ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 4, с. 571–588

УДК 531.381

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА В ТРЕХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

В. Ю. Ольшанский[1],*

[1]*ИПТМУ РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.01.2023 г.
После доработки 26.04.2023 г.
Принята к публикации 20.05.2023 г.

В статье приведено решение задачи о возможных условиях регулярной прецессии при движении гиростата вокруг неподвижной точки под действием двух однородных и одного неоднородного поля. Для известного случая с равными скоростями прецессии и собственного вращения указаны новые решения с осью прецессии, отклоненной от оси симметрии неоднородного поля. Найдены новые случаи регулярной прецессии, когда отношение скоростей прецессии и собственного вращения равно двум либо одной второй. Рассмотрено применение результатов для прецессии в ортогональных полях и для прецессии твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело и гиростат, суперпозиция однородных и неоднородных полей, регулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823523040100, **EDN:** MEVCBL

1. Введение. Задача о вращении гиростата под действием сил различной природы имеет свою историю и остается объектом исследований в настоящее время. После нахождения [1] новых решений для твердого тела в однородных гравитационном и магнитном полях, в ряде работ рассмотрено вращение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, движение тела в идеальной жидкости [2–5]. Наиболее исследованным является случай, когда силовые поля имеют общую ось симметрии [6]. Обзор решений для важного частного случая таких движений – регулярных и нерегулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, при движении в жидкости, при движении в магнитном поле, приведен в [7]. Изучается движение гиростата с переменным гиростатическим моментом, построено решение, описывающее регулярные прецессии относительно оси симметрии силовых полей [8].

Случай, когда направления полей задаются двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве, изучен в меньшей степени. Первые примеры регулярной прецессии вокруг невертикальной оси несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции двух и трех однородных полей были построены Яхья [9, 10]. В указанных прецессиях ось собственного вращения ортогональна оси прецессии и скорость прецессии равна скорости собственного вращения; эти решения можно считать аналогами известной прецессии Гриоли [11] твердого тела в однородном поле тяжести. В наших работах задачи о регулярной прецессии твердого тела и гиростата в двух [12] и трех неприводимых [13] однородных полях решены в общей постановке, описаны все возможные случаи. Получено обобщение условий Яхья, когда скорости прецессии и собственного вращения равны друг другу. Найден новый случай, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и ось прецессии не ортогональна оси собственного вращения.

В работе [14] рассмотрена более общая задача – регулярная прецессия гиростата в трех (гравитационном, электрическом и магнитном) полях, одно из которых – неоднородное и изучен частный случай, когда скорости собственного вращения и прецессии равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля. Получены, с использованием методов компьютерной алгебры, условия регулярной прецессии, связывающие параметры системы.

В настоящей работе для названной [14] суперпозиции трех полей проведено полное исследование возможных случаев регулярной прецессии гиростата. Показано, что если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то возможны два случая – когда скорость прецессии равна или вдвое больше скорости собственного вращения, а если ось прецессии отклонена от оси симметрии поля, то регулярная прецессия может происходить при скорости прецессии равной или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для всех случаев найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Выделен случай твердого тела; показано, в частности, что скорость прецессии может быть вдвое меньше скорости собственного вращения, только если угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\sin\theta = 4/5$.

2. Постановка задачи. Для описания движения гиростата вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [14]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\alpha}_1\times\mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\times\mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\times(\mathbf{u}_3 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}_3) \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha}_i = 0; \quad i = 1,2,3 \tag{2.2}$$

Здесь $(\,)^{\bullet}$ – производная по времени в системе отсчета, связанной с телом; векторы $\mathbf{u}_i$ постоянны в этой системе, $\mathbf{u}_i = p_i\mathbf{OC}_i$, C_i – центры приведения сил. Единичные векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$, задающие направления сил каждого из полей, постоянны в инерциальной системе. Симметричные операторы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ имеют различный физический смысл в различных моделях [2, 3, 6, 7], $\mathbf{I}$ – оператор инерции тела в неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя, $\boldsymbol{\sigma}$ – гиростатический момент.

При $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ получаем известные [2, 3] уравнения, описывающие вращение гиростата под действием гироскопических и потенциальных сил; систематический обзор известных случаев регулярной и нерегулярной прецессии приведен в монографиях [6, 7]. При $\mathbf{J} = \mathbf{K} = \mathbf{0}$ получаем описание вращения в двух (при $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$) или трех однородных полях [9, 10, 12, 13]; если еще $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, то имеем классические уравнения Эйлера – Пуассона для гиростата в однородном поле тяжести.

Регулярная прецессия тела задается равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r\mathbf{m} + \omega_p\boldsymbol{\rho} \tag{2.3}$$

Здесь векторы $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\rho}$ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах; $|\mathbf{m}| = |\boldsymbol{\rho}| = 1$. Величины ω_r и ω_p – это скорости собственного вращения (относительная скорость) и прецессии (переносная скорость).

Ниже решается следующая задача: при заданных в инерциальной системе отсчета направлениях полей $\boldsymbol{\alpha}_i$ и оси прецессии $\boldsymbol{\rho}$ определить гиростатический момент, операторы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ и векторы $\mathbf{u}_i$, при которых тело может совершать регулярную прецессию.

Векторные функции $\boldsymbol{\rho}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$, как и ранее [13], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$ равенствами (здесь θ – постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии):

$$\boldsymbol{\rho} = \sin\theta(\sin\tau\boldsymbol{l}_1 + \cos\tau\boldsymbol{l}_2) + \cos\theta\boldsymbol{l}_3; \quad \tau = \omega_r t + \text{const}, \quad \boldsymbol{l}_3 = \mathbf{m} \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega\left(\kappa\sin\theta\left(\sin\tau\boldsymbol{l}_1 + \cos\tau\boldsymbol{l}_2\right) + (1 + \kappa\cos\theta)\boldsymbol{l}_3\right); \quad \kappa = \omega_p/\omega_r, \quad \Omega = \omega_r \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{R}\mathbf{s}_i; \quad i = 1,2,3, \quad \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{R}\boldsymbol{l}_3 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{s}_i = \sin\theta_i\left(\cos\varphi_i\boldsymbol{l}_1 + \sin\varphi_i\boldsymbol{l}_2\right) + \cos\theta_i\boldsymbol{l}_3; \quad i = 1,2,3 \tag{2.7}$$

Из формул (2.6), (2.7) следует [13], что θ_i – угол между осью прецессии $\boldsymbol{\rho}$ и направлением $\boldsymbol{\alpha}_i$ поля номер i.

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе $(\boldsymbol{l}_i)$ следующие [13]:

$$r_{11} = -\cos\tau\cos\kappa\tau + \cos\theta\sin\tau\sin\kappa\tau, \quad r_{12} = \cos\tau\sin\kappa\tau + \cos\theta\sin\tau\cos\kappa\tau$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= -\sin\theta\sin\tau, \quad r_{21} = \sin\tau\cos\kappa\tau + \cos\theta\cos\tau\sin\kappa\tau \\ r_{22} &= -\sin\tau\sin\kappa\tau + \cos\theta\cos\tau\cos\kappa\tau, \quad r_{23} = -\sin\theta\cos\tau \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$r_{31} = -\sin\theta\sin\kappa\tau, \quad r_{32} = -\sin\theta\cos\kappa\tau, \quad r_{33} = -\cos\theta$$

Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\rangle}(1\ 2\ 3) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{G}\mathbf{n}_i; \quad i = 1,2,3 \tag{2.10}$$

Здесь $\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(1\ 2\ 3)$ – знак циклической перестановки.

Всюду в работе рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ некомпланарными, тогда, в силу равенств (2.6), $\langle\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\rangle \neq 0$.

Учитывая равенства (2.6) и (2.10), запишем

$$\sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{u}_i = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{G}\mathbf{n}_i = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{G}\left(\sum_j n_i^{(j)}\boldsymbol{l}_j\right) = -\sum_j\left(\sum_i n_i^{(j)}\mathbf{R}\mathbf{s}_i\right) \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j$$

Здесь, в силу равенств (2.9), $\sum_i n_i^{(j)}\mathbf{s}_i = l_j$ и получаем формулу

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{R}\boldsymbol{l}_1 + \mathbf{G}\boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{R}\boldsymbol{l}_2 + \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{R}\boldsymbol{l}_3 \tag{2.11}$$

Ниже при анализе тригонометрических тождеств, находим ограничения, налагаемые на операторы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, гиростатический момент $\boldsymbol{\sigma}$, постоянный угол нутации θ между осями собственного вращения и прецессии и находим матрицу $\mathbf{G}$. Эти ограничения, как и матрица $\mathbf{G}$, не зависят от значений параметров θ_i, φ_i и, следовательно, не зависят от взаимного расположения силовых линий $\boldsymbol{\alpha}_i$. Затем из формулы (2.10) находим векторы $\mathbf{u}_i$, определяющие центры приведения сил.

