ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 4, с. 661–669

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА

 О. В. Фадеева[1],*

[1]Самарский государственный технический университет, Самара, Россия
*e-mail: faoks@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Для уравнения колебания балки изучаются обратные задачи по отысканию правой части, т.е. источника колебаний. Решения задач методами спектрального анализа и интегральных уравнений Вольтерра построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования. При обосновании существования решения обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственной координаты, возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим установлены оценки знаменателей, гарантирующие их отделенность от нуля, с указанием соответствующей асимптотики. На основании этих оценок обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения колебаний балки.

Ключевые слова: уравнение балки, обратные задачи, метод спектрального анализа, единственность, существование, интегральное уравнение Вольтерра

DOI: 10.31857/S0032823523040057, **EDN:** MMTCAD

1. Введение. В строительной механике, авиастроении, машиностроении и других областях значимую роль играют задачи о колебаниях балок, стержней и пластин. Описание таких колебательных процессов приводит к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение колебания струны ([1], с. 143–145), ([2], с. 276–277), ([3], с. 314–315), ([4], с. 34), ([5], с. 75–77).

Рассмотрим однородную балку длины l, один конец которой свободен, а другой наглухо заделан. Ее вынужденные изгибные поперечные колебания под действием непрерывной внешней силы $G(x,t)$, при отсутствии вращательного движения, описываются уравнением

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} = G(x,t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение можно переписать в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t), \tag{1.1}$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $F(x,t) = G(x,t)/\rho S$.

Отметим, что при изучении задач расчета устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей так же приходят к уравнению (1.1) ([6], с. 326).

В данной работе рассматривается уравнение (1.1) в области

$$D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T — заданные положительные действительные числа, с граничными условиями, соответствующими консольной балке,

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0; \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x); \quad 0 \le x \le l \tag{1.3}$$

В данной работе исследуются следующие задачи.

Задача 1. В области D найти решение $u(x,t)$ уравнения (1.1), такое, что

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}\left(\overline{D}\right), \tag{1.4}$$

и удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), где $F(x,t)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задача 2. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Найти функции $f(x)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в области D, такие, что $f(x) \in C[0,l]$, а функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1.2)—(1.4) и, кроме того,

$$u(x,t_0) = \varphi(x); \quad 0 \le x \le l, \tag{1.5}$$

где $g(t)$, $\varphi(x)$, $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, t_0 — заданная точка из $(0,T]$.

Задача 3. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Найти функции $g(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в области D, такие, что $g(t) \in C[0,T]$, а функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1.2)—(1.4) и, кроме того,

$$u(x_0,t) = h(t); \quad 0 \le t \le T, \tag{1.6}$$

где $f(x)$, $h(t)$, $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, x_0 — заданная точка из $(0,l)$.

Из постановок задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний балки (1.1). Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому условия (1.5) и (1.6) являются дополнительными для определения соответственно сомножителей $f(x)$ и $g(t)$ правой части $F(x,t)$ уравнения (1.1).

Данная работа является продолжением исследований автора [7], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничной задачи 1 для уравнения (1.1). Основное внимание здесь уделяется задачам 2 и 3, постановки которых аналогичны работам [8—12], где похожие задачи изучались для уравнений теплопроводности, колебаний струны и других дифференциальных уравнений второго порядка и высоких порядков.

В данной работе на основе прямой задачи 1, изученной в [7], доказаны теоремы единственности и существования решений обратных задач 2 и 3. При этом решения построены в виде суммы рядов. Отметим, что при обосновании сходимости рядов в задаче 2 возникает проблема малых знаменателей, создающая дополнительные трудности. Установлены оценки, гарантирующие отделенность от нуля знаменателей, с указанием соответствующей асимптотики. На основании этих оценок обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1.1).

2. Построение решения прямой задачи. В этом пункте кратко приведены результаты исследования задачи 1, полученные в [7], где методом интегралов энергии доказана единственность решения этой задачи. Методом разделения переменных построено решение задачи (1.2)–(1.4) для уравнения (1.1) в явном виде как суммы ряда по системе собственных функций следующей спектральной задачи:

$$X^{\mathrm{IV}}(x) + \lambda X(x) = 0; \quad 0 < x < l$$
$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0$$

Собственные значения этой спектральной задачи находятся по формуле $\lambda_n = -d_n^4$, где d_n – корни уравнения $chdl \cdot \cos dl = -1$, для которых справедлива асимптотическая формула

$$d_n = \frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n\right), \quad \Theta_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \Theta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.1}$$

Система собственных функций имеет вид

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l}\left(\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x\right) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x,$$

или

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n\left(x - \frac{1}{2}l\right) + b_n \sin d_n\left(x - \frac{1}{2}l\right), & n = 2k - 1 \\ c_n \operatorname{sh} d_n\left(x - \frac{1}{2}l\right) + f_n \cos d_n\left(x - \frac{1}{2}l\right), & n = 2k, \end{cases}$$

где $a_n = \dfrac{1}{\operatorname{sh}\frac{d_n l}{2}}$, $b_n = \dfrac{1}{\cos\frac{d_n l}{2}}$, $c_n = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{d_n l}{2}}$, $f_n = \dfrac{1}{\sin\frac{d_n l}{2}}$.

