

УДК 532.6

О ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КАПЕЛЬ

© 2024 А. И. Григорьев^{1,*}, С. О. Ширяева^{2,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: grigorai@mail.ru

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

**e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Асимптотическими методами исследуются условия реализации электростатической неустойчивости осесимметрично осциллирующих сильно заряженных сплюснутых и вытянутых сфероидальных капель в зависимости от величин их эксцентриситетов. Выяснилось, что электростатическая устойчивость сплюснутой сфероидальной капли по отношению к осесимметричным деформациям увеличивается с ростом величины эксцентриситета, а вытянутой сфероидальной капли снижается. Показано, что сама электростатическая неустойчивость сплюснутой заряженной капли реализуется на ее экваторе, где поверхностная плотность заряда достигает максимальной величины, а для вытянутой капли на ее вершинах.

Ключевые слова: сплюснутая и вытянутая сфероидальные капли, заряд, неустойчивость

DOI: 10.31857/S0032823524040069, EDN: WVXUUY

1. Введение. Проблема изучения физических закономерностей реализации электростатической неустойчивости по отношению к собственному заряду осциллирующих заряженных капель электропроводной жидкости, сопровождающейся дроблением родительской капли на более мелкие, сильно заряженные дочерние капельки, занимает исследователей уже почти полтора столетия, начиная с конца 19 века [1–3]. Такой интерес вызван многочисленными приложениями явления в геофизике, технической физике, химической технологии и т.п. [4–9]. К этому примыкают и исследования деформаций осциллирующих капель, мицелл и сопутствующих им явлений [4, 10–12], в том числе и изучение физического механизма развития неустойчивости сильно заряженной плоской поверхности жидкости [13–14] и электростатические распады сильно заряженных капель, см., напр., [15–19].

Говоря о каплях и мицеллах, будем иметь в виду капли (мицеллы) простейших форм: сферические, сплюснутые или вытянутые сфероиды, тем более, что последние две формы капель реализуются при осцилляциях сферической капли на основной (легче всего возбуждаемой) моде [3, 5–7, 9–10]. Но, если электростатическая неустойчивость вытянутой сфероидальной капли исследована более-менее детально (см., напр., [3, 15–19] и указанные там работы), то про неустойчивость сплюснутых сфероидальных заряженных капель известно весьма мало [20]. В частности известно,

что электростатическая устойчивость сплюснутой сфероидальной заряженной капли по отношению к осесимметричным осцилляциям только повышается с увеличением эксцентриситета, в то время как для вытянутой сфероидальной капли она снижается [3, 15–20]. В этой связи представляет интерес исследование электростатической устойчивости как вытянутой, так и сплюснутой сфероидальных заряженных капель электропроводной несжимаемой жидкости по отношению к осесимметричным осцилляциям, проведенное для обеих капель одинаковыми методами. Этому и посвящено настоящее рассмотрение.

2. Сплюснутый сфероид. Постановка задачи. Пусть имеется капля радиуса R , заряженная зарядом Q , несжимаемой идеальной (для простоты и сокращения объема математических выкладок) электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ_1 в идеальной несжимаемой диэлектрической среде внешней среде с плотностью ρ_2 и коэффициентом межфазного натяжения σ , имеющая сплюснутую сфероидальную форму. Поверхность капли (границы раздела сред) будет возмущена капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, по порядку величины определяемой выражением: $|\xi| \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [21]; т.к. в силу теплового движения молекул жидкости на границе раздела сред создается капиллярное волновое движение, не превышающая по амплитуде 0.1 нм. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли (r, ϑ, φ) .

Волновые движения в капле и среде будем принимать потенциальными [22] с потенциалами скоростей $\varphi_1(r, t)$ и $\varphi_2(r, t)$, которые будут удовлетворять уравнениям Лапласа:

$$\nabla \varphi_i(r, t); i = 1, 2, \quad (2.1)$$

где индекс «1» соответствует жидкости капли, «2» – среде.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли запишем в виде:

$$r(\vartheta, t) = r(\vartheta) + \xi(\vartheta, t),$$

где $r(\vartheta)$ – уравнение сплюснутого сфероида:

$$r(\vartheta) = R \frac{(1 - e^2)^{1/3}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}, e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (2.2)$$

$\xi(\vartheta, t)$ – волновое возмущение поверхности.

