G_{31}\cos\tau) + \lambda_3(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + \\ +\frac{1}{2}\lambda_4\left((G_{12}+G_{21})\cos 2\tau + (G_{11}-G_{22})\sin 2\tau\right) + \frac{1}{2}\lambda_5(G_{12}-G_{21}) \tag{4.5}$$

$$\lambda_2\dot{\Omega} = \lambda_2\Omega\frac{d\Omega}{d\tau} = \sin\theta\left(-(G_{13}+G_{31})\cos\tau + (G_{23}+G_{32})\sin\tau\right) + \\ +(1+\cos\theta)\left((G_{12}+G_{21})\cos 2\tau + (G_{11}-G_{22})\sin 2\tau\right) \tag{4.6}$$

В соответствии с формулой (3.11) $\lambda_2 \neq 0$ и, так как $\sigma_1 \neq 0$, то правая часть в формуле (4.5) должна делиться на $\cos\tau$, для этого необходимо выполнение условий

$$(1+\cos\theta)I_3G_{32} - \lambda_3G_{23} = 0,\ \lambda_4(G_{12}+G_{21}) = \lambda_5(G_{12}-G_{21}) \tag{4.7}$$

При выполнении этих условий формула (4.5) упрощается:

$$\Omega = \frac{\lambda_4\left((G_{12}+G_{21})\cos\tau + (G_{11}-G_{22})\sin\tau\right) + \lambda_3G_{13} - (1+\cos\theta)I_3G_{31}}{\lambda_2\sigma_1} \tag{4.8}$$

Если из формулы (4.8) подставить Ω в равенство (4.6) и сравнить коэффициенты при $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau$, то получим необходимые условия

$$2xy = y,\ x^2 - y^2 = x,\ x = \frac{G_{11}-G_{22}}{\nu},\ y = \frac{G_{12}+G_{21}}{\nu},\ \nu = \frac{2(1+\cos\theta)\lambda_2\sigma_1^2}{\lambda_4^2} \tag{4.9}$$

Если $y \neq 0$, то $x = 1/2$ и второе уравнение (4.9) не имеет действительных решений. Если $y = 0$, то $x = 0$ или $x = 1$. В первом случае из формулы (4.8) следует $\Omega = \text{const}$. Остается только случай $y = 0, x = 1$ и получаем условия

$$G_{12} = -G_{21},\quad G_{11} - G_{22} = \nu \tag{4.10}$$

Формула (4.8) и равенство (4.6) принимают вид

$$\Omega = \frac{1}{\lambda_2\sigma_1}\left(\lambda_4\nu\sin\tau + \lambda_3G_{13} - (1+\cos\theta)I_3G_{31}\right) \tag{4.11}$$

$$\lambda_2\Omega\frac{d\Omega}{d\tau} = \sin\theta\left((G_{23}+G_{32})\sin\tau - (G_{13}+G_{31})\cos\tau\right) + (1+\cos\theta)\nu\sin 2\tau \tag{4.12}$$

Равенства (4.11) и (4.12) совместны при условиях

$$G_{23} + G_{32} = 0,\quad \frac{\lambda_4\nu}{\lambda_2\sigma_1^2}\left(\lambda_3G_{13} - (1+\cos\theta)I_3G_{31}\right) = -\sin\theta\,(G_{13}+G_{31}) \tag{4.13}$$

Так как $\lambda_3 + (1+\cos\theta)I_3 = (1+\cos\theta)^2 I_3 + (\sin\theta)^2 I_1 \neq 0$, то из первых условий (4.7) и (4.13) следует $G_{23} = G_{32} = 0$.

Осталось рассмотреть возможность выполнения тождества (3.8), которое при полученных условиях записывается в виде

$$\left((1+\cos\theta)\sigma_1\sin\tau - \sin\theta\ \sigma_3\right)\Omega - \lambda_1\Omega^2 = \\ = -\frac{\sin\theta}{2}(\nu\cos 2\tau + 2G_{33} - G_{11} - G_{22}) + \cos\theta\,(G_{13}+G_{31})\sin\tau$$

Сравнение здесь слагаемых с $\cos 2\tau$ приводит либо к условию $\nu = 0$, но тогда $\Omega = \text{const}$, либо к условию $(1+\cos\theta)(2\lambda_1 - \lambda_4) + \sin\theta\,\lambda_2 = 0$. Данное условие приводится к виду $(1+\cos\theta)^2 I_3 + (\sin\theta)^2 I_1 = 0$ и не может быть выполнено. Таким образом, при $\kappa = 1$ искомого решения нет.