3. Предварительный анализ. Оператор $\mathbf{R}(t)$ содержит [13] гармоники с аргументами $(\kappa \mp 1)\tau, \kappa\tau, \tau$, запишем его в виде

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{A}_{1i}\cos q_i\tau + \mathbf{A}_{2i}\sin q_i\tau \tag{3.1}$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \kappa, \quad q_{3,4} = \kappa \mp 1 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{A}_{10} = -\cos\theta\mathbf{A}'_0, \quad \mathbf{A}_{ij} = -\sin\theta\mathbf{A}'_{ij}; \quad j = 1,2, \quad \mathbf{A}_{ij} = \frac{\cos\theta + (-1)^j}{2}\mathbf{A}'_{ij}; \quad j = 3,4$$

$$\mathbf{A}'_{i1}\mathbf{x} = x^{(3)}\boldsymbol{l}_{3-i}, \quad \mathbf{A}'_{i2}\mathbf{x} = x^{(3-i)}\boldsymbol{l}_3; \quad i = 1,2, \quad \mathbf{A}'_{13}\mathbf{x} = x^{(1)}\boldsymbol{l}_1 + x^{(2)}\boldsymbol{l}_2 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{A}'_{23}\mathbf{x} = -x^{(2)}\boldsymbol{l}_1 + x^{(1)}\boldsymbol{l}_2, \quad \mathbf{A}'_{14}\mathbf{x} = -x^{(1)}\boldsymbol{l}_1 + x^{(2)}\boldsymbol{l}_2, \quad \mathbf{A}'_{24}\mathbf{x} = x^{(2)}\boldsymbol{l}_1 + x^{(1)}\boldsymbol{l}_2$$

При регулярной прецессии угловая скорость тела задается формулой (2.5), векторная функция $\boldsymbol{\alpha}_3$ – формулой (2.6), где оператор $\mathbf{R}$ задан формулой (3.1). Это позволяет записать левую часть $\mathbf{L}$ уравнения (2.1) в виде

$$\mathbf{L} = \sum_{i=0}^{7} \mathbf{a}_{1i} \cos p_i\tau + \mathbf{a}_{2i} \sin p_i\tau \tag{3.4}$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = \kappa, \quad p_{4,5} = \kappa \mp 1, \quad p_{6,7} = \kappa \mp 2 \tag{3.5}$$

Для векторных параметров $\mathbf{a}_{ij}$ при использовании обозначений

$$\begin{gathered} \mathbf{s}_3 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{h} = \sum h_i \boldsymbol{l}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} + (\Omega\mathbf{I} + \cos\theta\mathbf{N})\boldsymbol{l}_3, \quad \mathbf{N} \overset{\text{def}}{=} \kappa\Omega\mathbf{I} + h_3\mathbf{K} \\ \mathbf{v}_1 = h_1\boldsymbol{l}_1 + h_2\boldsymbol{l}_2, \quad \mathbf{v}_2 = -h_2\boldsymbol{l}_1 + h_1\boldsymbol{l}_2, \quad \mathbf{v}_3 = h_1\boldsymbol{l}_1 - h_2\boldsymbol{l}_2, \quad \mathbf{v}_4 = h_2\boldsymbol{l}_1 + h_1\boldsymbol{l}_2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

получим формулы

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_{10} = \Omega\boldsymbol{l}_1 \times \left((1 + \kappa\cos\theta)\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\kappa\sin^2\theta}{2}\mathbf{N}\boldsymbol{l}_3 \right) \\ \mathbf{a}_{i1} = \Omega\sin\theta\left(\kappa\boldsymbol{l}_{3-i} \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + (1 + \kappa\cos\theta)\,\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_{3-i} + (-1)^{i+1}\,\kappa\Omega\mathbf{I}\boldsymbol{l}_i \right) \\ \mathbf{a}_{i2} = \kappa\Omega\frac{\sin^2\theta}{2}\left((-1)^i\,\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_i + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_{3-i} \right) \\ \mathbf{a}_{i3} = \Omega\sin\theta\left(\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\cos\theta \right) h_{3-i}\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_3 + \frac{\kappa}{2}h_i\,(-1)^i\,(\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_2 - \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_1 \right) \\ \mathbf{a}_{i4} = \Omega\frac{1 - \cos\theta}{2}((1 + \kappa\cos\theta)\,\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_i + \kappa(1 + \cos\theta)\,\mathbf{v}_i \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_3) \\ \mathbf{a}_{i5} = \Omega\frac{1 + \cos\theta}{2}(-1)^i\,(\kappa(1 - \cos\theta)\,\mathbf{v}_{i+2} \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_3 - (1 + \kappa\cos\theta)\,\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_{i+2}) \\ \mathbf{a}_{i6} = \kappa\Omega\sin\theta\frac{1 - \cos\theta}{4}\left((-1)^{i+1}\,\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_{3-i} + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_i \right) \\ \mathbf{a}_{i7} = \kappa\Omega\sin\theta\frac{1 + \cos\theta}{4}\left(\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_{5-i} + (-1)^{i+1}\,\boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_{i+2} \right); \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Правую часть $\mathbf{M}$ уравнения (2.1), учитывая равенства (2.6) и (2.11), запишем в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i \times \mathbf{R}\boldsymbol{l}_i + \mathbf{R}\mathbf{h} \times \mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{h}; \quad \mathbf{h} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{s}_3 \tag{3.8}$$

Получим некоторые ограничения для оператора $\mathbf{J}$ и вектора $\mathbf{h}$.

Будем далее считать $\kappa > 0$. В уравнении (2.1) гармоники с частотами $2\kappa + 2$ имеются только в слагаемом $\mathbf{Rh} \times \mathbf{JRh}$. Приравнивая коэффициенты при этих гармониках нулю, получим, учитывая равенство (3.1), условия

$$\mathbf{A}_{14}\mathbf{h} \times \mathbf{J}\mathbf{A}_{14}\mathbf{h} - \mathbf{A}_{24}\mathbf{h} \times \mathbf{J}\mathbf{A}_{24}\mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_{14}\mathbf{h} \times \mathbf{J}\mathbf{A}_{24}\mathbf{h} + \mathbf{A}_{24}\mathbf{h} \times \mathbf{J}\mathbf{A}_{14}\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Учитывая формулы (3.3), эти условия преобразуем к виду

$$\left(h_1^2 - h_2^2 \right)\mathbf{C}_1 - 2h_1h_2\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}, \quad 2h_1h_2\mathbf{C}_1 + \left(h_1^2 - h_2^2 \right)\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$$

Здесь $\mathbf{C}_1 = \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_1 - \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_2$, $\mathbf{C}_2 = \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_1$. Полученные условия при $\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$ могут быть выполнены только в двух случаях:

$$J_{ij} = 0; \quad i \neq j, \quad J_{11} = J_{22} \tag{3.9}$$

$$h_1 = h_2 = 0 \tag{3.10}$$

В обоих случаях в суммарном моменте сил $\mathbf{M}$ равны нулю и коэффициенты при $\cos(2\kappa - 2)\tau$ и $\sin(2\kappa - 2)\tau$.

При условиях (3.10) $\mathbf{s}_3 = \boldsymbol{l}_3$ и, учитывая формулы (2.6), получим $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, ось прецессии совпадает с направлением $\boldsymbol{\alpha}_3$. Если $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, то должны выполняться условия (3.9), оператор $\mathbf{J}$ имеет в этом случае осевую симметрию (два собственных значения совпадают $J_1 = J_2$) и ось прецессии совпадает с осью симметрии оператора $\mathbf{J}$.

Формулу (3.8) для функции $\mathbf{M}$ в обоих случаях можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{G}\mathbf{l}_i \times \mathbf{R}\mathbf{l}_i + \sum_{k=0}^{4} \mathbf{b}_{1k} \cos g_k\tau + \mathbf{b}_{2k} \sin g_k\tau \tag{3.11}$$

При условиях (3.9) получим

$$g_0 = 1, \quad g_{1,2} = \kappa \mp 1, \quad g_{3,4} = 2\kappa \mp 1 \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{b}_{1k} = (J_{33} - J_{11})\,\mathbf{b}'_{1k}, \quad \mathbf{b}_{2k} = (-1)^{k+1}\, \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{b}_{1k}, \quad \mathbf{b}'_{10} = \frac{\sin 2\theta}{4}\left(2h_3^2 - h_1^2 - h_2^2\right)\boldsymbol{l}_1 \\
\mathbf{b}'_{11} = h_3 \frac{(\cos\theta - 1)(1 + 2\cos\theta)}{2}\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{b}'_{12} = h_3 \frac{(\cos\theta + 1)(1 - 2\cos\theta)}{2}\mathbf{v}_4 \\
\mathbf{b}'_{13} = \frac{\sin\theta(\cos\theta - 1)}{4}(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{b}'_{14} = \frac{\sin\theta(\cos\theta + 1)}{4}(h_1\mathbf{v}_3 - h_2\mathbf{v}_4)
\end{gathered} \tag{3.13}$$

При условиях (3.10) имеем равенства

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = 2 \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{b}_0 = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_3, \quad \mathbf{b}_{i1} = \sin\theta\cos\theta(\boldsymbol{l}_{3-i} \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_{3-i}) \\
\mathbf{b}_{i2} = \frac{\sin^2\theta}{2}\left((-1)^i\, \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_i + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_{3-i}\right), \quad \mathbf{b}_{i3} = \mathbf{b}_{i4} = 0; \quad i = 1, 2
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Определим теперь, какие отношения скоростей прецессии и собственного вращения возможны при прецессии гиростата в рассмотренной в работе суперпозиции трех полей. Набор частот, которые могут присутствовать в левой части уравнения (2.1), задан формулой (3.5). Далее рассмотрим по отдельности случаи $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$ и $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$. Для правой части уравнения (2.1) используем формулу (3.11).