Для нижеследующего качественного анализа на границе раздела сред (2.2) в первом приближении по малым параметрам $e^2 \ll 1$ и $(|\xi(\vartheta, t)|/R) \ll 1$ потребуем выполнения стандартных гидродинамических условий к уравнениям Лапласа (2.1):

кинематического:

$$\frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial n_2} \equiv \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial n} \quad (2.3)$$

и динамического:

$$\Delta p = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial t} + p_\sigma + p_e, \quad (2.4)$$

где \vec{n}_i – вектор положительной нормали к границе раздела сред для капли и среды; Δp – перепад давлений на границе раздела сред; p_σ – капиллярное давление; p_e – электрическое давление собственного заряда на каплю.

В используемом приближении: $e^2 \ll 1$ и $(|\xi(\vartheta, t)|/R) \ll 1$, производные по нормали в кинематическом граничном условии (2.3) отнесем к поверхности $r = R$, в итоге производные по нормальям заменятся на производные по радиусу:

$$\frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial n_1} \rightarrow \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial n_2} \rightarrow -\frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial r}$$

Гидродинамические потенциалы $\varphi_1(r, t)$ и $\varphi_2(r, t)$ должны быть гармоническими функциями, и их можно записать в виде:

$$\varphi_1(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) r^n P_n(\mu), \quad \varphi_2(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos \vartheta, \quad (2.5)$$

где $P_n(\cos \vartheta)$ – полиномы Лежандра; $B_n(t)$ и $C_n(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависимость, которых от времени для капиллярного волнового движения в идеальной жидкости определяется как: $\varphi_i(r, t) \sim \exp(i\omega t)$, где ω – частота. В силу (2.3) следует записать в виде разложения и возмущение границы раздела:

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) P_n(\mu) \quad (2.6)$$

Кроме граничных условий потребуем также выполнения интегральных условий условия неизменности при осцилляциях объема капли, неподвижности ее центра масс и постоянства заряда капли:

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \vec{r} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.7)$$

Подставляя (2.5), (2.6), (2.7) в (2.2) – (2.4) после простых, но громоздких вычислений, как это делалось, например, в [3,20,21], найдем дисперсионное уравнение задачи в линейном приближении по e^2 , в виде:

$$\Omega^2 = \frac{1}{M(n, e^2, \rho_1, \rho_2)} \left\{ 4W \left[(n-1) - e^2(n-4)\kappa_n \right] - \left[(n+2)(n-1) + 2e^2(n^2 + n + 4)\kappa_n \right] \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$M(n, e^2, \rho_1, \rho_2) \equiv \frac{1}{n} \left(1 - e^2 \frac{n+3}{n} \kappa_n \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1(n+1)} \left(1 - e^2 \frac{n-2}{n+1} \kappa_n \right)$$

$$\Omega^2 \equiv (\omega^2 \rho_1 R^3 / \sigma), \quad W \equiv (Q^2 / 16\pi\sigma R^3), \quad \kappa_n \equiv \frac{2n}{3(2n-1)(2n+3)}$$

Следует отметить, что безразмерный параметр W характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду капли [1–3].

Приравнивая в дисперсионном уравнении (2.8) квадрат безразмерной частоты Ω^2 нулю, можно найти условия реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в форме сплюснутого сфероида в линейном же приближении по e^2 в виде зависимости зарядового параметра W от номера моды осцилляций n :

$$W_{cr} \equiv \frac{n+2}{4} \left(1 + e^2 \frac{n^3(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+3)} \right); \quad n \geq 2 \quad (2.9)$$

Несложно видеть, что с увеличением e^2 критическое значение параметра W увеличивается пропорционально первой степени квадрата эксцентриситета, поскольку именно в этом приближении проводились расчеты. Но, тем не менее, встает вопрос: в каком месте плюснутого сфероида, на поверхности которого плотность поверхностного заряда распределена неравномерно, реализуется неустойчивость. В монографии [23] приведено аналитическое выражение для распределения заряда по поверхности заряженного электропроводного сфероида, но сделано это в декартовых координатах, не наглядных в рассматриваемой ситуации. В Приложении 1 эта зависимость приводится в сферических координатах с началом в центре капли. Эта выражение имеет вид:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}} \quad (2.10)$$

Видно, что при $e = 0$ получается плотность заряда, характерная для электропроводной сферы.

