УДК 531.36

КВАТЕРНИОННЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (ОБЗОР)

© 2023 г. Ю. Н. Челноков[1,*]

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Работа носит обзорный аналитический характер. Излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели, в отличие от классических моделей кинематики в углах Эйлера–Крылова и в их дуальных аналогах, не имеют особенностей типа деления на ноль и не содержат тригонометрических функций, что повышает эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, инерциальной навигации и управления движением. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики), с помощью использования параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и их модификаций, кватернионов Гамильтона: проблема устранения особенностей типа сингулярностей (деления на ноль), которые порождаются действующими на небесное или космическое тело ньютоновскими гравитационными силами и которые осложняют аналитическое и численное исследование движения тела вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам. Излагается история проблемы регуляризации и регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля, нашедшие широкое применение в небесной механике и астродинамике. Излагаются кватернионные методы регуляризации, имеющие ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля, и различные регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (как для абсолютного, так и для относительного движения), которые целесообразно использовать для прогноза и коррекции орбитального движения небесных и космических тел.

Ключевые слова: аналитическая механика, геометрия движения, регулярная кинематика, механика космического полета (астродинамика), возмущенная пространственная задача двух тел, регуляризация особенностей, порождаемых гравитационными силами, уравнения орбитального движения, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), переменные Кустаанхеймо–Штифеля, кватернионы, бикватернионы

DOI: 10.31857/S0032823523040033, **EDN:** NBKLFD

1. Введение. Кватернионные и бикватернионные методы и модели аналитической механики имеют ряд качественных преимуществ перед классическими методами и моделями и кардинально повышают эффективность аналитического исследования и численного решения многих задач небесной механики, механики твердого тела и механических систем, механики космического полета, инерциальной навигации и управления движением, кинематики и динамики пространственных механизмов и роботов.

Широкое использование четырехмерных вещественных параметров Эйлера [1], Родрига [2], Уиттекер [3], Лурье [4]) и их дуальных аналогов – дуальных параметров Эйлера [5–7] (в России они чаще называются параметрами Родрига–Гамильтона) в качестве кинематических параметров движения твердого тела привело к естественному использованию в механике, навигации и управлении движением четырехмерных гиперкомплексных переменных: кватернионов поворотов (вращений) Гамильтона [8–11] и параболических бикватернионов конечных перемещений Клиффорда [10, 12–16]. Их компонентами являются вещественные и дуальные параметры Эйлера соответственно, которые однозначно связаны с проекциями вектора Родрига [2] или вектора Гиббса [17, 18] и с их дуальными аналогами [10].

Кватернионы (гиперкомплексные числа или переменные) были введены в математику и механику Гамильтоном в 1843 году [8] и используются в механике для описания вращательного движения. Параболические бикватернионы (дуальные кватернионы) являются более общими гиперкомплексными числами или переменными. Они были введены для евклидова пространства в математику и механику Клиффордом в 1873 году [12] и используются в механике для описания общего пространственного движения (композиции вращательного и поступательного движений). Есть еще эллиптические бикватернионы, также введенные Клиффордом, и гиперболические бикватернионы, введенные Коксом (H. Cox), используемые для изучения неевклидовых пространств и неевклидовой механики. Большой вклад в разработку теории параболических бикватернионов и их приложений в механике твердого тела внес Котельников [13–15]. Им же в докторской диссертации (1897) развита теория эллиптических и гиперболических чисел и бикватернионов и даны их приложения в неевклидовой геометрии и механики (пространства Римана и Лобачевского).

В СССР и в России разработка кватернионных и бикватернионных методов и моделей (уравнений) механики и их приложений к решению задач ориентации, инерциальной навигации, управления движением, теории пространственных механизмов была начата в 1970 годах. С этого времени в СССР и в России опубликовано большое количество работ в области кватернионных и бикватернионных методов и моделей (уравнений) механики и их различных приложений.

С 70 годов в СССР были разработаны новые технические решения для построения систем ориентации и управления движением на орбитальном участке полета космических аппаратов (в том числе пилотируемых аппаратов), основанные на применении бортовых цифровых вычислительных комплексов и бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Задачи ориентации и управления движением космических аппаратов решались в то время и решаются в настоящее время в России с применением кватернионов и кватернионных кинематических уравнений. Автором этих технических решений был коллектив разработчиков, возглавляемый В.Н. Бранцем. Кватернионные теория, уравнения и алгоритмы этих решений были изложены в работах Бранца и Шмыглевского [9, 16].