При $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, то есть при выполнении условий (3.9), набор частот в правой части уравнения (2.1), получим, объединив наборы частот (3.2) и (3.12). Следовательно, момент $\mathbf{M}$ может содержать только гармоники с частотами 0, 1, κ, $\kappa \mp 1$, $2\kappa \mp 1$. Будем далее считать $\kappa > 0$. Если $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq 1/2$, то гармоники с частотой $2\kappa + 1$ присутствуют только в моменте $\mathbf{M}$ и, учитывая формулу (3.11), получим условия $\mathbf{b}_{14} = \mathbf{b}_{24} = \mathbf{0}$. Из формул (3.13) следует, что эти условия могут быть выполнены, в частности, если $J_{33} = J_{11}$. В этом случае оператор $\mathbf{J}$ пропорционален тождественному оператору (учитываем условия (3.9)) и нелинейные члены в моменте сил в правой части уравнения (2.1) отсутствуют. Если же $\mathbf{J} \neq c\mathbf{E}$, то из формул (3.6) и (3.13) следует, что условия $\mathbf{b}_{14} = \mathbf{b}_{24} = \mathbf{0}$ могут быть выполнены, только если $h_1 = h_2 = 0$, что невозможно в рассматриваемом случае $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$. Таким образом, в случае, когда ось прецессии не коллинеарна направлению $\boldsymbol{\alpha}_3$, анализ возможности регулярной прецессии под действием комбинации однородных и неоднородного поля следует проводить только для скорости собственного вращения равной или вдвое большей скорости прецессии.

Рассмотрим теперь случай $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, при этом $\mathbf{s}_3 = \mathbf{h} = \boldsymbol{l}_3$ и выполнены условия (3.10). В соответствии с формулами (3.1), (3.2), (3.11) и (3.14) правая часть уравнения (2.1) может содержать гармоники с частотами 0, 1, 2, κ, $\kappa \mp 1$. При $h_1 = h_2 = 0$ из формул (3.6), (3.7) получим $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{0}$, $i = 1,2$, $j = 3–7$. Из формулы (3.4) тогда следует, что в левой части уравнения (2.1) присутствуют только гармоники с частотами 0, 1, 2.

Если $\kappa > 0$ и $\kappa \neq 1, \kappa \neq 2$, то и правая часть уравнения не должна содержать гармоники с частотами $q_2 = \kappa$, $q_4 = \kappa + 1$. В соответствии с формулами (3.1), (3.11) и (3.14) это возможно только при выполнении условий

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i \times \mathbf{A}_{mn}\boldsymbol{l}_i = 0; \quad m = 1,2, \quad n = 2,4$$

Учитывая формулы (3.1) и (3.3), получаем условия

$$\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i + (-1)^i \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_{3-i} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i = \mathbf{0}; \quad i = 1,2 \tag{3.16}$$

Отсюда следует $G_{31} = G_{32} = G_{12} = G_{21} = G_{11} = G_{22} = 0$. Для любого вектора $\mathbf{w}$ получим $\mathbf{G}\mathbf{w} = w^{(3)}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_0 = (G_{13}, G_{23}, G_{33})^T$. Из формулы (2.10) получим $\mathbf{u}_i = n_i^{(3)}\mathbf{w}_0$. Так как $\mathbf{s}_3 = \boldsymbol{l}_3$ при $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, то из формул (2.9) следует $n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = 0$, тогда $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ и получаем приводимый случай.

Таким образом, при оси прецессии, коллинеарной направлению $\boldsymbol{\alpha}_3$, регулярная прецессия гиростата в трех полях возможна только для скорости прецессии равной или вдвое большей скорости собственного вращения.

Ниже рассмотрены все указанные выше возможные случаи регулярной прецессии:

а) $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = \omega_p$ или $\omega_r = 2\omega_p$;

б) $\boldsymbol{\rho} \parallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_p = \omega_r$ или $\omega_p = 2\omega_r$.

Замечание. При κ = 1 оператор поворота $\mathbf{R}$ – симметрический [13]. При добавлении к матрице $\mathbf{G}$ пропорционального единичной матрице слагаемого суммарный момент внешних сил, заданный формулой (3.8), не изменится, так как при любом симметрическом операторе $\mathbf{R}$ имеем $\sum \boldsymbol{l}_i \times \mathbf{R}\boldsymbol{l}_i = \mathbf{0}$. Из формулы (2.10) тогда следует, что искомые векторы $\mathbf{u}_i$ могут быть записаны в виде (λ – произвольная постоянная):

$$\mathbf{u}_i = \lambda\mathbf{n}_i + \mathbf{G}'\mathbf{n}_i; \quad i = 1,2,3 \tag{3.17}$$

Получаем, что в случае $\omega_r = \omega_p$, при заданных в инерциальном пространстве направлениях $\boldsymbol{\alpha}_i$ силовых линий и оси прецессии $\boldsymbol{\rho}$, заданных операторах $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, существуют различные расположения центров приведения сил и различные величины сил, для которых прецессионное движение будет совпадающим. Это свойство ранее [13] отмечено для трех однородных полей. В случаях κ = 2 и κ = 1/2 оператор $\mathbf{R}(t)$ не является симметрическим и аналогичное свойство отсутствует.

4. Случай $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = \omega_p$. Имеем условия (3.9) и κ = 1. Формулы (3.2), (3.5), (3.12) дают наборы частот: $p_0 = p_4 = 0$, $p_1 = p_3 = -p_6 = 1$, $p_2 = p_5 = 2$, $p_7 = 3$, $q_0 = q_3 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$, $q_4 = 2$, $g_1 = 0$, $g_0 = g_3 = 1$, $g_2 = 2$, $g_4 = 3$.

Учитывая формулы (3.1), (3.4) и (3.11), получаем условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$:

$$\mathbf{a}_{i7} = \mathbf{b}_{i4}, \quad \mathbf{a}_{i2} + \mathbf{a}_{i5} = \mathbf{b}_{i2} + \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i4}\boldsymbol{l}_j; \quad i = 1,2$$

$$\mathbf{a}_{i1} + \mathbf{a}_{i3} - (-1)^i \mathbf{a}_{i6} = \mathbf{b}_{i0} + \mathbf{b}_{i3} + \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i2})\boldsymbol{l}_j \tag{4.1}$$

$$\mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{14} = \mathbf{b}_{11} + \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{13})\boldsymbol{l}_j$$

Первое условие (4.1) при учете формул (3.6), (3.7), (3.13) примет вид

$$\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_4 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_3 = \mu\left(h_1\mathbf{v}_3 - h_2\mathbf{v}_4\right), \quad \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_4 - \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_3 = \mu\left(h_1\mathbf{v}_4 + h_2\mathbf{v}_3\right)$$

Здесь

$$\mu = \left(J_3 - J_1\right)/\Omega \tag{4.2}$$

В проекциях на $\boldsymbol{l}_i$ получаем условия

$$h_1\left(K_{12} + K_{21}\right) + h_2\left(K_{11} - K_{22}\right) = 0, \quad h_2\left(K_{12} + K_{21}\right) - h_1\left(K_{11} - K_{22}\right) = 0$$

$$h_1K_{31} - h_2K_{32} = \mu\left(h_1^2 - h_2^2\right), \quad h_2K_{31} + h_1K_{32} = 2\mu h_1h_2$$

При $h_1^2 + h_2^2 > 0$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ отсюда следует

$$K_{11} = K_{22}, \quad K_{12} = 0, \quad K_{3j} = \mu h_j; \quad j = 1,2 \tag{4.3}$$