Для плюснутого сфероида при $\vartheta = 0$ получим на вершинах сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} (1 - e^2)^{1/3},$$

что несколько ниже, на множитель $(1 - e^2)^{1/3}$, заряда на сфере, и чем больше эксцентриситет, тем меньше поверхностная плотность заряда.

Для плюснутого сфероида при $\vartheta = \pi/2$ получим на экваторе сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{(1 - e^2)^{1/6}}$$

Это больше плотности поверхностного заряда на сфере, на множитель $(1 - e^2)^{-1/6}$. Таким образом, при сплющивании сильно заряженной капли в сфероид увеличивается плотность заряда на экваторе.

На рис. 1 приведен построенный по (2.10) трехмерный график зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на плюснутой сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости,

$$\Xi \equiv \frac{4\pi R^2 \sigma}{Q} = \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}},$$

от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ , который отсчитывается от вертикальной оси в сферической системе координат с началом в центре капли. Обезразмеривание поверхностной плотности заряда проведено на плотность поверхностного заряда равновеликой сферической капли.

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при больших значениях эксцентриситета $e \geq 0.95$ и значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow \pi/2$, т.е. на экваторе плюснутой сфероидальной капли. Это экспериментально подтвердилось несколько десятков лет назад при разработке устройств для электрокапельструйной печати [24]. Капли чернил, с которыми экспериментировали, были электропроводны и сильно заряжены, чтобы ими можно было управлять с помощью внешних электрических полей. Но оказалось, что такие капли, сталкиваясь с бумагой, претерпевали электростатическую неустойчивость и распались, образуя чернильный ореол вокруг каждой из букв. В итоге, от указанного метода пришлось отказаться.

3. Вытянутый сфероид. Что касается вытянутой сфероидальной капли электропроводной жидкости, то механизм реализации ее электростатической неустойчивости подробно описан в [3].

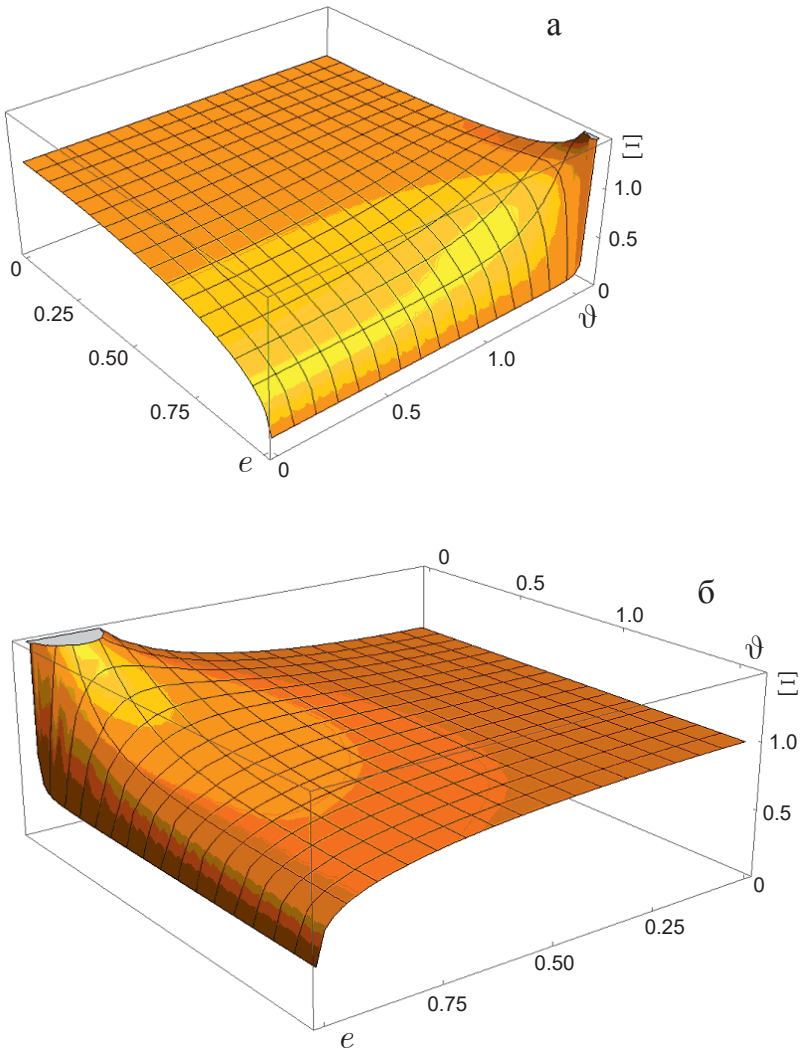


Рис. 1. График зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ : а – сплюснутая капля; б – вытянутая капля.