Покажем, что этот случай при $\kappa = 1/2$ также невозможен. Из формулы (3.9) при учете условия (4.2) получим

$$\lambda_2 \sigma_1 \cos\tau \, \Omega = a\cos\tau + b\sin\tau + c\cos\frac{\tau}{2} + d\sin\frac{\tau}{2} \tag{4.14}$$

Здесь $a = \lambda_3 G_{13}$, $b = -\lambda_3 G_{23}$, $c = \lambda_5 G_{12} - \left(1 + \dfrac{\cos\theta}{2}\right) I_3 G_{31}$, $d = \left(1 + \dfrac{\cos\theta}{2}\right) I_3 G_{32} - \lambda_5 G_{11}$.

Для делимости правой части в формуле (4.14) на $\cos\tau$ необходимо $b = c = d = 0$. Формула принимает вид $\lambda_2 \sigma_1 \Omega = \mathrm{const}$. Заданный формулой (3.11) параметр λ_2 больше нуля, следовательно $\sigma_1 \Omega = \mathrm{const}$. При $\sigma_1 \neq 0$ отсюда следует $\Omega = \mathrm{const}$ и прецессия будет регулярной. В разд. 3 показано, что рассмотрение случая $\sigma_1 = 0$ также приводит к условию $\Omega = \mathrm{const}$. Таким образом, при $\kappa = 1/2$ искомая нерегулярная прецессия невозможна.

5. Построение условий прецессии в случае $\kappa = 2$. Формулы (4.3), (4.4) при условиях (4.2) дают

$$\begin{gathered}\lambda_2 \sigma_1 \cos\tau \, \Omega = (1 + 2\cos\theta) I_3 (G_{32} \sin 2\tau - G_{31} \cos 2\tau) + \\ + (\lambda_3 G_{13} + \lambda_5 G_{12}) \cos\tau + (\lambda_5 G_{11} - \lambda_3 G_{23}) \sin\tau\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\lambda_2}{2} \Omega^2 = -\sin\theta \, (G_{31} \sin 2\tau + G_{32} \cos 2\tau) - (\sin\theta \, G_{23} + (1 - \cos\theta) G_{11}) \cos\tau + \\ + (-\sin\theta G_{13} + (1 - \cos\theta) G_{12}) \sin\tau + C\end{gathered} \tag{5.2}$$

Для делимости на $\cos\tau$ в формуле (5.1) необходимы условия

$$G_{31} = 0, \ \lambda_5 G_{11} - \lambda_3 G_{23} = 0 \tag{5.3}$$

При этом

$$\lambda_2 \sigma_1 \Omega = 2(1 + 2\cos\theta) I_3 G_{32} \sin\tau + \lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13} \tag{5.4}$$

Отсюда следует $G_{32} \neq 0$, иначе $\Omega = \mathrm{const}$, и получаем

$$\begin{gathered}\Omega^2 = \frac{1}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} \Big(((1 + 2\cos\theta) I_3 G_{32})^2 \, 2(1 - \cos 2\tau) + \\ + 4(1 + 2\cos\theta) I_3 G_{32} (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13}) \sin\tau + (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13})^2 \Big)\end{gathered} \tag{5.5}$$

Сравнение с формулой (5.2) приводит к условию

$$\sin\theta \, G_{23} + (1 - \cos\theta) G_{11} = 0 \tag{5.6}$$

Формула (5.2) при условиях (5.3), (5.6) дает

$$\Omega^2 = \frac{2}{\lambda_2} \left(-\sin\theta \, G_{32} \cos 2\tau + (-\sin\theta \, G_{13} + (1 - \cos\theta) G_{12}) \sin\tau + C \right) \tag{5.7}$$

Сравнивая формулы (5.5) и (5.7), приходим к условиям

$$\frac{1}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} ((1 + 2\cos\theta) I_3 G_{32})^2 = \frac{1}{\lambda_2} \sin\theta \, G_{32}$$

$$\frac{2}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} (1 + 2\cos\theta) I_3 G_{32} (\lambda_1 G_{12} + \lambda_2 G_{13}) = \frac{1}{\lambda_2} (-\sin\theta \, G_{13} + (1 - \cos\theta) G_{12})$$