Второе условие (4.1), учитывая формулы (3.3), (3.6), (3.7), (3.13) и условия (4.3), преобразуем к виду

$$\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}'\boldsymbol{l}_1 - \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}'\boldsymbol{l}_2 = 2(\cos\theta - 1)\Omega\mu h_1h_2\boldsymbol{l}_3 + \nu\mathbf{v}_4, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{G} + \Omega^2(1 - \cos\theta)\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}'\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}'\boldsymbol{l}_2 = (\cos\theta - 1)\Omega\mu\left(h_2^2 - h_1^2\right)\boldsymbol{l}_3 - \nu\mathbf{v}_3$$

$$\nu = \mu\Omega h_3\cos\theta + \Omega\left((1 - \cos\theta)K_{33} + (1 + \cos\theta)K_{11}\right) \tag{4.4}$$

В проекциях на $\boldsymbol{l}_i$ получаем условия

$$G_{3j} = -\nu h_j - (1 - \cos\theta)\Omega^2 I_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{4.5}$$

$$G_{11} - G_{22} = -(1 - \cos\theta)\Omega\left(\Omega\left(I_{11} - I_{22}\right) + \mu\left(h_1^2 - h_2^2\right)\right) \tag{4.6}$$

$$G_{12} + G_{21} = -2\Omega(1 - \cos\theta)\left(\Omega I_{12} + \mu h_1h_2\right) \tag{4.7}$$

Третье равенство (4.1) при учете условий (4.3) записывается в виде

$$G_{12} = G_{21} = \Omega(2 + \cos\theta)\left(\Omega I_{12} + \mu h_1h_2\right) \tag{4.8}$$

$$G_{j3} = \Omega\left(\tilde{\sigma}_j - \Omega I_{3j} + K_{11}h_j\right); \quad j = 1,2 \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered} G_{33} - G_{mm} = \Omega\Big(\tilde{\sigma}_3 - h_3(1 + \cos\theta)K_{11} + \Omega\left(I_{nn} - (1 + \cos\theta)I_{mm}\right) + \\ + \mu\left(-\cos\theta h_3^2 - (1 + \cos\theta)h_m^2 + h_n^2\right)\Big); \\ m = 1,2, \quad n = 1,2, \quad m \neq n \end{gathered} \tag{4.10}$$

Сравнивая равенства (4.7) и (4.8), получим условия

$$G_{12} = G_{21} = 0 \tag{4.11}$$

$$I_{12} = -\frac{\mu}{\Omega}h_1h_2 \tag{4.12}$$

Четвертое равенство (4.1) при учете условий (4.3) преобразуем к виду

$$\begin{gathered} \cos\theta\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3 + \frac{1 - \cos\theta}{2}\left(\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_2\right) = \Omega\Bigg((1 + \cos\theta)\boldsymbol{l}_3 \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \\ - \Omega\frac{\sin^2\theta}{2}\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{I}\boldsymbol{l}_3 + \frac{1}{2}\left(\sin^2\theta\left(K_{11} - K_{33}\right) + \mu h_3\cos\theta(1 - \cos\theta)\right)\mathbf{v}_2\Bigg) \end{gathered}$$

При умножении данного равенства на $\boldsymbol{l}_3$ получим, при условиях (4.11), тождество. При умножении равенства на $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ получим условия

$$\cos\theta G_{j3} = \frac{1-\cos\theta}{2}G_{3j} + \Omega\left((1+\cos\theta)\tilde{\sigma}_j - \Omega\frac{\sin^2\theta}{2}I_{3j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sin^2\theta\left(K_{11}-K_{33}\right) + \mu h_3\cos\theta\left(1-\cos\theta\right)\right)h_j\right); \quad j = 1,2 \tag{4.13}$$

Подставив в равенство (4.13) выражения для ν, G_{3j}, G_{j3} из формул (4.4), (4.5) и (4.9), найдем компоненты гиростатического момента

$$\sigma_j = -3\Omega\cos\theta I_{3j} + \left(\cos\theta K_{11} + (1-\cos\theta)K_{33} - \mu h_3\cos\theta\right)h_j; \quad j = 1,2 \tag{4.14}$$

Из формул (4.9) и (4.14) получим

$$G_{j3} = \Omega\left(-2\Omega\cos\theta I_{3j} + \left((1+\cos\theta)K_{11} + (1-\cos\theta))K_{33}\right)h_j\right); \quad j = 1,2 \tag{4.15}$$

Из равенств (4.6) и (4.10) получим условия

$$I_{11} - I_{22} = -\frac{\mu}{\Omega}\left(h_1^2 - h_2^2\right) \tag{4.16}$$

$$G_{11} = G_{22} \tag{4.17}$$

Условия (4.10) и (4.17) позволяют представить диагональные элементы матрицы $\mathbf{G}$ в виде

$$G_{11} = G_{22} = \lambda, \quad G_{33} = \lambda + \Omega\left(\sigma_3 + \Omega\left((1+\cos\theta)I_{33} - \cos\theta\frac{I_{11}+I_{22}}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \mu\cos\theta\frac{1+h_3^2}{2} + h_3\left(\cos\theta K_{33} - (1+\cos\theta)K_{11}\right)\right) \tag{4.18}$$

В рассмотренном выше случае ($\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = \omega_p$) условия регулярной прецессии задаются формулами (3.9), (4.3), (4.14) и (4.16). Матрица $\mathbf{G}$ определена формулами (4.5), (4.11), (4.15) и (4.18).

Из формулы (4.18) следует равенство $\mathbf{G} = \lambda\mathbf{E} + \mathbf{G}'$ и, как отмечено в Замечании к разд. 3, векторы $\mathbf{u}_i$ могут быть записаны в виде (3.17). Матрица $\mathbf{G}'$ — вырожденная и векторы $\mathbf{G}'\mathbf{n}_i$ компланарны.

В частном случае, когда $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, условия прецессии совпадают с полученными ранее [13] условиями регулярной прецессии в трех однородных полях в случае $\kappa = 1$.

5. Случай $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = 2\omega_p$. В данном случае $\kappa = 1/2$ и должны быть выполнены условия (3.9). Равенства (3.2), (3.5) и (3.12) дают наборы частот

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -q_3 = \frac{1}{2}, \quad q_4 = \frac{3}{2}$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 = -\frac{1}{2}, \quad g_2 = \frac{3}{2}, \quad g_3 = 0, \quad g_4 = 2$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = -p_4 = \frac{1}{2}, \quad p_5 = -p_6 = \frac{3}{2}, \quad p_7 = \frac{5}{2}$$

Условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$ получаем из формул (3.1), (3.4) и (3.11):

$$\mathbf{a}_{j7} = 0, \quad \mathbf{a}_{i2} = \mathbf{b}_{i4}, \quad \mathbf{a}_{i5} - (-1)^i\mathbf{a}_{i6} - \mathbf{b}_{i2} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i4}\boldsymbol{l}_j$$

$$\mathbf{a}_{i3} - (-1)^i (\mathbf{a}_{i4} - \mathbf{b}_{i1}) = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{i2} - (-1)^i \mathbf{A}_{i3})\boldsymbol{l}_j \tag{5.1}$$

$$\mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i0} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i1}\boldsymbol{l}_j, \quad \mathbf{a}_{10} - \mathbf{b}_{13} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{10}\boldsymbol{l}_j; \quad i = 1,2$$

Учитывая формулы (3.6), (3.7) и (3.13), из первого условия (5.1) получим

$$\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_4 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_3 = 0, \quad \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_4 - \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{K}\mathbf{v}_3 = 0$$

При $h_1^2 + h_2^2 > 0$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ эти условия могут быть выполнены, только если

$$K_{11} = K_{22}, \quad K_{ij} = 0; \quad i \neq j \tag{5.2}$$

Второе условие (5.1) записывается в виде ($j = 1,2$)

$$(-1)^j \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_{3-j} - \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_j = \mu \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\left(2h_1h_2\boldsymbol{l}_j - (-1)^j \left(h_1^2 - h_2^2\right)\boldsymbol{l}_{3-j}\right)$$

Из этих равенств, при учете формул (5.2) и (3.6), получим условия

$$I_{11} = I_{22}, \quad I_{12} = 0, \quad I_{13} = -\frac{4\mu}{\Omega}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}h_1h_2, \quad I_{23} = \frac{2\mu}{\Omega}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) \tag{5.3}$$

Запишем теперь третье условие (5.1). Так как при условиях (5.2) имеем $\mathbf{a}_{16} = \mathbf{a}_{26} = 0$, то получаем

$$\begin{gathered} \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_2 - \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_1 = \nu'\Omega\mathbf{v}_4, \quad \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_2 = \nu'\Omega\mathbf{v}_3 \\ \nu' = \mu h_3 (1 - 2\cos\theta) - \frac{1-\cos\theta}{2}K_{33} - \left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right)K_{11} \end{gathered} \tag{5.4}$$

В проекциях на оси $\boldsymbol{l}_i$ имеем равенства

$$G_{12} + G_{21} = 0, \quad G_{11} = G_{22}, \quad G_{3j} = \nu'\Omega h_j; \quad j = 1,2 \tag{5.5}$$