Уравнение вытянутого сфероида в сферической системе координат с началом в центре капли имеет вид:

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/6}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}; e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} \quad (3.1)$$

Повторяя все рассуждения, предпринятые во втором разделе, получим аналитическое выражение для критических условий реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в форме вытянутого сфероида в линейном приближении по e^2 в виде зависимости зарядового параметра W от номера моды осцилляций n :

$$W_{cr} \equiv \frac{n+2}{4} \left(1 - e^2 \frac{n^3(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+3)} \right); \quad n \geq 2 \quad (3.2)$$

Несложно видеть, что с увеличением эксцентриситета вытянутой сфероидальной капли критическое значение зарядового параметра только снижается.

Аналитическое выражение для распределения заряда по поверхности заряженной вытянутой электропроводной сфероидальной капли, приведено в Приложении 2 в сферических координатах с началом в ее центре:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1+e^2(-2+e^2) \cos^2 \vartheta}} \quad (3.3)$$

Видно, что при $e = 0$ получается стандартная для электропроводной сферы плотность заряда.

Для вытянутого сфероида при $\vartheta = 0$ получим на вершинах сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(1-e^2)^2}} = \frac{Q}{4\pi R^2} (1-e^2)^{-1/3},$$

что на множитель $(1-e^2)^{-1/3}$, больше плотности заряда на сфере, и чем больше эксцентриситет, тем больше поверхностная плотность заряда. То есть при критическом для сферы заряде на капле она сбросит избыточный заряд.

Для вытянутого сфероида при $\vartheta = \pi/2$ получим на экваторе сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} (1-e^2)^{1/6}$$

Это на множитель $(1-e^2)^{1/6}$ меньше плотности заряда на сфере, и при критическом заряде на сфере вытянутая сфероидальная капля при $\vartheta = \pi/2$ устойчива.

На рис. 1,б приведен график зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на вытянутой сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости:

$$\Xi \equiv \frac{4\pi R^2 \sigma}{Q} = \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1+e^2(-2+e^2) \cos^2 \vartheta}}$$

от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ , который отсчитывается от вертикальной оси в сферической системе координат с началом в центре капли. Обезразмеривание поверхностной плотности заряда проведено на плотность поверхностного заряда равновеликой сферической капли.

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций вытянутой сфероидальной капли может реализоваться только при значениях эксцентриситета $e \geq 0.7$ и малых значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow 0$.

В заключение хотелось бы отметить, почему вытянутый и сплюснутый сфероиды рассмотрены по отдельности. Дело в том, что чисто математические определения эксцентриситетов сплюснутого и вытянутого сфероидов, например, в [3], не описываются одной непрерывной функцией. Для сплюснутого сфероида величина его эксцентриситета изменяется в диапазоне от 1 до 0, и эксцентриситет описывается одной функцией, а для вытянутого – величина эксцентриситета меняется от 0 до 1, и описывается другой функцией.

Во всех ситуациях истинный эксцентриситет это корень квадратный из разницы единицы и квадрата отношения меньшей полуоси к большей. При переходе от сплюснутого сфероида к вытянутому меньшая полуось при переходе величины эксцентриситета через ноль становится большей и наоборот.

Вообще-то есть другое определение (см. [25, стр. 47]), данное для эллипса, но подходящее для сфероида эксцентриситет есть отношение межфокусного расстояния к высоте сфероида вдоль оси симметрии. Но поскольку мы исходили из аналитических формул, приведенных в [23], то остановились на изложенном варианте.