Из первого условия находим

$$G_{32} = \frac{\sin\theta\ \lambda_2(\sigma_1)^2}{((1+2\cos\theta\ )I_3)^2} \tag{5.8}$$

Из второго условия при учете формулы (5.8) следует связь

$$-\sin\theta\ G_{13} + (1-\cos\theta\ )G_{12} = \frac{2\sin\theta}{(1+2\cos\theta\ )I_3}(\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13}) \tag{5.9}$$

По формуле (3.13) получим

$$\begin{gathered}\tilde{M}_2 = \cos\theta\ G_{32}\cos 2\tau + (\sin\theta\ G_{11} + \cos\theta\ G_{23})\cos\tau + \\ +(\cos\theta\ G_{13} - \sin\theta\ G_{12})\sin\tau - \sin\theta\ G_{33}\end{gathered} \tag{5.10}$$

В левой части равенства (3.8) при учете формулы (5.4) нет слагаемых с $\cos\tau$, поэтому в $\tilde{M}_2$ такие члены должны отсутствовать и из формулы (5.10) получаем условие

$$\sin\theta\ G_{11} + \cos\theta\ G_{23} = 0 \tag{5.11}$$

Определитель системы (5.6), (5.11) не равен нулю, следовательно

$$G_{11} = G_{22} = G_{23} = 0 \tag{5.12}$$

Формула (5.10) принимает вид

$$\tilde{M}_2 = \cos\theta\ G_{32}\cos 2\tau + (\cos\theta\ G_{13} - \sin\theta\ G_{12})\sin\tau - \sin\theta\ G_{33} \tag{5.13}$$

Добьемся теперь выполнения равенства (3.8), используя формулы (5.4) и (5.13). Сравнивая коэффициенты при $\cos 2\tau$, получим связь

$$\frac{2\lambda_1}{(\lambda_2\sigma_1)^2}((1+2\cos\theta)I_3)^2 G_{32}^2 - \frac{1}{\lambda_2\sigma_1}(1+2\cos\theta)^2 I_3 G_{32}\sigma_1 = \cos\theta\ G_{32}$$

Подставив сюда G_{32} из формулы (5.8), приходим к условию

$$2\lambda_1\sin\theta - (1+2\cos\theta)^2 I_3 = \mu\cos\theta$$

Данное условие при использовании формул (3.2), (3.11) для λ_1, λ_2 приводится к виду

$$4\cos\theta\ (1-\cos\theta)I_1 = (1-4\cos^2\theta)I_3 \tag{5.14}$$

Отметим, что в случае сферической симметрии $I_1 = I_2 = I_3$ из условия (5.14) получаем

$$\cos\theta = \frac{1}{4} \tag{5.15}$$

Такое же значение отмечено в работах [17] и [20] для частного случая твердого тела со сферической симметрией.

При имеющемся ограничении $I_3 < 2I_1$ допустимые значения угла нутации определяются условием

$$0 < \cos\theta < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \tag{5.16}$$

Сравнивая в тождестве (3.8) коэффициенты при $\sin\tau$ и свободные члены, получим связи

$$\left(1-\frac{4\lambda_1}{\lambda_2(\sigma_1)^2}I_3G_{32}\right)(\lambda_5G_{12}+\lambda_3G_{13})+\lambda_2\frac{\sin\theta\,G_{12}-\cos\theta\,G_{13}}{1+2\cos\theta}=4\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\sin\theta\,I_3G_{32} \quad (5.17)$$

$$G_{33}=\frac{2\sigma_3(\lambda_5G_{12}+\lambda_3G_{13})}{\lambda_2\sigma_1}+\frac{\lambda_1\left(2(1+2\cos\theta)I_3)^2G_{32}^2+(\lambda_5G_{12}+\lambda_3G_{13})^2\right)}{\sin\theta\,(\lambda_2\sigma_1)^2}-$$
$$-\frac{(1+2\cos\theta)^2I_3G_{32}}{\lambda_2\sin\theta} \quad (5.18)$$

Равенства (5.9) и (5.17) позволяют найти величины G_{12} и G_{13}, из равенства (5.18) затем найдем G_{33}.