Четвертое условие (5.1) с учетом формул (5.2) запишем в виде ($j = 1,2$)

$$\begin{gathered} 2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j + \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_{3-j} + (-1)^j \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j = \Omega\left(\nu''\mathbf{v}_j - (-1)^j \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}h_{3-j}K_{11}\boldsymbol{l}_3\right) \\ \nu'' = \mu h_3 (1 + 2\cos\theta) - \frac{1+\cos\theta}{2}K_{33} + \left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right)K_{11} \end{gathered} \tag{5.6}$$

Полученные векторные равенства в проекциях на оси $\boldsymbol{l}_i$ дают условия

$$G_{12} = -G_{21} = \frac{\Omega}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}K_{11}h_1, \quad G_{11} = G_{22} = \frac{\Omega}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}K_{11}h_2 \tag{5.7}$$

$$(1 - \cos\theta)G_{3j} = \Omega\left((1 + \cos\theta)K_{11} - (1 - \cos\theta)\nu''\right)h_j; \quad j = 1,2 \tag{5.8}$$

Первые два условия (5.5) при этом выполнены. Условия (5.8) совместны с третьим и четвертым условиями (5.5), только если

$$(1 - \cos\theta)K_{33} + (1 + \cos\theta)K_{11} = 2\mu(1 - \cos\theta)h_3 \tag{5.9}$$

При выполнении условия (5.9) получим

$$\nu' = -\mu h_3 \cos\theta - \frac{1}{2}K_{11} \tag{5.10}$$

Пятое условие (5.1) записывается в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{l}_j \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3 = \frac{\Omega}{2}\boldsymbol{l}_j \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\mu\Omega\cos\theta}{2}\left(3h_3^2 - 1\right)\boldsymbol{l}_3 \times \boldsymbol{l}_j + \Omega h_3\left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right)\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{K}\boldsymbol{l}_j + \\ + \frac{\Omega^2}{2}\left(\mathbf{I}(\boldsymbol{l}_j \times \boldsymbol{l}_3) + \left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right)\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{I}\boldsymbol{l}_j\right); \quad j = 1,2 \end{gathered} \tag{5.11}$$

При умножении равенств (5.11) на $\boldsymbol{l}_j$ получим, учитывая условия (5.2) и (5.3), тождества. При умножении равенств на $\boldsymbol{l}_3$ получим условия

$$G_{j3} = \frac{\Omega}{2}\left(\tilde{\sigma}_j - \Omega I_{3j}\right);\, j = 1,2$$

Полагая в равенстве (5.11) $j = 1$ и умножая его на $\boldsymbol{l}_2$, получим условие (такое же условие получим при $j = 2$ и умножении на $\boldsymbol{l}_1$)

$$G_{33} = \frac{\Omega}{2}\left(\tilde{\sigma}_3 + \mu\cos\theta\left(1 - 3h_3^2\right) - \frac{\Omega}{2}\cos\theta I_{11} - h_3\left(2 + \cos\theta\right)K_{11}\right)$$

Найденные условия перепишем, используя выражение (3.6) $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ через гиростатический момент $\boldsymbol{\sigma}$ и условие (5.9)

$$G_{j3} = \frac{\Omega}{2}\left(\sigma_j + \Omega\cos\theta I_{3j}\right); \quad j = 1,2 \tag{5.12}$$

$$G_{33} = \frac{\Omega}{2}\left(\sigma_3 + \frac{\Omega}{2}\left(\left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right)I_{33} - \cos\theta I_{11}\right) + h_1\left(K_{33} - K_{11}\right) + \mu\left(\cos\theta\left(1 - h_3^2\right) - 2h_3^2\right)\right) \tag{5.13}$$

Учитывая условия (5.2), запишем шестое условие (5.1)

$$\cos\theta\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3 = \Omega\left(\boldsymbol{l}_3 \times \left(\frac{2 + \cos\theta}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Omega\frac{\sin^2\theta}{8}\mathbf{I}\boldsymbol{l}_3\right) + \mu\frac{\sin\theta\left(1 - \cos\theta\right)}{4}\left(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2\right)\right)$$

В проекциях это равенство дает условия

$$\cos\theta G_{13} = \frac{\Omega}{2}\left(\left(2 + \cos\theta\right)\sigma_1 + \Omega\frac{2\left(2 + \cos\theta\right)^2 - \sin^2\theta}{4}I_{13} + \mu\sin\theta\left(1 - \cos\theta\right)h_1h_2\right)$$

$$\cos\theta G_{23} = \frac{\Omega}{2}\left(\left(2 + \cos\theta\right)\sigma_2 + \Omega\frac{2\left(2 + \cos\theta\right)^2 - \sin^2\theta}{4}I_{23} - \mu\frac{\sin\theta\left(1 - \cos\theta\right)}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right)\right)$$

Подставляя сюда G_{j3} из формулы (5.12) и учитывая равенства (5.3), получим следующие выражения для компонент гиростатического момента

$$\sigma_j = -\frac{3 + 5\cos\theta}{4}\Omega I_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{5.14}$$

Формулы (5.12) можно теперь записать в виде

$$G_{j3} = -\frac{3}{8}\left(1 + \cos\theta\right)\Omega^2 I_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{5.15}$$

Таким образом, для случая $\kappa = 1/2$, $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$ получены условия, заданные формулами (3.9), (5.2), (5.3), (5.9) и (5.14). Элементы матрицы $\mathbf{G}$ определены формулами (5.5), (5.7), (5.10), (5.13) и (5.15).

Если рассмотреть прецессию в трех однородных полях, то условия (3.9), (5.2) и (5.9) при $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$ выполнены. Условия (5.3), (5.14) и формулы (5.7), (5.10) и (5.15) принимают вид

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad I_{11} = I_{22}, \quad I_{ij} = 0; \quad G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{ij} = 0; \quad i \neq j$$

В этом случае $\mathbf{u}_i = G_{33}n_i^{(3)}\boldsymbol{l}_3$, $i = 1,2,3$. Векторы $\mathbf{u}_i$ коллинеарны оси собственного вращения $\boldsymbol{l}_3$. Следовательно, в неприводимом случае регулярная прецессия при $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\kappa = 1/2$ невозможна.

Для твердого тела и гиростата с коллинеарным оси собственного вращения гиростатическим моментом из условий (5.14) при $\sigma_{1,2} = 0$ получим

$$(3 + 5\cos\theta) I_{3j} = 0; \quad j = 1,2$$

Если $I_{13} = I_{23} = 0$, то из условий (5.3) следует $h_1 = h_2 = 0$ и $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$.

Следовательно, при $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$ регулярная прецессия твердого тела (и гиростата, у которого $\boldsymbol{\sigma} \parallel \boldsymbol{l}_3$) со скоростью собственного вращения вдвое большей скорости прецессии возможна, только если угол нутации задан равенствами

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}, \quad \sin\theta = \frac{4}{5} \tag{5.16}$$

При $\kappa = -1/2$, то есть при $\omega_p = -2\omega_r$ получим $\cos\theta = 3/5$.

6. Случай $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_p = \omega_r$. В данном случае $\kappa = 1$ и равенства (3.2), (3.5) и (3.14) дают наборы частот: $q_0 = q_3 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$, $q_4 = 2$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $p_0 = p_4 = 0$, $p_1 = p_3 = -p_6 = 1$, $p_2 = p_5 = 2$, $p_7 = 3$.

При $h_{1,2} = 0$ из формул (3.6), (3.7) получим $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{0}$; $i = 1,2$, $j = 3$–7.

Запишем условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_{i2} - \mathbf{b}_{i2} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i4}\boldsymbol{l}_j, \quad \mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i1} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i2})\boldsymbol{l}_j \\ \mathbf{a}_{10} - \mathbf{b}_{10} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{13})\boldsymbol{l}_j; \quad i = 1,2\end{gathered} \tag{6.1}$$

Первое условие (6.1) при учете формул (3.3), (3.6), (3.7) и (3.15) представим в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{H}\boldsymbol{l}_1 - \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{H}\boldsymbol{l}_2 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{H}\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{H}\boldsymbol{l}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{H} = \mathbf{G} + (1 - \cos\theta)\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \Omega^2\mathbf{I} + \Omega\mathbf{K} - \mathbf{J}\end{gathered} \tag{6.2}$$

Полученные векторные условия эквивалентны системе

$$G_{11} - G_{22} = (\cos\theta - 1)(P_{11} - P_{22}), \quad G_{12} + G_{21} = -2(1 - \cos\theta)P_{12} \tag{6.3}$$

$$G_{3j} = (\cos\theta - 1)P_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{6.4}$$

Обозначим $\mathbf{G}'' = \mathbf{G} + \cos\theta\mathbf{J}$ и запишем второе условие (6.1):

$$\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{G}''\boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}''\boldsymbol{l}_j = \Omega\boldsymbol{l}_j \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Omega(1 + \cos\theta)\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_j + \Omega^2\mathbf{I}(\boldsymbol{l}_j \times \boldsymbol{l}_3); \quad j = 1,2$$