Нормируя эту систему, получаем

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \quad \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l}\operatorname{cth}\frac{d_n l}{2}, & n = 2k - 1 \\ \sqrt{l}\operatorname{th}\frac{d_n l}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Отметим, что система функций $Y_n(x)$ полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, l]$.

Тогда решение задачи 1 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \tag{2.2}$$

где $u_n(t)$ определяются по формуле

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t) Y_n(x) dx,$$

и после вычисления принимают вид

$$u_n(t) = \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\nu_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2}\int_0^t F_n(s) \sin\left[\alpha d_n^2 (t - s)\right] ds, \tag{2.3}$$

где $\tau_n = \int_0^l \tau(x) Y_n(x) dx$, $\nu_n = \int_0^l \nu(x) Y_n(x) dx$, $F_n(t) = \int_0^l F(x,t) Y_n(x) dx$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если функция $\tau(x)$ принадлежит классу $C^6[0,l]$, $\tau(0)=\tau'(0)=\tau''(l)=\tau'''(l)=$ $=\tau^{(4)}(0)=\tau^{(5)}(0)=0$, функция $\nu(x)$ — классу $C^4[0,l]$, $\nu(0)=\nu'(0)=\nu''(l)=\nu'''(l)=0$, а функция $F(x,t)$ – классу $C\left(\bar{D}\right)\cap C_x^4\left(\bar{D}\right)$ и $F(0,t)=F_x(0,t)=F_{xx}(l,t)=F_{xxx}(l,t)=0$ при $0\le t\le T$, то существует единственное решение задачи 1 и оно определяется рядом (2.2).

Полное доказательство этой теоремы приведено в работе [7].

3. Исследование обратной задачи 2. Пусть $F(x,t)=f(x)g(t)$. В силу теоремы 1 функции $f(x)$ и $g(t)$ должны удовлетворять условиям:

$$f(x)\in C^4\left[0,l\right],\quad f(0)=f'(0)=f''(l)=f'''(l)=0;\quad g(t)\in C\left[0,T\right]$$

Тогда функции $F_n(t)$ и $u_n(t)$ принимают вид

$$F_n(t)=g(t)f_n,\quad u_n(t)=\tau_n\cos\alpha d_n^2t+\frac{\nu_n}{\alpha d_n^2}\sin\alpha d_n^2t+f_ng_n(t),\tag{3.1}$$

где

$$f_n=\int\limits_0^l f(x)Y_n(x)dx,\quad g_n(t)=\frac{1}{\alpha d_n^2}\int\limits_0^t g(s)\sin\left[\alpha d_n^2\left(t-s\right)\right]ds\tag{3.2}$$

Удовлетворяя функцию (2.2) условию (1.5), получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(t_0\right)Y_n(x)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nY_n(x),$$

где $\varphi_n=\int_0^l\varphi(x)Y_n(x)dx$.

Тогда с учетом (2.3) найдем

$$f_n=\frac{1}{g_n(t_0)}\left(\varphi_n-\tau_n\cos\alpha d_n^2t_0-\frac{\nu_n}{\alpha d_n^2}\sin\alpha d_n^2t_0\right),\tag{3.3}$$

при условии, что для всех $n\in N:g_n(t_0)\ne0$.

Подставляя найденные значения f_n в равенство (2.3), построим в явном виде функции

$$\begin{aligned}u_n(t)&=\tau_n\cos\alpha d_n^2t+\frac{\nu_n}{\alpha d_n^2}\sin\alpha d_n^2t+\frac{g_n(t)}{g_n(t_0)}\left(\varphi_n-\tau_n\cos\alpha d_n^2t_0-\frac{\nu_n}{\alpha d_n^2}\sin\alpha d_n^2t_0\right)=\\&=\tau_n\left(\cos\alpha d_n^2t-\frac{g_n(t)}{g_n(t_0)}\cos\alpha d_n^2t_0\right)+\frac{\nu_n}{\alpha d_n^2}\left(\sin\alpha d_n^2t-\frac{g_n(t)}{g_n(t_0)}\sin\alpha d_n^2t_0\right)+\varphi_n\frac{g_n(t)}{g_n(t_0)}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Тогда решение задачи 2 находится как сумма рядов

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)Y_n(x)\quad\text{и}\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nY_n(x),\tag{3.5}$$

где $u_n(t)$ и f_n определяются равенствами (3.4) и (3.3) соответственно, при условии, что $g_n(t_0)\ne0$ для любых $n\in N$.