Заданные формулами (3.17) параметры λ_3 и λ_5 при связи (5.14) записываются в виде

$$\lambda_5=\frac{\sin\theta\,(1+2\cos\theta)}{2\cos\theta}I_3,\lambda_3=\frac{(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)}{2\cos\theta}I_3 \quad (5.19)$$

Условие (5.9) при учете формул (5.19) преобразуется к виду

$$(1-\cos\theta)G_{12}+\sin\theta\,G_{13}=0 \quad (5.20)$$

Полученная связь позволяет записать G_{12},G_{13} в виде

$$G_{12}=-\sin\theta\,g,\ G_{13}=(1-\cos\theta)g \quad (5.21)$$

С учетом формул (5.19), (5.20) получим

$$\lambda_5G_{12}+\lambda_3G_{13}=(\sin\theta\,G_{12}-\cos\theta\,G_{13})I_3=-(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)I_3g \quad (5.22)$$

Параметр g определим из равенства (5.17)

$$g=-\frac{4\sigma_3\cos\theta}{\sigma_1\sin\theta\,(1-2\cos\theta)}G_{32}$$

Подставляя сюда G_{32} из формулы (5.8), получим

$$g=-\frac{4\sigma_1\sigma_3}{(1-4\cos^2\theta)I_3} \quad (5.23)$$

Формулы (5.21) принимают вид

$$G_{12}=\frac{4\sigma_1\sigma_3\sin\theta}{(1-4\cos^2\theta)I_3},G_{13}=-\frac{4\sigma_1\sigma_3(1-\cos\theta)}{(1-4\cos^2\theta)I_3} \quad (5.24)$$

Из формулы (5.18) при учете формул (5.21) и (5.23) находим

$$G_{33}=\frac{\sigma_1^2}{I_3(1+2\cos\theta)}+\frac{2\sigma_3^2}{I_1(1-2\cos\theta)} \quad (5.25)$$

Соберем вместе полученные результаты. Для того, чтобы гиростат с осевой динамической симметрией совершал в суперпозиции трех неприводимых однородных полей нерегулярную прецессию, при которой ось прецессии совпадает с осью симметрии гиростата, а отношение скоростей прецессии и собственного вращения было постоянно, необходимо, чтобы скорость прецессии была вдвое больше скорости собственного вращения, отношение осевого и экваториального моментов инерции выражалось через постоянный угол нутации по формуле

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{4\cos\theta\left(1-\cos\theta\right)}{1-4\cos^2\theta} \tag{5.26}$$

и элементы матрицы **G**, определяющей положения центров приведения, задавались формулами

$$G_{12} = -G_{21} = \frac{4\sigma_1\sigma_3\sin\theta}{I_3\left(1-4\cos^2\theta\right)},\ G_{13} = -\frac{4\sigma_1\sigma_3\left(1-\cos\theta\right)}{I_3\left(1-4\cos^2\theta\right)},\ G_{32} = \frac{\sigma_1^2}{I_3}\frac{\sin\theta}{\cos\theta\left(1+2\cos\theta\right)}$$

$$G_{33} = \frac{\sigma_1^2}{I_3\left(1+2\cos\theta\right)} + \frac{2\sigma_3^2}{I_1\left(1-2\cos\theta\right)},\ G_{11} = G_{22} = G_{23} = G_{31} = 0 \tag{5.27}$$

Здесь σ_1 и σ_3 – проекции гиростатического момента на экваториальную плоскость и на ось симметрии эллипсоида инерции.

Из формулы (5.4) получаем выражение для скорости собственного вращения

$$\Omega = 2\frac{\sigma_1}{I_3}\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}\sin\tau + \frac{\sigma_3}{I_1} \tag{5.28}$$

Допустимые положения центров приведения сил определяются при заданной матрице **G** из формул (2.14).

В случае ортогональных полей единичные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда, в соответствии с формулами (2.8), единичные векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ образуют левую ортогональную тройку. Из формул (2.14) получим $\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i$, $i = 1, 2, 3$. Если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то $\rho = \alpha_3$ и, в соответствии с формулой (2.8), $\mathbf{s}_3 = \boldsymbol{l}_3$.

