ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 4, с. 589–603

УДК 531.1:521.1

О РЕЗОНАНСНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ В БЛИЗКОЙ К КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев[1,*]

[1]*Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*

**e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 07.06.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассматривается ограниченная задача трех тел (материальных точек), движущихся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Орбиты основных притягивающих тел считаются эллипсами с малым эксцентриситетом, а пассивно гравитирующее тело может совершать произвольное пространственное движение вблизи треугольной точки либрации. Для функции Гамильтона, отвечающей такому движению, указана структура нормальной формы в случае резонансов третьего порядка. С точностью до второй степени эксцентриситета получены уравнения резонансных кривых для всех резонансов плоской ограниченной задачи трех тел до шестого порядка включительно.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, треугольные точки либрации, резонанс

DOI: 10.31857/S0032823523040082, **EDN:** DZRUBV

Точки либрации – точные решения ограниченной задачи трех тел открыты более 250-ти лет назад Эйлером [1] и Лагранжем [2]. В решении Эйлера три тела располагаются вдоль одной прямой (прямолинейные точки либрации), а в решениях Лагранжа они образуют равносторонний треугольник, лежащий в плоскости орбит основных притягивающих тел (треугольные точки либрации).

Анализу задачи об устойчивости точек либрации и о характере близких к ним движений посвящена обширная литература. Обсуждение основных полученных научных результатов и достаточно подробную библиографию можно найти, например, в [3–13]. Проведенный анализ и полученные результаты важны не только с общетеоретической точки зрения. Существуют проекты (некоторые из них уже осуществлены [14–16]) запуска космических аппаратов в окрестности точек либрации Солнечной системы (и, в частности, системы Земля–Луна) с целью решения практических задач космических исследований.

Пространственная ограниченная задача обладает характерной только для нее особенностью, состоящей в том, что она всегда является резонансной, так как период кеплеровского движения основных притягивающих тел равен периоду линейных колебаний пассивно гравитирующего тела вдоль направления нормали к плоскости их орбит.

Исследованию нелинейной задачи об устойчивости треугольных точек либрации в близкой к круговой ограниченной пространственной задаче трех тел посвящены работы [12, 13]. В этих работах предполагалось, что отсутствуют резонансы плоской ограниченной задачи до шестого порядка включительно. При помощи методов классической теории возмущений и КАМ-теории в [12, 13] показана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и указана оценка Нехорошева времени устойчивости для траекторий, начинающихся в дополнении к упомянутому большинству начальных условий.

В данной статье обсуждаются вопросы, связанные с нерассмотренными в [12, 13] резонансами. Для всех резонансов плоской ограниченной задачи до шестого порядка включительно получено аналитическое представление с точностью до второй степени эксцентриситета орбит основных притягивающих тел. Описана также структура нормальной формы Биркгофа функции Гамильтона в случае резонансов третьего порядка.

1. Введение. Функция Гамильтона возмущенного движения. Рассмотрим материальные точки P_i с массами m_i ($i = 1, 2, 3$), движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что масса точки P_3 пренебрежимо мала по сравнению с массами точек P_1 и P_2, поэтому орбита точки P_2 относительно точки P_1 определяется из задачи двух тел. Предположим, что она является эллипсом с эксцентриситетом e.

Для описания движения точки P_3 будем использовать безразмерные координаты Нехвилла, а в качестве независимой переменной примем истинную аномалию ν в эллиптическом движении точки P_2. Дифференциальные уравнения движения точки P_3 можно получить [7, 8, 12] в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона Γ вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + p_x y - p_y x + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \frac{1}{1+e\cos\nu}\Pi$$

$$\Pi = -\frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(0 < \mu \le \frac{1}{2}\right) \tag{1.1}$$

$$R_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2}$$

Соответствующие этой функции канонические уравнения движения допускают решение

$$x_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0, \quad p_{x_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{y_0} = \frac{1-2\mu}{2}, \quad p_{z_0} = 0,$$

отвечающее треугольной точке либрации. Если по формулам

$$x = x_0 + u_1, \quad y = y_0 + u_2, \quad z = u_3, \ p_x = p_{x_0} + v_1, \quad p_y = p_{y_0} + v_2, \quad p_z = v_3,$$

ввести возмущения u_j, v_j, $(j = 1, 2, 3)$, то точке либрации будет отвечать положение равновесия $u_j = v_j = 0$.