Из однозначного характера построения решения задачи 2 следует его единственность. Действительно, пусть $g_n(t_0)\ne0$ при всех $n\in N$ и $\varphi(x)=\tau(x)=\nu(x)\equiv0$. Тогда из (3.3) и (3.4) вытекает, что $f_n=0$ и $u_n(t)\equiv0$ при всех $n\in N$. В силу чего из формул (2.2) и (3.2) следуют равенства

$$\int_0^l u(x,t)Y_n(x)dx = 0, \quad \int_0^l f(x)Y_n(x)dx = 0,$$

из которых в силу полноты системы функций $Y_n(x)$ на $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Тогда из условия (1.4) и непрерывности функции $f(x)$ на $[0,l]$ следует, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ при любой функции $g(t) \in C[0,T]$.

Если при некотором t_0 и $n = m$ выражение $g_m(t_0) = 0$, то однородная задача 2 (при $\varphi(x) = \tau(x) = \nu(x) \equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = f_m \frac{1}{\alpha d_m^2} \int_0^t g(s) \sin\left[\alpha d_m^2 (t-s)\right] ds Y_m(x), \quad f(x) = f_m Y_m(x),$$

где $f_m \neq 0$ – произвольная постоянная.

Выражение $g_n(t_0)$ за счет $\sin\left(\alpha d_m^2 (t-s)\right)$ может обращаться в нуль не более чем в счетном числе точек.

Поэтому возникает проблема малых знаменателей и необходимо установить оценки величин $g_n(t_0)$, гарантирующие их отдаленность от нуля, и указать асимптотику этих оценок при больших n.

Пусть $g(s)$ монотонна на отрезке $[0,t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем для некоторой точки $\xi \in (0,t_0)$ справедливо:

$$\begin{aligned}
\alpha d_n^2 g_n(t_0) &= g(0)\int_0^{\xi} \sin\left[\alpha d_n^2 (t_0 - s)\right] ds + g(t_0)\int_{\xi}^{t_0} \sin\left[\alpha d_n^2 (t_0 - s)\right] ds = \\
&= \frac{g(0)}{\alpha d_n^2}\left(\cos\left[\alpha d_n^2 (t_0 - \xi)\right] - \cos\left(\alpha d_n^2 t_0\right)\right) + \frac{g(t_0)}{\alpha d_n^2}\left(1 - \cos\left[\alpha d_n^2 (t_0 - \xi)\right]\right) = \\
&= \frac{\cos\left(\alpha d_n^2 (t_0 - \xi)\right)}{\alpha d_n^2}\left(g(0) - g(t_0)\right) + \frac{g(t_0)}{\alpha d_n^2} - \frac{g(0)}{\alpha d_n^2}\cos \alpha d_n^2 t_0; \quad 0 < \xi < t_0
\end{aligned}$$

Пусть $g(s)$ на отрезке $[0,t_0]$ возрастает и неотрицательна. Тогда $g(t_0) = g(0) + \beta$, $\beta \geq 0$, и тогда имеем

$$\begin{aligned}
\alpha d_n^2 g_n(t_0) &= \frac{\beta}{\alpha d_n^2}\left(1 - \cos\left(\alpha d_n^2 (t_0 - \xi)\right)\right) + \frac{g(0)}{\alpha d_n^2}\left(1 - \cos \alpha d_n^2 t_0\right) \geq \\
&\geq \frac{g(0)}{\alpha d_n^2}\left(1 - \cos \alpha d_n^2 t_0\right) = \frac{2g(0)}{\alpha d_n^2} \sin \frac{\alpha d_n^2 t_0}{2}
\end{aligned}$$

Таким образом, при $g(s) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ равенство $g_n(t_0) = 0$ возможно только при $\alpha d_n^2 t_0 = 2\pi k$, $k \in N$. В силу (2.1) при больших n: $d_n \approx \frac{\pi}{2l}(2n-1)$, тогда при $d = \frac{\alpha t_0 \pi}{8l^2} = \frac{k}{(2n-1)^2}$ нарушается единственность решения задачи 2.

Итак, установлен критерий единственности решения задачи 2.