В проекциях на оси получаем

$$G_{j3} = \Omega\tilde{\sigma}_j - \Omega^2 I_{3j} - \cos\theta J_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{6.5}$$

$$G_{12} = G_{21} = \Omega(1 + \cos\theta)N_{12} + \Omega^2 I_{12} - \cos\theta J_{12} \tag{6.6}$$

$$G_{33} - G_{jj} = \Omega\tilde{\sigma}_3 - \Omega(1 + \cos\theta)N_{jj} + \Omega^2 I_{3-j,3-j} + \cos\theta(J_{jj} - J_{33}); \quad j = 1,2 \tag{6.7}$$

Из равенств (6.3), (6.6) и (6.7) получим

$$3\Omega^2 I_{12} + 2\Omega K_{12} - J_{12} = 0 \tag{6.8}$$

$$G_{12} = G_{21} = (\cos\theta - 1)P_{12} \tag{6.9}$$

$$3\Omega^2(I_{11} - I_{22}) + 2\Omega(K_{11} - K_{22}) - (J_{11} - J_{22}) = 0 \tag{6.10}$$

В условии (6.5) перейдем к компонентам гиростатического момента

$$G_{j3} = \Omega\sigma_j + \cos\theta\left(\Omega^2 I_{3j} + \Omega K_{3j} - J_{3j}\right); \quad j = 1,2 \tag{6.11}$$

Третье условие (6.1) записывается в виде

$$\Omega \boldsymbol{l}_3 \times \left((1 + \kappa \cos\theta)\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\sin^2\theta}{2} \mathbf{N} \boldsymbol{l}_3 \right) - \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{J} \boldsymbol{l}_3 = \\ = \cos\theta \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G} \boldsymbol{l}_3 + \frac{1 - \cos\theta}{2} (\boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G} \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G} \boldsymbol{l}_2)$$

При умножении на $\boldsymbol{l}_3$ получим, при учете условия (6.9), тождество. Умножая на $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, получим равенства ($j = 1, 2$)

$$\cos\theta G_{j3} - \frac{1 - \cos\theta}{2} G_{3j} = \Omega(1 + \cos\theta)\tilde{\sigma}_j - \frac{\sin^2\theta}{2} \Omega (K_{3j} + \Omega I_{3j}) + \frac{1 - 3\cos^2\theta}{2} J_{3j}$$

Подставим сюда G_{j3} из формулы (6.11) и G_{3j} из формулы (6.4) и получим выражения для компонент гиростатического момента

$$\Omega\sigma_j = -\cos\theta\left(3\Omega^2 I_{3j} + 2\Omega K_{3j} - J_{3j}\right) + \Omega K_{3j} - J_{3j}; \quad j = 1, 2 \tag{6.12}$$

Формулы (6.7) преобразуем к виду

$$G_{jj} = \lambda' + (\cos\theta - 1)\left(\Omega^2 I_{jj} + \Omega K_{jj} - J_{jj}\right); \quad j = 1, 2, \quad G_{33} = \lambda' + \Omega\sigma_3 + \\ + \cos\theta\left(\Omega^2 I_{33} + \Omega K_{33} - J_{33}\right) + \Omega^2\left(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2}\right) - \Omega(K_{11} + K_{22}) + \frac{J_{11} + J_{22}}{2} \tag{6.13}$$

Условия (6.10) можно записать в виде (ν — произвольная постоянная)

$$J_{jj} = \nu + 3\Omega^2 I_{jj} + 2\Omega K_{jj}; \quad j = 1, 2 \tag{6.14}$$

Таким образом, имеем условия (6.8), (6.12) и (6.14). Из формул (6.4), (6.9), (6.11) и (6.13) получим выражения для элементов матрицы $\mathbf{G}$

$$G_{12} = G_{21} = (\cos\theta - 1) P_{12}, \quad G_{3j} = (\cos\theta - 1) P_{3j}, \quad G_{j3} = \Omega\sigma_j + \cos\theta P_{3j} \\ G_{jj} = \lambda' + (\cos\theta - 1) P_{jj}; \quad j = 1, 2, \quad G_{33} = \lambda' + \nu + \Omega\sigma_3 + \cos\theta P_{33} + \Omega^2 \operatorname{tr} \mathbf{I} \tag{6.15}$$

Как и в разд. 4, имеем $\mathbf{G} = \lambda'\mathbf{E} + \mathbf{G}'$, где λ' — произвольная постоянная. Центры приведения, как и всюду в работе, после построения матрицы $\mathbf{G}$ находятся по формуле (2.10).

7. Случай $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_p = 2\omega_r$. В данном случае $\kappa = 2$ и равенства (3.2), (3.5) и (3.14) дают наборы частот: $q_0 = 0$, $q_1 = q_3 = 1$, $q_2 = 2$, $q_4 = 3$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $p_0 = p_6 = 0$, $p_1 = p_4 = 1$, $p_2 = p_3 = 2$, $p_5 = 3$, $p_7 = 4$.

Получаем систему условий

$$\sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i4}\boldsymbol{l}_j = 0, \quad \mathbf{a}_{i2} - \mathbf{b}_{i2} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{i2}\boldsymbol{l}_j \\ \mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i1} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i3})\boldsymbol{l}_j, \quad \mathbf{a}_{10} - \mathbf{b}_{10} = \sum_j \mathbf{G}\boldsymbol{l}_j \times \mathbf{A}_{10}\boldsymbol{l}_j; \quad i = 1, 2 \tag{7.1}$$

Первое условие (7.1) приводит к первому условию (3.16), следовательно

$$G_{11} = G_{22}, \quad G_{12} + G_{21} = 0, \quad G_{31} = G_{32} = 0 \tag{7.2}$$

Второе условие (7.1) можно записать в виде

$$\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i = \sin\theta\left(\boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{Q}\boldsymbol{l}_i - (-1)^i \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{Q}\boldsymbol{l}_{3-i}\right); \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{Q} = 2\Omega^2\mathbf{I} + \Omega\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{J}$$

Эквивалентная скалярная система условий имеет вид

$$G_{11} = G_{22} = -\sin\theta Q_{23}, \quad G_{12} = -G_{21} = \sin\theta Q_{13} \tag{7.3}$$

$$Q_{11} = Q_{22}, \quad Q_{12} = 0 \tag{7.4}$$

Третье условие (7.1) приводится к виду

$$\boldsymbol{l}_i \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_3 + \frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}\left((-1)^i \boldsymbol{l}_1 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_{3-i} + \boldsymbol{l}_2 \times \mathbf{G}\boldsymbol{l}_i\right) = 2\Omega\boldsymbol{l}_i \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + 2(-1)^i \Omega^2 \mathbf{I}\boldsymbol{l}_{3-i} + \\ + \Omega(1+2\cos\theta)\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{N}\boldsymbol{l}_i - \cos\theta(\boldsymbol{l}_i \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{J}\boldsymbol{l}_i); \quad i = 1,2 \tag{7.5}$$

В соответствии с формулой (3.6) в рассматриваемом случае, то есть при $\kappa = 2$, $h_3 = 1$, имеем $\mathbf{N} = 2\Omega\mathbf{I} + \mathbf{K}$. Умножая, при $i = 1$, равенство (7.5) на $\boldsymbol{l}_1$, получим, при учете условий (7.2) и (7.4), условие

$$K_{12} = -4\Omega I_{12} \tag{7.6}$$

Из условий (7.4) и (7.6) следует

$$J_{12} = -4\Omega^2 I_{12} \tag{7.7}$$

Умножая, при $i = 1$ равенство (7.5) на $\mathbf{l}_2$, и при $i = 2$ на $\boldsymbol{l}_1$, получим две формулы для G_{33} $(i = 1,2)$

$$G_{33} = 2\Omega\tilde{\sigma}_3 + 2\Omega^2 I_{3-i,3-i} - \Omega(1+2\cos\theta)(2\Omega I_{ii} + K_{ii}) + \cos\theta(J_{ii} - J_{33}) \tag{7.8}$$

Складывая равенства (7.8) с $i = 1$ и $i = 2$, получим

$$G_{33} = 2\Omega\sigma_3 + 2\Omega^2 I_{33} - \Omega\frac{K_{11} + K_{22}}{2} + \cos\theta(2Q_{33} - Q_{11} - Q_{22}) \tag{7.9}$$

Вычитая равенства (7.8), получим равенство

$$2\cos\theta(Q_{11} - Q_{22}) + 4\Omega^2(I_{11} - I_{22}) + \Omega(K_{11} - K_{22}) = 0$$

Учитывая условие (7.4), отсюда найдем условия

$$K_{11} - K_{22} = -4\Omega(I_{11} - I_{22}), \quad J_{11} - J_{22} = -4\Omega^2(I_{11} - I_{22}) \tag{7.10}$$