Заключение. Исследованы физические закономерности реализации электростатической неустойчивости сильно заряженных капель, имеющих сфероидальные формы, как сплюснутые, так и вытянутые. Выяснилось, что неустойчивость осесимметричных сплюснутых капель имеет место на экваторе капли, не смотря на его протяженность – что и приводит к повышению их электростатической устойчивости при увеличении эксцентриситета, неустойчивость же осесимметричных вытянутых капель реализуется на вершинах капли, – что и приводит к уменьшению их электростатической устойчивости при увеличении эксцентриситета.

Приложение 1. Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного заряда на электропроводном сплюснутом сфероиде в сферической системе координат с началом в центре сфероида

Примем для определенности, как в [23, стр. 40], что сфероид сплюснут вдоль оси OZ (чтобы удобнее было ссылаться на формулы).

Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного электрического заряда на сплюснутом сфероиде $c < a = b$ с началом в центре капли (в [23, стр. 42]), формула (4.16):

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Подставляя сюда выражения декартовых координат через сферические:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

получим:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{r(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{r(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi a^2 c r(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{\cos^2 \vartheta}{c^4}}}, \quad (\text{П1.1})$$

$r(\vartheta)$ – выражение для уравнения сплюснутого сфероида, выписанного в сферических координатах с началом в центре капли:

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/3}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad (\text{П1.2})$$

где R – радиус равновеликой сферической капли.

Из (П1.2) меньшая полуось сфероида найдется при $\vartheta = 0$:

$$c = r(\vartheta)_{\vartheta=0} = R(1 - e^2)^{1/3}, \quad (\text{П1.3})$$

а большая при $\vartheta = \pi/2$:

$$a = r(\vartheta)_{\vartheta=\pi/2} = R(1 - e^2)^{-1/6} = \frac{R}{(1 - e^2)^{1/6}} \quad (\text{П1.4})$$

Подставляя (П1.2)–(П1.4) в (П1.1) найдем аналитическое выражение для распределения по поверхности сплюснутого электропроводного сфероида поверхностной плотности собственного заряда Q :

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}}$$

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при больших значениях эксцентриситета $e \geq 0.95$ и значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow \pi/2$.

Приложение 2. Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного заряда на поверхности вытянутого электропроводного сфероида в сферической системе координат с началом в центре сфероида

Примем для определенности, как в разд. 4 в [23, стр. 40], что сфероид вытянут вдоль оси OZ (чтобы удобнее было сослаться на формулы). Принято, что $c > a = b$.

Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного электрического заряда на сфероиде (в [23, стр. 42]), формула (4.16):

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Учитывая, что

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

В сферических координатах получим:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{r(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{r(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi a^2 c r(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{\cos^2 \vartheta}{c^4}}}, \quad (\text{П2.1})$$

$r(\vartheta)$ — определяется уравнением вытянутого сфероида с началом системы координат в центре капли

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/6}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}, \quad (\text{П2.2})$$

где R — радиус равновеликой сферической капли, а эксцентриситет e выражается через полуоси сфероида как:

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}, \quad c = R(1 - e^2)^{-1/3}, \quad a = R(1 - e^2)^{1/6} \quad (\text{П2.3})$$

Подставляя (П2.2)–(П2.3) в (П2.1) получим окончательное аналитическое выражение для поверхностной плотности заряда на вытянутом электропроводном заряженном сфероиде:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/6} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1 + e^2(-2 + e^2) \cos^2 \vartheta}}$$

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при значениях эксцентриситета $e \geq 0.7$ и малых значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow 0$.