6. Анализ движения гиростата. Получим явную зависимость переменной τ от времени и зависимость от времени компонент угловой скорости гиростата. Запишем формулу (5.28) в виде

$$\Omega = a + b\sin\tau\ ,\ a = \frac{\sigma_3}{I_1}, b = 2\frac{\sigma_1}{I_3}\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta} \tag{6.1}$$

Интеграл (2.13) выражается через элементарные функции. При $a^2 > b^2$ движение – периодическое, при $b^2 \geq a^2$ скорость вращения стремится к нулю.

Из формул (5.26), (6.1) получим

$$\frac{a^2}{b^2} = \operatorname{ctg}^2\varepsilon\frac{4\left(1-\cos\theta\right)\cos^2\theta}{\left(1+\cos\theta\right)\left(1-2\cos\theta\right)^2}\ ,\ \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\operatorname{ctg}\,\varepsilon\right|\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|\frac{2\cos\theta}{1-2\cos\theta} \tag{6.2}$$

Здесь ε – угол между вектором гиростатического момента σ и осью симметрии $\boldsymbol{l}_3$, $\sigma_1 = \sigma\sin\varepsilon$, $\sigma_3 = \sigma\cos\varepsilon$. Движение периодическое при $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, иначе – затухающее

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon_* = \frac{4\left(1-\cos\theta\right)\cos^2\theta}{\left(1+\cos\theta\right)\left(1-2\cos\theta\right)^2}\ ,\ \left|\operatorname{tg}\,\varepsilon_*\right| = \frac{2\cos\theta}{1-2\cos\theta}\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| \tag{6.3}$$

В случае сферической динамической симметрии гиростата $\cos\theta = 1/4$,

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon_* = \frac{3}{5}\ ;\ \varepsilon_* \approx 37°46'$$

Случай 1: $a = \pm b$

$$t + C = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\tau}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right),\ \sin\tau = \pm\frac{1-a^2(t+C)^2}{1+a^2(t+C)^2}\ ,\ \cos\tau = \mp\frac{2a\left(t+C\right)}{1+a^2(t+C)^2}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p = \Omega = \frac{2a}{1 + a^2(t + C)^2}$$

Носитель гиростата приближается к состоянию покоя, $\Omega > 0$ при $t > \infty$.

Случай 2: $a^2 > b^2$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - b}\operatorname{tg}\frac{\tilde{t}}{2}\;;\; \tilde{t} = \sqrt{\left|a^2 - b^2\right|}\left(t + \mathrm{const}\right)$$

Отсюда находим

$$\cos\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\cos\tilde{t} - b}{a - b\cos\tilde{t}}\;,\; \sin\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\sin\tilde{t}}{a - b\cos\tilde{t}} \tag{6.4}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p = \Omega = \frac{a^2 - b^2}{a - b\cos\tilde{t}} \tag{6.5}$$

Скорость собственного вращения Ω и вдвое большая скорость прецессии являются периодическими функциями времени с периодом $T = 2\pi / \sqrt{a^2 - b^2}$.

Знак Ω совпадает со знаком параметра a и, в силу формулы (6.1), со знаком σ_3. Учитывая связь (2.6) переменных τ и t, получим, что при увеличении времени t переменная τ монотонно возрастает, если $\sigma_3 > 0$ (гиростатический момент образует острый угол с осью собственного вращения) и монотонно убывает, если $\sigma_3 < 0$.

Наибольшее и наименьшее значения Ω задаются равенствами

$$\max|\Omega| = |a| + |b|,\; \min|\Omega| = |a| - |b|$$

Обозначим

$$f\left(\tilde{t},\chi\right) = \frac{\sqrt{1 - \chi^2}\,\sin\tilde{t}}{1 - \chi\cos\tilde{t}};\; \chi = \frac{b}{a}$$

При $|\chi| \approx 1$ вращение тела происходит очень неравномерно, так как, в соответствии с формулой (6.5) почти при всех $\tilde{t}$ скорость Ω близка к нулю и только в малой окрестности $\tilde{t}_{\max}$ скорость возрастает до величины, близкой к $2a$. На интервале $\left(0,\, 2\pi\right)$ функция $f\left(\tilde{t},\chi\right)$ имеет максимум ($f = 1$) и минимум ($f = -1$) в точках $\tilde{t}_{1,2}$, заданных равенством $\cos\,\tilde{t}_{1,2} = \chi$. При $|\chi| \approx 1$ величина $f\left(\tilde{t},\chi\right)$ почти всюду близка к нулю, кроме малых окрестностей точек $\tilde{t}_1 \approx 0$, $\tilde{t}_2 \approx 2\pi$. Обозначив $\delta = (1 - \chi^2)^{1/4}$, при малых δ получим оценку

$$\left|f\left(\tilde{t},\chi\right)\right| < \delta\left(1 + O\left(\delta^2\right)\right)\text{ при } \tilde{t} \in \left(2\delta, 2\pi - 2\delta\right) \tag{6.6}$$