Умножая равенства (7.5) на $\boldsymbol{l}_3$, получим формулы

$$G_{j3} = 2\Omega\tilde{\sigma}_j - (1-\cos\theta)Q_{3j} - 2\Omega^2 I_{3j} - \cos\theta J_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{7.11}$$

Четвертое условие (7.1) записывается в виде

$$\boldsymbol{l}_3 \times \left(\Omega(1+2\cos\theta)\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Omega\sin^2\theta(2\Omega\mathbf{I}\boldsymbol{l}_3 + \mathbf{K}\boldsymbol{l}_3) + \frac{1-3\cos^2\theta}{2}\mathbf{J}\boldsymbol{l}_3 - \cos\theta\mathbf{G}\boldsymbol{l}_3\right) = \mathbf{0}$$

В проекциях получаем условия

$$\Omega(1+2\cos\theta)\tilde{\sigma}_j - \Omega\sin^2\theta(2\Omega I_{3j} + K_{3j}) + \frac{1-3\cos^2\theta}{2}J_{3j} = \cos\theta G_{j3}; \quad j = 1,2$$

Отсюда, учитывая формулы (3.6) и (7.11) находим

$$\Omega\sigma_j = \Omega^2(1-6\cos\theta)I_{3j} + \Omega(1-2\cos\theta)K_{3j} + \frac{\cos\theta - 1}{2}J_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{7.12}$$

Формулы (7.11) можно, при учете формул (7.12), записать в виде

$$G_{j3} = -6\Omega^2\cos\theta I_{3j} + \Omega(1-\cos\theta)K_{3j} - \frac{\cos\theta + 1}{2}J_{3j}; \quad j = 1,2 \tag{7.13}$$

Таким образом, имеем условия (7.6), (7.7), (7.10) и (7.12). Элементы матрицы $\mathbf{G}$ заданы формулами (7.2), (7.3), (7.9) и (7.13). Центры приведения определяются формулами (2.10).

Если выделить случай трех однородных полей, то получим условия и векторы $\mathbf{u}_i$, найденные ранее [13] для случая $\kappa = 2$.

8. Случай ортогональных полей. При анализе условий регулярной прецессии гиростата в трех однородных полях (т.е. при $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{J} = c\mathbf{E}$) для произвольных заданных в инерциальном пространстве направлениях силовых линий $\boldsymbol{\alpha}_i$ и любом заданном направлении $\boldsymbol{\rho}$ оси прецессии можно перейти к ортогональному базису $(\boldsymbol{\beta}_i)$ такому, что $\boldsymbol{\rho}$ совпадает с одним из $\boldsymbol{\beta}_i$. При этом система (2.1), (2.2) сохранит свой вид с новыми центрами приведения сил. Обычно предполагается, что соответствующие преобразования выполнены и векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ взаимно перпендикулярны и, например, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$. Эти предположения не ограничивают общность задачи, но затрудняют интерпретацию результатов, поскольку как взаимное расположение силовых линий полей, так и направление оси прецессии могут быть любыми. В нашей работе [13] задача решается для произвольных заданных углов между силовыми линиями полей.

В случае, когда $\mathbf{K} \neq 0$ или $\mathbf{J} \neq c\mathbf{E}$ приведение к ортогональным полям с сохранением вида системы (2.1), (2.2) возможно, только если положить $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3$ (иначе, в частности, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}_3 \neq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}\boldsymbol{\beta}_3$). Выбрать ортогональную систему $(\boldsymbol{\beta}_i)$ так, чтобы ось прецессии $\boldsymbol{\rho}$ совпадала с одной из осей $\boldsymbol{\beta}_i$ здесь в общем случае невозможно.

В работе [14] полагают "без ограничения общности" векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ ортогональными и ось прецессии – совпадающей с направлением $\boldsymbol{\alpha}_3$. Как отмечено выше, этот случай не эквивалентен общему. Случаи, когда $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$ рассмотрены в разд. 4 и 5 и показано, что прецессия возможна с отношениями скоростей $\kappa = 1$ и $\kappa = 1/2$. В случае $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$ (разд. 6 и 7) возможны только значения $\kappa = 1$ и $\kappa = 2$ $(\kappa = \omega_p/\omega_r)$.

Несмотря на то, что в общем случае переход к ортогональному базису невозможен, случай ортогональных полей представляет самостоятельный интерес. Кроме того, рассмотрение этого случая необходимо для сравнения с известным частным результатом [14].

Выделим в полученных выше условиях разд. 4–7 случай ортогональных полей. Пусть единичные векторы $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда, в соответствии с формулами (2.6), единичные векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ образуют левую ортогональную тройку. Из формул (2.9) получим

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i; \quad i = 1,2,3 \tag{8.1}$$

Рассмотрим теперь, для сравнения с результатами работы [14], частный случай $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$. Из формул (2.6) в этом случае получим $\mathbf{s}_3 = \boldsymbol{l}_3$. Всюду выше векторы $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ правого ортогонального базиса пока не определены. Так как $(\mathbf{s}_i)$ – левая тройка, то можно положить $\boldsymbol{l}_1 = \mathbf{s}_1$, $\boldsymbol{l}_2 = -\mathbf{s}_2$, $\boldsymbol{l}_3 = \mathbf{s}_3$. Из формулы (8.1) тогда получим $\mathbf{n}_1 = \boldsymbol{l}_1$, $\mathbf{n}_2 = -\boldsymbol{l}_2$, $\mathbf{n}_3 = \boldsymbol{l}_3$.

Центры приведения сил заданы равенствами (2.10), следовательно

$$u_1^{(j)} = G_{j1}, \quad u_2^{(j)} = -G_{j2}, \quad u_3^{(j)} = G_{j3}; \quad j = 1,2,3 \tag{8.2}$$

Данные формулы для координат центров приведения можно использовать вместе с формулами для G_{ij}, приведенными в разд. 6 (для случая $\omega_p = \omega_r$ этот случай рассмотрен в работе [14]) и в разд. 7 (для случая $\omega_p = 2\omega_r$).

Полученные в разд. 6 условия (6.10), (6.12) и (6.14) совпадают с приведенными в работе [14]. Из формул (6.7) и (8.2) получим

$$u_1^{(1)} - u_3^{(3)} = G_{11} - G_{33}, \quad u_2^{(2)} + u_3^{(3)} = G_{33} - G_{22} \tag{8.3}$$

Проверка показывает, что второе условие (8.3) и условия (8.2), не содержащие величин $u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(3)}$, совпадают с соответствующими условиями [14]. Квадратное уравнение, используемое в работе [14] для определения Ω, эквивалентно первому условию (8.3).

Таким образом, в работе [14] для движения гиростата в поле трех сил, описываемом системой (2.1), (2.2), найдены условия регулярной прецессии при следующих ограничениях: 1) скорость прецессии равна скорости собственного вращения; 2) ось прецессии коллинеарна вектору $\boldsymbol{\alpha}_3$, задающему направление неоднородного поля; 3) направления трех полей $\boldsymbol{\alpha}_i$ взаимно перпендикулярны.

9. Прецессия твердого тела. Условия в главных осях в случае равных скоростей прецессии и собственного вращения и $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$. Условия для данного случая приведены в разд. 4 в базисе $(\boldsymbol{l}_j)$. Запишем эти условия в базисе собственных векторов $\mathbf{e}_i$ оператора $\mathbf{K}$. Из условий (4.3) следует, что собственным вектором оператора $\mathbf{K}$ с собственным значением K_{11} является вектор $\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{h}$. Пронумеруем собственные векторы так, что $\mathbf{e}_1 \parallel \boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{h}$. Вектор $\boldsymbol{l}_3$ совпадает с осью собственного вращения $\mathbf{m}$, а ортогональные ему векторы $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ можно выбрать каким-то удобным способом. Положим

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{l}_3 = \cos\xi\mathbf{e}_3 + \sin\xi\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{l}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{l}_2 = -\sin\xi\mathbf{e}_3 + \cos\xi\mathbf{e}_2 \tag{9.1}$$

При таком выборе базиса $(\boldsymbol{l}_j)$ $K_{12} = K_{13} = 0$ и из условия (4.3) следует $h_1 = 0$. В формуле (2.10) следует положить $\varphi_3 = \pi/2$. Имеем также следующие связи

$$K_{33} = K_2 + K_3 - K_1, \quad K_{23} = (K_2 - K_3)\sin\xi\cos\xi \tag{9.2}$$

$$\cos^2\xi = \frac{K_1 - K_3}{K_2 - K_3}, \quad \sin^2\xi = \frac{K_2 - K_1}{K_2 - K_3} \tag{9.3}$$

Здесь и далее K_i, I_i, J_i — собственные значения операторов $\mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$. Необходимо условие $(K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \geq 0$. При этом значение K_1 находится между двумя другими собственными значениями K_i.