Работа, выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания № госрегистрации 124012500442-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh (Strutt J.W.)* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. P. 184–186.
2. *Hendrics C.D., Schneider J.M.* Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // *J. Amer. Phys.* 1963. V. 1. № 6. P. 450–453.
3. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // *ЖТФ*. 1986. Т. 56. № 7. С. 1272–1278.
4. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Сплющивание и дробление капли в звуковом поле // *Акустич. ж.* 1987. Т. 33. № 2. С. 233–239.
5. *Стерлядкин В.В.* Рассеяние света дождевыми каплями // *Оптика атмосферы и океана*. 2000. Т. 13. № 5. С. 534–537.
6. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // *Изв. РАН. ФАО*. 2018. Т. 54. № 2. С. 1–7.
<https://doi.org/10.1134/S0001433818020123>
7. *Сергеев М.Н.* К теории дробления заряженной капли в потоке. // *Инж. ж.: Наука и инновации*. 2018. № 4. С. 1–11.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1751>
8. *Илюшин Я.А., Кутуза Б.Г.* Мультиспектральные поляризационные характеристики уходящего микроволнового излучения дождевых осадков // *Физич. основы приборостр.* 2018. Т. 7. № 1(27). С. 37–48.
<https://doi.org/10.25210/jfop-1801-037047>
9. *Самухина Ю.В., Матюшин Д.Д., Поляков П.А., Буряк А.К.* О зарядовой неустойчивости и метастабильном состоянии равновесия заряженной проводящей капли при электрораспылении жидкости // *Коллоидный ж.* 2021. Т. 83. № 4. С. 449–455.
<https://doi.org/10.31857/S0023291221040108>
10. *Федяева О.А., Пошелюжная Е.Г.* Размеры и ориентация мицелл тритона x-10 в водных растворах поданным турбидиметрии // *ж. Физич. химии*. 2019. Т. 93. № 12. С. 1910–1912.
<https://doi.org/10.1134/S0044453719120070>
11. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* Об акустическом и электромагнитном излучениях осциллирующей в материальной среде заряженной капли // *Изв. РАН. ФАО*. 2023. Т. 59. № 3. С. 352–372.
<https://doi.org/10.31857/S0002351523030045>
12. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* Nonlinear monopole and dipole acoustic radiation of a weakly charged droplet oscillating in a uniform electrostatic field // *Fluid Dyn.* 2022. V. 57. № 8. P. 982–997.
<https://doi.org/10.1134/S0015462822080031>
13. *Zubarev N.M.* Self-similar solutions for conic cusps formation at the surface of dielectric liquids in electric field // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. № 055301. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.055301>
14. *de la Mora J.F.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Ann. Rev. of Fluid Mech.* 2007. V. 39. P. 217–243.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110159>
15. *Taflin D.C., Ward T.L., Davis E.J.* Electrified droplet fission and the Rayleigh limit // *Langmuir*. 1989. V. 9. № 2. P. 376–384.
<https://doi.org/10.1021/la00086a016>
16. *Duft D., Achtzehn T., Muller R.* et al. Rayleigh jets from levitated microdroplets // *Nature*. 2003. V. 421. P. 128.
17. *Kuo-Yen Li, Haohua Tu, Asit K. Ray.* Charge limits on droplets during evaporation // *Langmuir*. 2005. V. 21. № 9. P. 3786–3794.
<https://doi.org/10.1021/la047973n>
18. *Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A.* An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops // *Am.J. Phys.* 2007. V. 75. № 6. P. 499–503.
<https://doi.org/10.1119/1.2717221>
19. *Hunter H.C., Ray Asit K.* On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged microdrops // *Phys. Chem.&Chem. Phys.* 2009. V. 11. № 29. P. 6156–6165.
<https://doi.org/10.1039/b820457h>

20. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критические условия неустойчивости сплюснутой сферoidalной сильно заряженной капли // ЭОМ. 1992. № 6. С. 20–23.
21. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1982. 620 с.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1992. 662 с.
24. Безруков В.И. Научно-технические основы и аппаратное обеспечение автоматизированной электрокапельструйной маркировки изделий. Дисс. на соискание уч. ст. доктора технич. наук: Санкт-Петербургский гос. политехн. ун-т, Санкт-Петербург: 2003. 505 с.
25. Фильчаков Л.Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1973. 744 с.

On the Physical Regularities of the Instability of Charged Spheroidal Droplets

A. I. Grigoriev^{a,#}, S. O. Shiryaeva^{b,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: grigorai@mail.ru*

^b*Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, Russia*

^{##}*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Asymptotic methods study the conditions for the implementation of electrostatic instability of oscillating highly charged flattened and elongated spheroidal droplets depending on the values of their eccentricities. It turned out that the electrostatic stability of the flattened spheroidal droplet with respect to axisymmetric deformations increases with an increase in eccentricity, and the elongated spheroidal droplet decreases. It is shown that the electrostatic instability of the flattened charged droplet itself is realized at its equator, where the surface density of the charge reaches the maximum value, and for the elongated droplet at its vertices.