Теорема 2. Если существует решение задачи 2, то оно единственно тогда и только тогда, когда $g_n(t_0) \neq 0$ для всех $n \in N$.

Лемма 1. Пусть $g(t)$ — возрастающая и положительная функция на отрезке $[0,T]$ и d — алгебраическое число степени $s \geq 2$. Тогда при больших n справедливы оценки

$$|g_n(t)| \leq \frac{2\|g\|_C}{\left(\alpha d_n^2\right)^2} \leq \frac{C_1}{n^4}, \quad |g_n(t_0)| \geq \frac{C_1}{n^{8+\varepsilon}}; \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где $\|g\|_C = \sup\limits_{0\leq t\leq T}|g(t)|$, C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от $\alpha, l, T, \|g\|_C$.

Доказательство проводится аналогично работе [12].

Лемма 2. Пусть d — алгебраическое число степени $s \geq 2$. Тогда при любом $t \in [0,T]$ и больших n справедливы оценки

$$|u_n(t)| \leq C_2 n^{4+\varepsilon}\left(|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2}|\nu_n|\right), \quad \left|u_n''(t)\right| \leq C_3 n^{8+\varepsilon}\left(|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2}|\nu_n|\right),$$
$$|f_n| \leq C_4 n^{8+\varepsilon}\left(|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2}|\nu_n|\right).$$

Справедливость этих оценок следует из формул (3.4) и (3.3) на основании леммы 1.

Формально почленным дифференцированием первого ряда из (3.5) составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)Y_n(x), \quad u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t)Y_n(x)$$

В силу леммы 2 эти ряды при любых $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_5\sum_{n=1}^{\infty} n^{8+\varepsilon}\left(|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2}|\nu_n|\right), \tag{3.6}$$

для сходимости которого достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{gathered}
\tau(x) \in C^{10}[0,l] \\
\tau(0) = \tau'(0) = \tau''(l) = \tau'''(l) = \tau^{(4)}(0) = \tau^{(5)}(0) = \tau^{(6)}(l) = \tau^{(7)}(l) = \tau^{(8)}(0) = \tau^{(9)}(0) = 0 \\
\varphi(x) \in C^{10}[0,l] \\
\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(6)}(l) = \varphi^{(7)}(l) = \varphi^{(8)}(0) = \varphi^{(9)}(0) = 0 \\
\nu(x) \in C^{8}[0,l], \quad \nu(0) = \nu'(0) = \nu''(l) = \nu'''(l) = \nu^{(4)}(0) = \nu^{(5)}(0) = \nu^{(6)}(l) = \nu^{(7)}(l) = 0
\end{gathered} \tag{3.7}$$

При выполнении этих условий ряд (3.6) мажорируется сходящимся рядом

$$C_6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\tau(x)$ $\nu(x)$ удовлетворяют условиям (3.7), кроме этого, непрерывная функция $g(t)$ и число d удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда существует единственное решение задачи 2 и оно определяется рядами (3.5).

4. Исследование обратной задачи 3. Удовлетворим функцию (2.2) граничному условию (1.6):

$$u(x_0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x_0) = h(t); \quad 0 \leq t \leq T$$

С учетом (3.1) из последнего равенства получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $g(t)$:

$$\int_0^t g(s)K(t,s)ds = \tilde{h}(t); \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1}$$

где

$$K(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 (t-s) Y_n(x_0); \quad 0 \le s \le t \le T \tag{4.2}$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\nu_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0); \quad 0 \le t \le T \tag{4.3}$$

Формально почленным дифференцированием ряда (4.2) составим ряды

$$K_t'(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \alpha d_n^2 (t-s) Y_n(x_0), \quad K_{tt}''(t,s) = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 f_n \sin \alpha d_n^2 (t-s) Y_n(x_0) \tag{4.4}$$

Аналогично из (4.3) получим

$$\begin{gathered} \tilde{h}'(t) = h'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha d_n^2 \tau_n \sin \alpha d_n^2 t - \nu_n \cos \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0) \\ \tilde{h}''(t) = h''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\alpha d_n^2 \right)^2 \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \alpha d_n^2 \nu_n \sin \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0) \end{gathered} \tag{4.5}$$

На основании леммы 2 при любых $(x,t) \in \overline{D}$ ряды (4.2) и (4.4) мажорируются числовым рядом $C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n|$, а ряды (4.3) и (4.5) – рядом $C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(|\tau_n| + n^{-2} |\nu_n| \right)$.