Разложив функцию (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j и отбросив в нем слагаемое, не зависящее от u_j, v_j, получим функцию Гамильтона возмущенного движения в виде ряда

$$\Gamma = \sum_{m=2}^{\infty} \Gamma_m, \tag{1.2}$$

где Γ_m – форма степени m относительно u_j, v_j с 2π-периодическими по ν коэффициентами. Первые пять форм получаются такими:

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2\right) + u_2 v_1 - u_1 v_2 + \frac{1}{8}u_1^2 - k u_1 u_2 - \frac{5}{8}u_2^2 + \frac{1}{2}\left(u_3^2 + v_3^2\right) +$$

$$+ \frac{e\cos\nu}{8(1+e\cos\nu)}\left(3u_1^2 + 8k u_1 u_2 + 9u_2^2\right) \tag{1.3}$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left[-\frac{7\sqrt{3}k}{36}u_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16}u_1^2u_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12}u_1u_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}u_2^3 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\sqrt{3}k}{3}u_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}u_2\right)u_3^2\right] \tag{1.4}$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left[\frac{37}{128}u_1^4 + \frac{25k}{24}u_1^3u_2 - \frac{123}{64}u_1^2u_2^2 - \frac{15k}{8}u_1u_2^3 - \frac{3}{128}u_2^4 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{16}u_1^2 + \frac{5k}{2}u_1u_2 + \frac{33}{16}u_2^2\right)u_3^2 - \frac{3}{8}u_3^4\right] \tag{1.5}$$

$$\Gamma_5 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left[\frac{23\sqrt{3}k}{576}u_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256}u_1^4u_2 - \frac{215\sqrt{3}k}{288}u_1^3u_2^2 + \frac{345\sqrt{3}}{128}u_1^2u_2^3 + \right.$$
$$+ \frac{185\sqrt{3}k}{192}u_1u_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256}u_2^5 + \left(\frac{25\sqrt{3}k}{72}u_1^3 - \frac{45\sqrt{3}}{32}u_1^2u_2 - \frac{85\sqrt{3}k}{24}u_1u_2^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32}u_2^3\right)u_3^2 +$$
$$\left. + \left(\frac{5\sqrt{3}k}{12}u_1 + \frac{15\sqrt{3}}{16}u_2\right)u_3^4\right] \tag{1.6}$$

$$\Gamma_6 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left[-\frac{331}{1024}u_1^6 + \frac{49k}{128}u_1^5u_2 + \frac{6105}{1024}u_1^4u_2^2 - \frac{35k}{64}u_1^3u_2^3 - \frac{7965}{1024}u_1^2u_2^4 - \right.$$
$$- \frac{119k}{128}u_1u_2^5 + \frac{383}{1024}u_2^6 + \left(-\frac{285}{256}u_1^4 - \frac{35k}{16}u_1^3u_2 + \frac{1395}{128}u_1^2u_2^2 + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{175k}{16}u_1u_2^3 + \frac{555}{256}u_2^4\right)u_3^2 - \left(\frac{45}{64}u_1^2 + \frac{35k}{8}u_1u_2 + \frac{255}{64}u_2^2\right)u_3^4 + \frac{5}{16}u_3^6\right] \tag{1.7}$$

В (1.3)–(1.7) для краткости введено обозначение $k = 3\sqrt{3}(1-2\mu)/4$.

2. Линейная задача. Линейным уравнениям возмущенного движения отвечает квадратичная часть Γ_2 в разложении функции Гамильтона (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j $(j = 1,2,3)$. Из (1.3) видно, что движение по плоским u_j, v_j $(j = 1,2)$ и пространственным переменным u_3, v_3 разделяются, причем пространственным переменным отвечают гармонические колебания с частотой, равной единице.

Линейная система дифференциальных уравнений, соответствующая плоским переменным, имеет четвертый порядок. Характеристическое уравнение ее матрицы монодромии является возвратным и записывается в виде [3]

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0,$$

где a_1 — след матрицы монодромии, a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка. В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости в первом (линейном) приближении задается [3] системой неравенств

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2 \tag{2.1}$$

В плоскости параметров μ, e область (3.2) получена в [4] (см. также рис. 12 в гл. 9 книги [8]). Для значений параметров μ, e, лежащих внутри области устойчивости, все шесть мультипликаторов имеют модули, равные единице. Сама же линейная система при помощи канонической 2π-периодической по ν замены переменных

$$u_j, v_j \to y_j, \quad Y_j (j = 1,2), \quad u_3 = y_3, \quad v_3 = Y_3, \tag{2.2}$$

может быть приведена [3, 8] к системе трех независимых один от другого гармонических осцилляторов с частотами $|\lambda_j|$ $(j = 1, 2, 3)$, причем $\lambda_3 = 1$, а для любых μ из области устойчивости

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} \tag{2.3}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при} \quad \mu < \mu_0 \\ -1 + \dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при} \quad \mu > \mu_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.0285954792... \tag{2.5}$$

В случае круговой задачи ($e = 0$) точки либрации устойчивы в первом приближении, если параметр μ лежит в интервале

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.0385208965... \tag{2.6}$$

При малых e из точки (2.5) этого интервала исходит область параметрического резонанса (область неустойчивости) [7, 8]. Далее будем считать, что параметр μ лежит в одном из интервалов, задаваемых неравенствами

$$0 < \mu < \mu_*, \quad \mu \neq \mu_0 \tag{2.7}$$

Тогда, если e – достаточно малая величина, то точки либрации будут устойчивы в первом (линейном) приближении, и возмущенное движение пассивно гравитирующей точки вблизи точки либрации можно описать, используя упомянутую выше замену переменных (2.2), приводящую функцию Гамильтона (1.3) к функции Гамильтона H_2 трех гармонических осцилляторов:

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\left(y_j^2 + Y_j^2\right) \tag{2.8}$$

Для строгого же анализа возмущенного движения необходим нелинейный анализ.