Третье условие (4.3) дает $K_{23} = \mu h_2$. Так как $\mathbf{h} = \mathbf{s}_3$, то из формулы (2.7) при $\varphi_3 = \pi/2$ получим $h_2 = \sin\theta_3$. Напомним (см. разд. 2), что θ_3 — угол между осью прецессии и вектором $\boldsymbol{\alpha}_3$, задающим направление неоднородного поля.

Второе условие (9.2) можно теперь записать в виде

$$(K_2 - K_3)\sin\xi\cos\xi = \mu\sin\theta_3, \tag{9.4}$$

или, учитывая равенства (4.2) и (9.3), в виде

$$(K_1 - K_3)(K_2 - K_1)\Omega^2 = (J_3 - J_1)^2\sin^2\theta_3 \tag{9.5}$$

Условия (4.12) и (4.16) принимают вид

$$I_{12} = 0, \quad I_{11} - I_{22} = \frac{\mu}{\Omega}\sin^2\theta_3 \tag{9.6}$$

Из формул (4.2), (9.5) и (9.6) получим условие

$$(J_3 - J_1)(I_{11} - I_{22}) = (K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \tag{9.7}$$

Выделим случай, когда система является твердым телом, либо гиростатом с гиростатическим моментом, коллинеарным оси собственного вращения, то есть будем считать выполненными условия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \tag{9.8}$$

При $\cos\theta = 0$ из условий (9.8) и (4.14) следует $K_{33} = 0$, тогда из формул (9.2) получим $K_1 = K_2 + K_3$ и условие $(K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \geq 0$ может быть выполнено, только если $K_2K_3 \le 0$. Случай, когда собственные значения оператора $\mathbf{K}$ имеют разные знаки, не будем рассматривать, тогда $\cos\theta \ne 0$.

Условия (4.14) при учете равенств (4.2) и (9.2) запишем в виде

$$I_{3j} = ch_j, \quad j = 1,2, \quad c = \frac{1}{3\Omega}\left(\frac{J_1 - J_3}{\Omega}\cos\theta_3 + K_2 + K_3 + \frac{K_1 - K_2 - K_3}{\cos\theta}\right) \tag{9.9}$$

При выполнении условий (4.12), (4.16) и (9.9) вектор $\boldsymbol{l}_3 \times \mathbf{h}$ является собственным вектором не только оператора $\mathbf{K}$, но и оператора $\mathbf{I}$. Два других собственных вектора оператора $\mathbf{I}$ получим поворотом векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ вокруг $\mathbf{e}_1$ на угол, определяемый условиями (4.16) и (9.9).

Рассмотрим частный случай, когда собственные векторы операторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$ совпадают. Используя формулы (9.1), получим

$$\begin{gathered} I_{12} = I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_1, \quad I_{23} = (I_2 - I_3)\sin\xi\cos\xi \\ I_{33} = \sin^2\xi I_2 + \cos^2\xi I_3, \quad I_{22} = \cos^2\xi I_2 + \sin^2\xi I_3 \end{gathered} \tag{9.10}$$

Условия (4.16) и (9.9) перепишем в виде

$$(I_2 - I_3)\sin 2\xi = 2c\sin\theta_3, \quad (I_2 - I_3)\cos 2\xi = 2I_1 - I_2 - I_3 - 2\frac{\mu}{\Omega}\sin^2\theta_3 \tag{9.11}$$

Из равенств (4.2) и (9.5) следует

$$\frac{\mu}{\Omega}\sin^2\theta_3 = \frac{(K_1 - K_3)(K_2 - K_1)}{J_3 - J_1} \tag{9.12}$$

Если во втором равенстве (9.11) использовать формулу (9.12) и $\cos 2\xi$ определить при помощи формул (9.3), то получим следующую связь

$$\sum_{j=1}^{3} I_j\Delta K_j = \frac{\Delta K_1\Delta K_2\Delta K_3}{J_3 - J_1}, \quad \Delta K_1 \overset{\text{def}}{=} K_2 - K_3 (1,2,3) \tag{9.13}$$

Так как собственные векторы операторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$ совпадают, то можно записать ($\mathbf{E}$ – тождественный оператор)

$$\mathbf{I} = \chi_0\mathbf{E} + \chi_1\mathbf{K} + \chi_2\mathbf{K}^2 \tag{9.14}$$

Если обозначить $S_n = \sum K_j^n \Delta K_j$, то $S_0 = S_1 = 0$, $S_2 = -\Delta K_1\Delta K_2\Delta K_3$. Из условия (9.13) тогда найдем

$$\chi_2 = 1/(J_1 - J_3) \tag{9.15}$$

Найдем теперь параметр χ_1. Из первого условия (9.11) получаем

$$\left(\chi_1(K_2 - K_3) + \chi_2\left(K_2^2 - K_3^2\right)\right)\sin\xi\cos\xi = c\sin\theta_3$$

При $\sin 2\xi = 0$ базисы $(\boldsymbol{l}_j)$ и $(\mathbf{e}_j)$ совпадают. Тогда $c = 0$; из формул (9.3) и (9.14) следует $K_1 = K_2$, $I_1 = I_2$. При $\sin 2\xi \ne 0$ из формул (9.15) и (9.4) получим

$$\chi_1 = (K_2 + K_3 + \Omega c)/(J_3 - J_1).$$

Заключение. Задача о вращении гиростата в различных силовых полях остается в настоящее время актуальной. Регулярные прецессии гиростата достаточно хорошо изучены в случае, когда силовые поля имеют общую ось симметрии [7]. Недавно были построены [9, 10] первые примеры регулярной прецессии вокруг невертикальной оси несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции двух и трех однородных полей. Показана [14] возможность прецессии в суперпозиции трех (гравитационного, электрического и магнитного) полей, одно из которых – неоднородное в частном случае, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля. Для анализа громоздких условий использовались [14] методы компьютерной алгебры.

В наших работах [12, 13] описаны все возможные случаи регулярной прецессии твердого тела и гиростата под действием двух и трех неприводимых однородных полей. Получено обобщение условий [9, 10] для равных скоростей прецессии и собственного вращения и найдены новые случаи, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

В настоящей работе аналитические методы, разработанные [13] для описания прецессии в трех однородных полях, применены для полного исследования возможных случаев регулярной прецессии гиростата в названной выше [14] суперпозиции неоднородных полей. Показано, что если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то возможны два случая – когда скорость прецессии равна или вдвое больше скорости собственного вращения. Если ось прецессии отклонена от оси симметрии поля, то прецессия может происходить при скорости прецессии равной или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для всех случаев найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Выделен случай твердого тела; показано, в частности, что скорость прецессии может быть вдвое меньшей скорости собственного вращения, только если угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\sin\theta = 4/5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // Math. Phys. Commun. 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // J. Theor. & Appl. Mech. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Theor. & Appl. Mech. 1986. V. 5. № 5. P. 755–762.
4. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // J. Phys. A. 2008. V. 41. Iss. 27.
5. *Yehia H.M., El-Kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7 (4). P. 2120–2128.
6. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ. 2009.
8. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Прецессии гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 801–813.
9. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
10. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl. 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
12. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // Mech. Res. Commun, 2023. V. 127. Art. No. 104041.
13. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
14. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.

Regular Precession of a Gyrostat in Three Force Fields

V. Yu. Ol'shanskii[a,#]

[a] *IPTMU RAS, Saratov, Russia*

[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

The article gives a solution to the problem of possible conditions of regular precession in the motion of a gyrostat around a fixed point under the action of two uniform and one inhomogeneous field. For the known case with equal precession and proper rotation velocities, new solutions are indicated with the precession axis deviated from the symmetry axis of the inhomogeneous field. New cases of regular precession are found, when the ratio of precession and proper rotation velocities is equal to two or one second. Application of the results to precession in orthogonal fields and to precession of a solid are considered.

Keywords: solid and gyrostat, superposition of uniform and inhomogeneous fields, regular precession

REFERENCES

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // Math. Phys. Commun., 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // J. Theor.&Appl. Mech., 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Theor.&Appl. Mech., 1986, vol. 5, no. 5, pp. 755–762.
4. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // J. Phys. A, 2008, vol. 41, iss. 27.
5. *Yehia H.M.*, *El-Kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // J. Appl. Comput. Mech., 2021, vol. 7 (4), pp. 2120–2128.
6. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Precessions of a gyrostat under the action of a potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic momentum // Prikl. Matem. i Mekh., 2022, vol. 86, iss. 6, pp. 801–813.
9. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci., 2015, vol. 2, iss. 3, pp. 200–205.
10. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc., 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216–219.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl., 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
12. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // Mech. Res. Commun., 2023, vol.127, art. no. 104041.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three uniform fields // Mech. Solids, 2022, vol. 57, iss. 8, pp. 1873–1884.
14. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.