Пусть $a,b > 0$. Из формул (6.4), (6.6) следует, что на большей части периода параметр τ находится вблизи значения $\tau = \pi/2$. При прохождении почти полного периода, соответствующему изменению $\tilde{t}$ на величину $2\pi - 4\delta$, происходит поворот вокруг оси собственного вращения на малый угол $\Delta\tau \approx 2\delta$ (и поворот вокруг оси прецессии на угол, вдвое больший). Затем, за малую часть периода $\Delta\tilde{t} = 4\delta$ происходит поворот на угол $\Delta\tau \approx 2\pi - 2\delta$. Отметим, что аналогичное исследование неравномерности вращения тела с полостью, наполненной жидкостью, выполнено в нашей работе [8].

Случай 3: $b^2 > a^2$. После интегрирования получаем

$$\tilde{t} = \ln|\Phi|;\, \Phi = \frac{a\;\operatorname{tg}\dfrac{\tau}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a\;\operatorname{tg}\dfrac{\tau}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \tag{6.7}$$

Отсюда следует $\tilde{t} \to \mp\infty$ при $\tau \to \tau_{1,2}$, где

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2} - b}{a},\ \operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2} + b}{a}\\ \cos\tau_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a},\ \sin\tau_{1,2} = -\frac{a}{b}\end{gathered} \tag{6.8}$$

Пусть $\tau_1, \tau_2 \in (-\pi, \pi)$. В зависимости от знаков величин a и b скорость Ω, заданная равенством (6.1), может быть положительна либо отрицательна в любой момент времени. Обозначим

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1,\ \gamma = \arcsin\frac{|a|}{|b|}$$

Рассмотрим возможные случаи, используя формулы (6.8)

$$a > 0, b > 0 : \tau_1 = -\gamma,\ \tau_2 = \gamma - \pi,\ \Delta\tau = 2\gamma - \pi < 0,\ \Omega < 0,\ \Phi < 0$$

$$a < 0, b > 0 : \tau_1 = \gamma,\ \tau_2 = \pi - \gamma,\ \Delta\tau = \pi - 2\gamma > 0,\ \Omega > 0,\ \Phi < 0$$

$$a > 0, b < 0 : \tau_1 = \pi - \gamma,\ \tau_2 = \gamma,\ \Delta\tau = 2\gamma - \pi < 0,\ \Omega < 0,\ \Phi < 0$$

$$a < 0, b < 0 : \tau_1 = \gamma - \pi,\ \tau_2 = -\gamma,\ \Delta\tau = \pi - 2\gamma > 0,\ \Omega > 0,\ \Phi < 0$$

Так как $0 < \gamma < \pi/2$, то во всех случаях максимально возможный поворот вокруг собственной оси равен $|\Delta\tau| = \pi - 2\gamma < \pi$.

Учитывая, что во всех случаях $\Phi < 0$, из формулы (6.7) получим

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2} - b - \left(\sqrt{b^2 - a^2} + b\right)\exp\tilde{t}}{a\left(\exp\tilde{t} + 1\right)}$$

$$\cos\tau = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2}\left(\sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{ch}\tilde{t} + b\operatorname{sh}\tilde{t}\right)}{b^2\operatorname{ch}\tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sh}\tilde{t} + a^2},\quad \sin\tau = -a\frac{b\operatorname{ch}\tilde{t} + \sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sh}\tilde{t} + b}{b^2\operatorname{ch}\tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sh}\tilde{t} + a^2}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p = \Omega = \frac{a\left(a^2 - b^2\right)}{b^2\operatorname{ch}\tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sh}\tilde{t} + a^2}$$

При $t \to +\infty$ получим

$$\cos\tau > -\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b},\ \sin\tau > -\frac{a}{b}$$

Носитель гиростата приближается к состоянию покоя, $\Omega \to 0$. Угол собственного вращения изменяется на величину, меньшую π, угол прецессии – меньше, чем на 2π. При $\chi \to 1$ получаем $|\tau_2 - \tau_1| = \pi$. Ось собственного вращения не может совершить вокруг оси прецессии больше одного оборота.