При $e = 0$ частоты малых колебаний в окрестности точек либрации равны ω_1, ω_2 и 1, где

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}} \tag{2.9}$$

Величины ω_1 и ω_2 являются корнями биквадратного уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \tag{2.10}$$

Для них в рассматриваемых интервалах (2.7) изменения параметра μ справедливы неравенства

$$0 < \omega_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1 < 1, \quad \omega_2 \neq 1/2 \tag{2.11}$$

Для осуществления нелинейного анализа целесообразно сначала, при помощи сходящихся при малых e рядов, построить каноническое преобразование $u_j, v_j \to y_j, Y_j$ $(j = 1, 2)$ из (2.2), одновременно получив разложения величин λ_j по степеням e:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + e\lambda_1^{(1)} + e^2\lambda_1^{(2)} + \cdots, \quad \lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + e\lambda_2^{(1)} + e^2\lambda_2^{(2)} + \cdots \tag{2.12}$$

В [8, 17] преобразование $u_j, v_j \to y_j, Y_j$ $(j = 1,2)$ найдено с точностью до второй степени e включительно и показано, что в разложении (2.12)

$$\lambda_1^{(0)} = \omega_1, \quad \lambda_2^{(0)} = -\omega_2, \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0 \tag{2.13}$$

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\omega_1\omega_2^2\left(6\omega_1^2 - 7\right)}{4\left(4\omega_1^2 - 1\right)\left(2\omega_1^2 - 1\right)}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{\omega_2\omega_1^2\left(6\omega_2^2 - 7\right)}{4\left(4\omega_2^2 - 1\right)\left(2\omega_2^2 - 1\right)} \tag{2.14}$$

Если параметры μ, e таковы, что $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = n$, где s_1, s_2, s_3, n — целые числа, причем $|s_1| + |s_2| + |s_3| = s$, то имеет место резонанс порядка s. Изучаемая пространственная задача при любых μ, e является резонансной, так как $\lambda_3 = 1$. В плоской задаче $s_3 = 0$ и резонанс порядка s реализуется при значениях параметров μ, e, для которых

$$s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 = n \quad \left(|s_1| + |s_2| = s\right) \tag{2.15}$$

В нелинейной задаче наиболее существенны резонансы низких порядков. В [12, 13] нелинейная задача изучалась в предположении об отсутствии резонансов (2.15) до шестого порядка включительно.

Вычисления показывают, что в интервалах (2.7) изменения параметра μ в случае плоской эллиптической задачи малого эксцентриситета e возможны 5 резонансов (2.15) третьего, 8 резонансов четвертого, 16 резонансов пятого и 18 резонансов шестого порядков (см. Приложение). Из (2.12)–(2.15) можно получить, что в плоскости μ, e этим 47-ми резонансам отвечают мало отличающиеся от парабол кривые

$$\mu = \mu^{(0)} + e^2\mu^{(2)} + \cdots \tag{2.16}$$

Здесь $\mu^{(0)}$ — порождающая точка, из которой на оси абсцисс $O\mu$ начинается резонансная кривая (2.15), а $\mu^{(2)}$ — задается равенством

$$\mu^{(2)} = \frac{s_1\lambda_1^{(2)} + s_2\lambda_2^{(2)}}{s_2\dfrac{d\omega_2}{d\mu} - s_1\dfrac{d\omega_1}{d\mu}}, \tag{2.17}$$

правая часть которого вычисляется при резонансном значении $\mu = \mu^{(0)}$. Число порождающих точек равно 38-ми, так как из трех из них исходят несколько резонансных кривых.

При $e = 0$ среди 47-ми резонансов (2.15) до шестого порядка включительно имеются кратные. Им отвечают три значения $\mu^{(0)}$ из рассматриваемых интервалов (2.7).

а) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{237\,849}/1014 = 0.0190358459\ldots$. Здесь $\omega_1 = 12/13$, $\omega_2 = 5/13$ и при малых e из точки $\mu^{(0)}$ исходят четыре резонансных кривых: $2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3$, $3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 + 5\lambda_2 = -1$, $5\lambda_1 - \lambda_2 = 5$.

б) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{674\,889}/1734 = 0.0262305184\ldots$. Для этого $\mu^{(0)}$ имеем $\omega_1 = 15/17$, $\omega_2 = 8/17$, а при малых e есть две резонансные кривые $\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1$ и $4\lambda_1 - \lambda_2 = 4$.

в) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{4857}/150 = 0.0353854644\ldots$. Здесь $\omega_1 = 4/5$, $\omega_2 = 3/5$, а из точки $\mu^{(0)}$ исходят шесть резонансных кривых: $3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$, $5\lambda_1 = 4$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$, $5\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$.

Если же величина e отлична от нуля, но достаточно мала, то все 47 рассматриваемых резонансных кривых не пересекаются и, следовательно, каждый из резонансов (2.15) до шестого порядка включительно в плоской эллиптической задаче является однократным.

Помимо отмеченной кратности резонансов круговой задачи, к вычислительным трудностям анализа нелинейной задачи может привести также “густота” расположения порождающих точек $\mu^{(0)}$ вблизи значений $\mu = 0$ и $\mu = \mu_*$, являющихся границами области (2.6) устойчивости при $e = 0$.

Заключение. Укажем задачи, которые следует решить в продолжение начатого в статье исследования.

1. Получение нормальной формы функции Гамильтона возмущенного движения пространственной задачи при всех 47-ми резонансах 3-го—6-го порядков с точностью до второй степени e включительно, а, может быть (если потребуется) и до более высоких степеней e.

2. Детальный анализ приближенной системы, получаемой отбрасыванием в нормализованной функции Гамильтона членов выше четвертой степени по q_j, p_j $(j = 1, 2, 3)$ (при резонансах третьего порядка) или членов выше шестой степени при резонансах 4-го—6-го порядков.

3. Изучение возможности распространения результатов анализа приближенной системы на полную систему.

4. Исследование случая значений эксцентриситета, не являющихся малыми.

Приложение

П1. О резонансах третьего порядка

Перечислим резонансы третьего порядка и выпишем соответствующие им значения $\omega_1, \omega_2, \mu^{(0)}$ и $\mu^{(2)}$.

$$1)\ \ 3\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \omega_2 = \frac{1}{3}$$
$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6177}}{162} = 0.0148525130..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{304\sqrt{6177}}{277\,965} = -0.0859552225... \tag{П1.1}$$

$$2)\ \ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1833}}{90} = 0.0242938971..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{184\sqrt{1833}}{27\,495} = -0.2865136593... \tag{П1.2}$$

$$3)\ \ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5}$$
$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2336\sqrt{4857}}{1\,578\,525} = 0.1031348463... \tag{П1.3}$$

$$4)\ \ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5}$$
$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2272\sqrt{4857}}{526\,175} = 0.3009277022... \tag{П1.4}$$

$$5)\ \ 3\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5601}}{162} = 0.0380257471\ldots, \quad \mu^{(2)} = \frac{520\sqrt{5601}}{352\,863} = 0.1102884435\ldots \tag{П1.5}$$

В основе исследования нелинейной задачи лежит анализ движений, задаваемых нормальной формой функции Гамильтона $H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, \nu; \mu, e)$. Она находится при помощи близкого к тождественному преобразования Биркгофа $y_j, Y_j \to q_j, p_j$ $(j = 1, 2, 3)$, которое 2π – периодично по ν, аналитично по e и по новым канонически сопряженным переменным q_j, p_j.

Отметим, что в исходной функции (1.2) переменная v_3 не содержится в формах Γ_m выше второй степени, а переменная u_3 входит только в четных степенях. Учтем еще, что величины λ_j $(j = 1, 2,)$ из (2.3), (2.4) внутри области устойчивости в первом приближении удовлетворяют неравенству $0 < |\lambda_j| < 1$. Принимая это во внимание, можно, следуя [8], показать, что наличие тождественного резонанса $\lambda_3 = 1$ пространственной задачи не влияет на структуру нормальной формы членов третьей степени относительно новых переменных q_j, p_j $(j = 1, 2, 3)$. Они будут такими же как и в случае плоской эллиптической задачи.

Если положить $q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$ $(j = 1, 2, 3)$, то функцию Гамильтона, нормализованную до членов четвертой степени включительно относительно q_j, p_j $(j = 1, 2, 3)$, можно записать в виде

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3 + H_3 + H_4 + O\left((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2}\right)$$

Члены четвертой степени H_4 выписываются по формуле, аналогичной формуле (3.4) из главы 10 книги [8]. Укажем структуру членов третьей степени H_3 при резонансах (2.15) третьего порядка.