Keywords: flattened and elongated spheroidal drops, charge, instability

REFERENCES

1. Rayleigh (Strutt J.W.) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag., 1882, vol. 14, pp. 184–186.
2. Hendriens C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // J. Amer. Phys., 1963, vol. 1, no. 6, pp. 450–453.
3. Grigoriev A.I. On the mechanism of instability of a charged conductive drop // J. of Tech. Phys., 1986, vol. 56, no. 7, pp. 1272–1278.
4. Danilov S.D., Mironov M.A. Flattening and crushing of the drop in the sound field // Acoustic J., 1987, vol. 33, no. 2, pp. 233–239.
5. Sterlyadkin V.V. Light scattering by raindrops // Optics of the Atmos.&Ocean, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 534–537.
6. Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Surface fluctuations of the free-falling drop of the ideal liquid // Izv. RAS. FAO, 2018, vol. 54, no. 2, ss. 1–7.
7. Sergeev M.N. To the theory of crushing a charged drop in a stream // Engng. J.: Sci.&Innov., 2018, no. 4, ss. 1–11.
8. Iyushin Ya.A., Kutuza B.G. Multispectral polarization characteristics of outgoing microwave radiation of rainfall // Physical Foundations of Instrumentation, 2018, T. 7, no. 1(27), pp. 37–48.
9. Samukhina Yu.V., Matyushin D.D., Polyakov P.A., Buryak A.K. On charge instability and metastable equilibrium state of a charged conductive drop during liquid electrospray // Colloid J., 2021, vol. 83, no. 4, pp. 449–455.
10. Fedyayeva O.A., Poshelyuzhnaya E.G. Dimensions and orientation of triton micelles x-10 in aqueous solutions according to turbidimetry data // J. of Phys. Chem., 2019, vol. 93, no. 12, pp. 1910–1912.

11. *Grigoriev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* On acoustic and electromagnetic radiation oscillating in the material medium of a charged drop // *Izv. RAS. FAO*, 2023, vol. 59, no. 3, ss. 352–372.
<https://doi.org/10.31857/S0002351523030045>
12. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* Nonlinear monopole and dipole acoustic radiation of a weakly charged droplet oscillating in a uniform electrostatic field // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 982–997.
<https://doi.org/10.1134/S0015462822080031>
13. *Zubarev N.M.* Self-similar solutions for conic cusps formation at the surface of dielectric liquids in electric field // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, no. 055301, pp. 1–4.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.055301>
14. *de la Mora J.F.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 2007, vol. 39, pp. 217–243,
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110159>
15. *Taflin D.C., Ward T.L., Davis E.J.* Electrified droplet fission and the Rayleigh limit // *Langmuir*, 1989, vol. 9, no. 2, pp. 376–384.
<https://doi.org/10.1021/la00086a016>
16. *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* Rayleigh jets from levitated microdroplets // *Nature*, 2003, vol. 421, pp. 128.
17. *Kuo-Yen Li, Haohua Tu, Ray A.K.* Charge limits on droplets during evaporation // *Langmuir*, 2005, vol. 21, no. 9, pp. 3786–3794.
<https://doi.org/10.1021/la047973n>
18. *Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A.* An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops // *Am.J. Phys.*, 2007, vol. 75, no. 6, pp. 499–503.
<https://doi.org/10.1119/1.2717221>
19. *Hunter H.C., Ray Asit K.* On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged microdrops // *Phys. Chem.&Chem. Phys.*, 2009, vol. 11, no. 29, pp. 6156–6165.
<https://doi.org/10.1039/b820457h>
20. *Grigoriev A.I., Shiryayeva S.O.* Critical conditions of instability of flattened spheroidal highly charged drop // *EOM*, 1992, no. 6, pp. 20–23.
21. *Frenkel J.I.* To the Tonks theory of liquid surface rupture by a constant electric field in vacuum // *PETF*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350.
22. *Landau L.D., Lifshits E.M.* *Hydrodynamics*. Moscow: Nauka, 1982. 620 p.
23. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* *Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media*. Moscow: Nauka, 1992. 662 p.
24. *Bezrukov V.I.* *Scientific and Technical Foundations and Hardware of Automated Electrocaplet-jet Marking of Products / Diss. for the degree of Doctor of Tech. Sci.* St. Petersburg State Polytechnic Univ., St. Petersburg: 2003. 505 p.
25. *Filchakov L.F.* *Handbook of Higher Mathematics*. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 744 p.