Заключение. Известные точные решения задачи о вращении твердого тела в суперпозиции трех однородных полей описывают регулярную прецессию [12,14], либо нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей прецессии и собственного вращения [17–20]. Для гиростата в трех однородных полях также получены [12,18] условия регулярной прецессии. В настоящей работе получены условия нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей гиростата с осевой симметрией в трех неприводимых однородных полях. Показано, что возможен только случай, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и гиростатический момент отклонен от оси собственного вращения. Приведено выражение каждой из скоростей через элементарные функции времени. Выделены случаи периодического и затухающего движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // Math. Phys. Commun. 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // J. Theor.&Appl. Mech. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M., El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7(4). P. 2120–2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl. 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
5. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
6. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Art. 57.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 9. Art. 46.
8. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
9. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
10. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ, 2009.
11. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss.3. P. 200–205.
12. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // Mech. Res. Commun. 2023. V. 127. Art.104041.
14. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
15. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
16. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в трех силовых полях // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 571–588.
17. *Горр Г.В.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей//ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 3–18
18. *Горр Г.В.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения твердого тела // Изв. РАН МТТ. 2023. № 3. С 123–134.
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2023. V. 19. Iss. 2. P. 249–264.
20. *Ольшанский В.Ю.* Нерегулярная прецессия осесимметричного тела в трех однородных полях // ПММ. 2024. Т. 88. Вып. 1. С. 17–33.

Nonregular Precession of a Gyrostat in Three Uniform Fields

V. Yu. Ol'shanskii[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control of the RAS, Saratov, Russia*

[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

This article presents a solution to the problem of the conditions of gyrostat nonregular precession in three homogeneous fields, in which the ratio of precession and proper rotation velocities is constant. The case of a gyrostat with axial dynamic symmetry, the axis of its proper rotation coinciding with the axis of symmetry of the gyrostat, is highlighted. It is shown that the precession is possible only at a precession rate twice the rate of its proper rotation, and the gyrostatic moment deflected from the axis of symmetry by some angle ε. An expression for each of the rates is obtained through elementary functions of time. At $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ the motion is periodic, at $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ the velocity tends to zero and the solid makes no more than one revolution around the axis of its proper rotation, the angle ε_* is expressed through the constant nutation angle θ. A relationship has been found between the nutation angle and the ratio of the axial and equatorial moments of inertia, under spherical symmetry $\cos\theta = 1/4$. The set of permissible positions of the centers of force at arbitrary given angles between the lines of force of homogeneous fields and for the special case of orthogonal fields is indicated.

Keywords: gyrostat, motion around a fixed point, three uniform fields, nonregular precession

REFERENCES

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // Math. Phys. Commun., 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // J. Theor. & Appl. Mech., 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. *Yehia H.M.*, *El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // J. Appl. Comput. Mech., 2021, vol. 7(4), pp. 2120 – 2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl., 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
5. *Ol'shanskii V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Mech. of Solids, 2018, vol. 53 (suppl. 2), pp. 95–106.
6. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2019, vol. 131, iss. 12, art. no. 57.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol. 132, iss. 9, art. no. 46.
8. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body filled with a liquid // Mech. of Solids, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1500–1513.
9. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Nauk. Dumka, 2013. 408 p.
10. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ. 2009. 222 p. (in Russian)
11. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci., 2015, vol. 2, iss.3, pp. 200–205.
12. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc., 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216–219.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // Mech. Res. Commun., 2023, vol.127, art. no. 104041.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three uniform fields // Mech. of Solids, 2022, vol.57, iss. 8, pp. 1873–1884.
15. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three force fields // Mech. of Solids, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2515–2530.
17. *Gorr G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // JAMM, 2023, vol. 87, iss. 1, pp. 3–18.
18. *Gorr G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogeneous force fields. Precession-isoconic motions of a rigid body // Izv. RAS. Mech. of Solids, 2023, no.3, pp. 123–134. (in Russian).
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 249–264.
20. *Ol'shanskii V.Yu.* Nonregular precession of a rigid body in three uniform fields // JAMM, 2024, vol. 88, iss. 1, pp. 17–33.