$$1)\ \ 3\lambda_2 = -1, \quad H_3 = r_2^{3/2}[f_{0,3}^{(-1)}\sin(3\varphi_2 + \nu) + g_{0,3}^{(-1)}\cos(3\varphi_2 + \nu)];$$

$$2)\ \ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad H_3 = r_1^{1/2} r_2[f_{1,2}^{(0)}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + g_{1,2}^{(0)}\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)];$$

$$3)\ \ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad H_3 = r_1 r_2^{1/2}[f_{2,1}^{(1)}\sin(2\varphi_1 + \varphi_2 - \nu) + g_{2,1}^{(1)}\cos(2\varphi_1 + \varphi_2 - \nu)];$$

$$4)\ \ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2, \quad H_3 = r_1^{1/2} r_2[f_{1,-2}^{(2)}\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu) + g_{1,-2}^{(2)}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu)];$$

$$5)\ \ 3\lambda_2 = -2, \quad H_3 = r_2^{3/2}[f_{0,3}^{(-2)}\sin(3\varphi_2 + 2\nu) + g_{0,3}^{(-2)}\cos(3\varphi_2 + 2\nu)].$$

В выражениях для H_3 величины $f_{s_1,s_2}^{(n)}$, $g_{s_1,s_2}^{(n)}$ – функции от μ и e, имеющие порядок $e^{|n|}$.

П2. Резонансы четвертого порядка

$$1)\ \ 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \omega_2 = \frac{1}{4} \tag{П2.1}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{139}}{24} = 0.0087572448\ldots, \quad \mu^{(2)} = -\frac{265\sqrt{139}}{80\,064} = -0.0390225809\ldots$$

$$2)\ \ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \tag{П2.2}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{213}}{30} = 0.0135160160..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{62\sqrt{213}}{13\,845} = -0.0653564615...$$

$$3)\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{10}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10} \tag{П2.3}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5101 + 64\sqrt{6}}}{150} = 0.0165969087...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(8456 - 12\,841\sqrt{6})\sqrt{41\,593(5101 - 64\sqrt{6})}}{5\,381\,094\,375} = -0.12257646673...$$

$$4)\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \tag{П2.4}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{12} = 0.0212864461..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{25\sqrt{33}}{1056} = -0.1359981687...$$

$$5)\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{10} \tag{П2.5}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5101 - 64\sqrt{6}}}{150} = 0.0312317484...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(8456 + 12\,841\sqrt{6})\sqrt{41\,593(5101 + 64\sqrt{6})}}{5\,381\,094\,375} = 0.2193566513...$$

$$6)\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \tag{П2.6}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{2144\sqrt{4857}}{1\,578\,525} = -0.0946580096...$$

$$7)\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \tag{П2.7}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{11\,488\sqrt{4857}}{4\,735\,575} = 0.1690657982...$$

$$8)\ 4\lambda_1 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{4}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{7}}{4} \tag{П2.8}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{123}}{24} = 0.0378943122..., \quad \mu^{(2)} = \frac{203\sqrt{123}}{39\,360} = 0.0571996674...$$

П3. Резонансы пятого порядка

$$1)\ 5\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{1}{5} \tag{П3.1}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5497}}{150} = 0.0057216258..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{2704\sqrt{5497}}{8\,657\,775} = -0.0231559850...$$

$$2)\quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{17}}{17} \tag{П3.2}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{22\,641}}{306} = 0.0082703726\ldots, \quad \mu^{(2)} = -\frac{9376\sqrt{22\,641}}{41\,500\,953} = -0.0339943961\ldots$$

$$3)\quad \lambda_1 - 4\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{2}{17} + \frac{4\sqrt{13}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} - \frac{\sqrt{13}}{17} \tag{П3.3}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{682\,377 + 11\,520\sqrt{13}}}{1734} = 0.0093248318\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{40(2\,262\,155 - 2\,045\,476\sqrt{13})\sqrt{617\,161(682\,377 - 11\,520\sqrt{13})}}{2\,820\,437\,222\,656\,677} = -0.0456022641\ldots$$

$$4)\quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{2}{13} + \frac{6\sqrt{3}}{13}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13} \tag{П3.4}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{232\,217 + 7040\sqrt{3}}}{1014} = 0.0124467036\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(420 - 1093\sqrt{3})\sqrt{1\,882\,849(232\,217 - 7040\sqrt{3})}}{1\,451\,953\,357\,803} = -0.0522421439\ldots$$

$$5)\quad 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \tag{П3.5}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,849}}{1014} = 0.0190358459\ldots, \quad \mu^{(2)} = -\frac{14\,317\,600\sqrt{237\,849}}{34\,207\,205\,331} = -0.2041283360\ldots$$

$$6)\quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \tag{П3.6}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,849}}{1014} = 0.0190358459\ldots$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{18\,200\,800\sqrt{237\,849}}{102\,621\,615\,993} = -0.0864972485\ldots$$

$$7)\quad 5\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{21}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{2}{5} \tag{П3.7}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5177}}{150} = 0.0203241835\ldots, \quad \mu^{(2)} = -\frac{8456\sqrt{5177}}{3\,494\,475} = -0.1741093599\ldots$$

$$8)\quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{15}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} \tag{П3.8}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{674\,889}}{1734} = 0.0262305184\ldots$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{28\,476\,800\sqrt{674\,889}}{39\,723\,741\,577} = -0.5889212320\ldots$$