Для сходимости указанных числовых рядов достаточно потребовать выполнения условий теоремы 3. Тогда эти ряды мажорируются сходящимся рядом $C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Дифференцируя интегральное уравнение (4.1) по t, будем иметь

$$g(t)K(t,t) + \int_0^t g(s) K_t'(t,s) ds = \tilde{h}'(t); \quad 0 \le t \le T$$

Учитывая, что $K(t,t) = 0$, при повторном дифференцировании получим

$$g(t)K_t'(t,t) + \int_0^t g(s) K_{tt}''(t,s) ds = \tilde{h}''(t); \quad 0 \le t \le T$$

Поскольку из (4.2) следует, что

$$\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \right|_{t=s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x_0) = f(x_0),$$

то последнее уравнение примет вид

$$g(t) f(x_0) + \int_0^t g(s) K_{tt}''(t,s) ds = \tilde{h}''(t); \quad 0 \le t \le T \tag{4.6}$$

Тогда, если $f(x_0) \ne 0$, то уравнение (4.6) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью при условии

$h(t) \in C^2[0,T]$. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение $g(t)$ в классе $C[0,T]$.

Теорема 4. Пусть функции $\tau(x)$, $\nu(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $f(x) \in C^4[0,l]$, $f(0) = f'(0) = f''(l) = f'''(l) = 0$, $h(t) \in C^2[0,T]$ и $h(0) = \tau(x_0)$, $h'(0) = \nu(x_0)$. Тогда, если $f(x_0) \neq 0$, то задача 3 имеет единственное решение, которое определяется формулой (2.2), а функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения (4.6).

Выясним, насколько существенно условие $f(x_0) \neq 0$ в теореме 4. Пусть для некоторых $n = m$ выполняется равенство $Y_m(x_0) = 0$. Тогда для функции $f(x) = Y_m(x)$ при любой функции $g(t) \in C[0,T]$ существует ненулевое решение задачи 3 (где $\tau(x) = \nu(x) = h(t) = 0$)

$$u(x,t) = \frac{Y_m(x)}{\alpha d_m^2}\int_0^t g(s)\sin\left[\alpha d_m^2(t-s)\right]ds$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. *Рэлей Л.* Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
4. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
5. *Доннел Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
6. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М.: Гостехиздат, 2012. 447 с.
7. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самар. Гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
8. *Романов В.Г.* Обратные задачи уравнений математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
9. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
10. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: 1999. 709 c.
11. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сиб. научн. изд-во, 2009. 457 с.
12. *Сабитов К.Б.* Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифф. уравн. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.

Inverse Problems for the Equation of Vibrations of a Canister Beam to Find the Source

O. V. Fadeeva[a,#]

[a]*Samara State Technical University, Samara, Russia*

[#]*e-mail: faoks@yandex.ru*

For the beam vibration equation, inverse problems are studied to find the right side, i.e. vibration source. Solutions of the problems by methods of spectral analysis and Volterra integral equations are constructed explicitly as sums of series, and the corresponding uniqueness and existence theorems are proved. When substantiating the existence of a solution to the inverse problem by determining the factor of the right-hand side, which depends on the spatial coordinate, the problem of small denominators arises. In this regard, estimates of the denominators are established that guarantee their separation from zero, with an indication of the corresponding asymptotics. On the basis of these estimates, the convergence of the series in the class of regular solutions of the beam oscillation equation is substantiated.

Keywords: beam equation, inverse problems, spectral analysis method, uniqueness, existence, Volterra integral equation

REFERENCES

1. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1966. 724 p.
2. *Rayleigh L.* Theory of Sound. Vol. 1. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 503 p.
3. *Timoshenko S.P.* Fluctuations in Engineering. Moscow: Fizmatlit, 1967. 444 p.
4. *Filippov A.P.* Oscillations of Deformable Systems. Moscow: Mashinostroenie, 1970. 736 p.
5. *Donnel L.G.* Beams, Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1982. 568 p.
6. *Krylov A.N.* Vibration of Ships. Moscow: Gostekhizdat, 2012. 447 p.
7. *Sabitov K.B., Fadeeva O.V.* Initial-boundary problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam // Bull. Samara State Techn. Univ. Ser.: Phys.&Mathe. Sci., 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66.
8. *Romanov V.G.* Inverse Problems of Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1984. 264 p.
9. *Denisov A.M.* Introduction to the Theory of Inverse Problems. Moscow: MGU, 1994. 208 p.
10. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.; Basel: 1999. 709 p.
11. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems. Novosibirsk: Sib. Sci. Publ. House, 2009. 457 p.
12. *Sabitov K.B.* Inverse Problems for the equation of beam vibrations by determination of the right-hand side and initial conditions // Diff. Eqns., 2020, vol. 56, no. 6, pp. 773–785.