$$9)\quad 4\lambda_1 - \lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{15}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} \tag{П3.9}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{674\,889}}{1734} = 0.0262305184\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{89\,737\,600\sqrt{674\,889}}{119\,171\,224\,731} = 0.6186132565\ldots$$

$$10)\quad 4\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{12}{17} + \frac{2\sqrt{2}}{17}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{17} + \frac{8\sqrt{2}}{17} \tag{П3.10}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5\,986\,833 + 34\,560\sqrt{2}}}{5202} = 0.0277262898\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(1\,738\,235 - 24\,462\,756\sqrt{2})\sqrt{47\,679\,001(5\,986\,833 - 34\,560\sqrt{2})}}{79\,958\,550\,479\,979\,159} = -0.5531455483\ldots$$

$$11)\quad \lambda_1 - 4\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{17} + \frac{8\sqrt{2}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{12}{17} - \frac{2\sqrt{2}}{17} \tag{П3.11}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5\,986\,833 - 34\,560\sqrt{2}}}{5202} = 0.0315662209\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(1\,738\,235 + 24\,462\,756\sqrt{2})\sqrt{47\,679\,001(5\,986\,833 + 34\,560\sqrt{2})}}{79\,958\,550\,479\,979\,159} = 0.6166855225\ldots$$

$$12)\quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \omega_2 = \frac{2\sqrt{13}}{13} \tag{П3.12}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1329}}{78} = 0.0326224068\ldots, \quad \mu^{(2)} = \frac{2936\sqrt{1329}}{397\,371} = 0.2693533444\ldots$$

$$13)\quad 5\lambda_1 = 4, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \tag{П3.13}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644\ldots, \quad \mu^{(2)} = \frac{2528\sqrt{4857}}{4\,735\,575} = 0.0372038943\ldots$$

$$14)\quad 5\lambda_2 = -3, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \tag{П3.14}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644\ldots, \quad \mu^{(2)} = \frac{352\sqrt{4857}}{121\,425} = 0.2020312742\ldots$$

$$15)\quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13}, \quad \omega_2 = -\frac{2}{13} + \frac{6\sqrt{3}}{13} \tag{П3.15}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{232\,217 - 7040\sqrt{3}}}{1014} = 0.0374097834\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(420 + 1093\sqrt{3})\sqrt{1\,882\,849(232\,217 + 7040\sqrt{3})}}{1\,451\,953\,357\,803} = 0.0864580524\ldots$$

$$16)\quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = -2,\quad \omega_1 = -\frac{2}{17} + \frac{4\sqrt{13}}{17},\quad \omega_2 = \frac{8}{17} + \frac{\sqrt{13}}{17} \tag{П3.16}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{682\,377 - 11\,520\sqrt{13}}}{1734} = 0.0383359381\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{40(2\,262\,155 + 2\,045\,476\sqrt{13})\sqrt{617\,161(682\,377 + 11\,520\sqrt{13})}}{2\,820\,437\,222\,656\,677} = 0.0913561732\ldots$$

П4. Резонансы шестого порядка

$$1)\quad 6\lambda_2 = -1,\quad \omega_1 = \frac{\sqrt{35}}{6},\quad \omega_2 = \frac{1}{6} \tag{П4.1}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1614}}{81} = 0.0040170511\ldots,\quad \mu^{(2)} = -\frac{1435\sqrt{1614}}{3\,718\,656} = -0.0155030683\ldots$$

$$2)\quad \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0,\quad \omega_1 = \frac{5\sqrt{26}}{26},\quad \omega_2 = \frac{\sqrt{26}}{26} \tag{П4.2}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13\,389}}{234} = 0.0055092029\ldots,\quad \mu^{(2)} = -\frac{3550\sqrt{13\,389}}{19\,320\,327} = -0.0212612087\ldots$$

$$3)\quad \lambda_1 - 5\lambda_2 = 2,\quad \omega_1 = \frac{1}{13} + \frac{5\sqrt{22}}{26},\quad \omega_2 = \frac{5}{13} - \frac{\sqrt{22}}{26} \tag{П4.3}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,453 + 2880\sqrt{22}}}{1014} = 0.0059561391\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(25\,504 - 6583\sqrt{22})\sqrt{218\,641(237\,453 - 2880\sqrt{22})}}{93\,669\,084\,015} = -0.0253855879\ldots$$

$$4)\quad 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 1,\quad \omega_1 = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{5},\quad \omega_2 = -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{10} \tag{П4.4}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1284 + 18\sqrt{19}}}{75} = 0.0078464230\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(175\,427 - 71\,171\sqrt{19})\sqrt{73(1284 - 18\sqrt{19})}}{1\,331\,520\,000} = -0.0300327459\ldots$$

$$5)\quad 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 3,\quad \omega_1 = \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{11}}{5},\quad \omega_2 = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{11}}{10} \tag{П4.5}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11\,976 + 54\sqrt{11}}}{225} = 0.0099992897\ldots$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(2133\sqrt{11} - 122\,573)\sqrt{6373(11\,976 - 54\sqrt{11})}}{18\,354\,240\,000} = -0.0545627701\ldots$$

$$6)\quad 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2,\quad \omega_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{6},\quad \omega_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{6} \tag{П4.6}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6261}}{162} = 0.0115649319..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{400\sqrt{6261}}{732\,537} = -0.0432068174...$$

$$7)\quad 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{11}}{10}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{10} + \frac{\sqrt{11}}{5} \tag{П4.7}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11976 - 54\sqrt{11}}}{225} = 0.0172731312...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{(122\,573 + 2133\sqrt{11})\sqrt{6373(11976 + 54\sqrt{11})}}{18\,354\,240\,000} = -0.06216965547...$$

$$8)\quad \lambda_1 + 5\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \tag{П4.8}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,849}}{1014} = 0.0190358459...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{3122\,400\sqrt{237\,849}}{11\,402\,401\,777} = -0.1335496835...$$

$$9)\quad 5\lambda_1 - \lambda_2 = 5, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \tag{П4.9}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,849}}{1014} = 0.0190358459..., \quad \mu^{(2)} = \frac{10\,434\,400\sqrt{237\,849}}{34\,207\,205\,331} = 0.1487649263...$$

$$10)\quad \lambda_1 - 5\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{26} + \frac{5\sqrt{17}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{15}{26} - \frac{\sqrt{17}}{26} \tag{П4.10}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\,044\,257 + 17\,280\sqrt{17}}}{3042} = 0.0218680746...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{16(20\,451\,221 + 8\,794\,683\sqrt{17})\sqrt{16\,237\,801(2\,044\,257 - 17\,280\sqrt{17})}}{20\,932\,161\,203\,883\,735} = -0.2453657301...$$

$$11)\quad 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \tag{П4.11}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5973}}{162} = 0.0229309496..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{17\,150\sqrt{5973}}{2\,526\,579} = -0.5245990498...$$

$$12)\quad 5\lambda_1 + \lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{10}{13} + \frac{\sqrt{10}}{26}, \quad \omega_2 = -\frac{2}{13} + \frac{5\sqrt{10}}{26} \tag{П4.12}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{226\,029 + 1920\sqrt{10}}}{1014} = 0.0248834579...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{10(10\,703 - 26\,746\sqrt{10})\sqrt{198\,609(226\,029 - 1920\sqrt{10})}}{1\,412\,445\,440\,601} = -0.1093191450...$$

$$13)\quad 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{6} + \frac{17}{6} \tag{П4.13}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5793}}{162} = 0.0301743214..., \quad \mu^{(2)} = \frac{5600\sqrt{5793}}{677\,781} = 0.6288548301...$$

$$14)\ \ 6\lambda_1 = 5, \quad \omega_1 = \frac{5}{6}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{11}}{6} \qquad (\text{П}4.14)$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1434}}{81} = 0.0324914511..., \quad \mu^{(2)} = \frac{4675\sqrt{1434}}{6\,607\,872} = 0.0267913482...$$

$$15)\ \ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = -\frac{1}{13} + \frac{5\sqrt{22}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{22}}{26} \qquad (\text{П}4.15)$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237\,453 - 2880\sqrt{22}}}{1014} = 0.0333058630...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(25\,504 + 6583\sqrt{22})\sqrt{218\,641(237\,453 + 2880\sqrt{22})}}{93\,669\,084\,015} = 0.2819913682...$$

$$16)\ \ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = -\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{10} \qquad (\text{П}4.16)$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1284 - 18\sqrt{19}}}{75} = 0.0370548736...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(175\,427 + 71\,171\sqrt{19})\sqrt{73(1284 - 18\sqrt{19})}}{1\,331\,520\,000} = 0.1150277940...$$

$$17)\ \ \lambda_1 - 5\lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{2}{13} + \frac{5\sqrt{10}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{10}{13} - \frac{\sqrt{10}}{26} \qquad (\text{П}4.17)$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{226\,029 - 1920\sqrt{10}}}{1014} = 0.0374791018...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{10(10\,703 + 26\,746\sqrt{10})\sqrt{198\,609(226\,029 + 1920\sqrt{10})}}{1\,412\,445\,440\,601} = 0.1448349796...$$

$$18)\ \ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{15}{26} + \frac{\sqrt{17}}{26}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{26} + \frac{5\sqrt{17}}{26} \qquad (\text{П}4.18)$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\,044\,257 - 17\,280\sqrt{17}}}{3042} = 0.0382515946...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{16(-20\,451\,221 + 8\,794\,683\sqrt{17})\sqrt{16\,237\,801(2\,044\,257 + 17\,280\sqrt{17})}}{20\,932\,161\,203\,883\,735} = 0.0708293815...$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. V. 11. P. 144–151.

2. *Lagrange J.L.* Essai sur le Proble`me des Trois Corps // Oeuvres de Lagrange J. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. P. 229–324.
3. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 327–401.
4. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J. 1964. V. 69. Iss. 2. P. 165–172.
5. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech. & Dyn. Astron. 1971. V. 4. Iss. 3/4. P. 468–489.
6. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J. 1970. V. 8. Iss. 2. P. 221–223.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
8. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
9. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н.* Бифуркация 4π-периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Астрон. ж. 2009. Т. 86. № 2. С. 170–174.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 430. Iss. 4. P. 2755–2760.
11. *Исанбаева Н.Р.* О построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Башкирского ун-та. Математика и механика. 2017. Т. 22. № 1. С. 5–9.
12. *Маркеев А.П.* Об устойчивости лагранжевых решений в пространственной близкой к круговой ограниченной задаче трех тел // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 503–515.
13. *Markeev A.P.* On the metric stability and the nekhoroshev estimate of the velocity of Arnold diffusion in a special case of the three-body problem // R&C Dyn. 2021. V. 26. № 4. P. 321–330.
14. *Кононенко А.* Точки либрации системы Земля–Луна // Авиация и космон. 1968. № 5. С. 71–73.
15. *Аверкиев Н.Ф., Васьков С.А., Салов В.В.* Баллистическое построение систем космических аппаратов связи и пассивной радиолокации лунной поверхности // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т.51. № 12. С. 66–72.
16. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System (IAC-14-C1. 1. 13. x25737) // The 65th Int. Astron. Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
17. *Маркеев А.П.* О нормальных координатах в окрестности лагранжевых точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 4. С. 657–671.

On Resonant Values of Parameters in the Problem on the Stability of Lagrangian Solutions in the Near-Circular Restricted Three-Body Problem

A. P. Markeev[a,#]

[a] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The restricted problem of three bodies (material points) moving under the action of gravitational attraction according to Newton's law is considered. The orbits of the main attracting bodies are considered to be ellipses with a small eccentricity, and a passively gravitating body can perform arbitrary spatial motion near the triangular libration point. For the Hamiltonian function corresponding to such a motion, the structure of the normal form is pointed in the cases of third-order resonances. In the planar restricted three-body problem, the equations up to the second degree of eccentricity for resonance curves for all resonances up to the sixth order inclusive are obtained.

Keywords: restricted three-body problem, triangular libration points, resonance

REFERENCES

1. *Euler L.* De Motu Rectilineo Trium Corporum se Mutuo Attrahentum. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, vol. 11, pp. 144–151.
2. *Lagrange J.L.* Essai sur le Proble`me des Trois Corps // Oeuvres de Lagrange J., vol. 6, Paris: Gauthier Villars, 1873. pp. 229–324.
3. *Lyapunov A.M.* On the stability of motion in one particular case of the three-body problem // in: Coll. Works. Vol. 1, Moscow; Leningrad: USSR Acad. of Sci. Pub. House, 1956, pp. 327–401.
4. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J., 1964, vol. 69, no. 2, pp. 165–172.
5. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1971, vol. 4, no. 3/4, pp. 468–489.
6. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J., 1970, vol. 8, no. 2, pp. 221–223.
7. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods. Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)
8. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. Moscow: Nauka, 1978, 312 p. (in Russian)
9. *Yumagulov M.G., Belikova O.N.* Bifurcation of 4π-periodic solutions of the planar, restricted, elliptical three-body problem // Astron. Rep., 2009, vol. 86, no. 2, pp. 148–152.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2013, vol. 430, no. 4, pp. 2755–2760.
11. *Isanbaeva N.R.* On the construction of the boundaries of stability regions of triangular libration points of a planar bounded elliptic three-body problem // Vestn. Bashk. univ. Matematika i mekhanika, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 5–9. (in Russian)
12. *Markeev A.P.* On the stability of Lagrange solutions in the spatial near-circular restricted three-body problem // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1541–1549.
13. *Markeev A.P.* On the metric stability and the Nekhoroshev estimate of the velocity of Arnold diffusion in a special case of the three-body problem // R&C Dyn., 2021, vol. 26, no. 4, pp. 321–330.
14. *Kononenko A.* Libration points of the Earth–Moon system // Aviatsiya i Kosmon., 1968, no. 5, pp. 71–73. (in Russian)
15. *Averkiev N.F., Vaskov S.A., Salov V.V.* Ballistic construction of communication spacecraft systems and passive radar of the lunar surface // Izv. vuzov. Priborostr., 2008, vol. 51, no. 12, pp. 66–72. (in Russian)
16. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth–Moon System (IAC-14-C1. 1. 13. x25737) // The 65th Int. Astron. Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
17. *Markeev A.P.* On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem // Vestn. Udmurt. Univ. Matem. Mekh. Komp'yut. Nauki, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 657–671. (in Russian)