Если вещественные параметры Эйлера и кватернионы эффективно используются для описания вращательного движения, то дуальные параметры Эйлера и параболические бикватернионы Клиффорда – для эффективного описания общего пространственного движения, представляющего собой композицию вращательного и поступательного движений. В работе Челнокова [5], по-видимому впервые в России, были предложены (с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди) бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения твердого тела (в бикватернионных матрицах дуальных параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера)) и были даны аналитические решения этих уравнений для одного класса винтовых движений твердого тела. В этих уравнениях присутствуют проекции кинематического винта твердого тела на координатные оси, связанные с телом. Они были использованы [7] для решения задач пространственной инерциальной навигации. Также были предложены [7] бикватернионные кинематические уравнения, дуальные коэффициенты которых – проекции кинематического винта твердого тела на оси опорной (в частности, инерциальной) системы координат. Отметим, однако, что наибольшее распространение в механике, инерциальной навигации и управлении движением нашли бикватернионные кинематические уравнения, дуальные коэффициенты которых – проекции кинематического винта твердого тела на оси системы координат, связанной с телом (движущимся объектом) в силу их большего практического удобства.

В нашей работе с использованием кватернионов Гамильтона, параболических бикватернионов Клиффорда, а также кватернионных и бикватернионных матриц излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели кинематики, в отличие от классических моделей, не имеют особенностей типа деления на ноль, порождаемых использованием классических углов Эйлера–Крылова и их дуальных аналогов, и не содержат тригонометрических функций. Эти свойства кватернионных и бикватернионных моделей кинематики повышают эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, навигации и управления движением.

Также обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики), с помощью использования параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и кватернионов Гамильтона: проблема устранения особенностей типа сингулярностей (деления на ноль), которые порождаются действующими на небесное или космическое тело (в частности, космический аппарат) ньютоновскими гравитационными силами и которые осложняют аналитическое и численное исследование движения тела (космического аппарата) вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам.

Проблема устранения указанной особенности восходит к Эйлеру и Леви-Чивита, которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Процедуру, позволяющую устранить указанную особенность дифференциальных уравнений движения, следуя Леви-Чивита, называют регуляризацией. Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем. Она наиболее полно изложена в широко цитируемой монографии [19].

Обсуждаемая в статье кватернионная регуляризация уравнений небесной механики и астродинамики имеет ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Она в настоящее время признана одной из наиболее эффективных регуляризаций особенностей классических ньютоновских уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами.

В статье приводятся основные регуляризующие соотношения и регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные Кустаанхеймо, Штифелем и Шейфеле, а также кватернионные регуляризующие соотношения и регулярные кватернионные уравнения этой задачи (орбитального движения изучаемого тела), предложенные автором статьи, как для абсолютного движения изучаемого тела (в инерциальной системе координат), так и для относительного движения (в системе координат, вращающейся в инерциальном пространстве по произвольно заданному закону, в частности, в системе координат, связанной с Землей). Приводятся предложенные нами наглядные геометрические и кинематические интерпретации регуляризующих преобразований классических уравнений в декартовых координатах и более общие (в сравнении с широко известными уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, для построения которых использованы или четырехмерные кватернионные матрицы или четырехмерные гиперкомплексные переменные (кватернионы Гамильтона).

Приведены полученные нами (Логинов, Челноков) результаты исследования точности определения траектории движения космического аппарата (КА) в поле тяготения Земли и Луны с помощью численного интегрирования предложенных нами регулярных кватернионных уравнений движения КА в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, показывающие, что эта точность на несколько порядков выше точности, полученной при численном интегрировании уравнений движения КА в декартовых координатах. Также приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования различных форм регуляризованных уравнений небесной механики и астродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах ряда других исследователей (Штифель, Шейфеле, Бордовицына, Шарковский, Авдюшев и Фукушима), показывающие, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (в частности, уравнений движения искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой.

В настоящее время кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным методам и моделям аналитической механики в силу их достоинств. Они широко используются для решения многих актуальных задач механики, навигации и управления движением и излагаются в учебниках и пособиях по теоретической механике. Кватернионный метод регуляризации особенностей уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами, с помощью использования для описания орбитального движения параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Поэтому приводимый аналитический обзор работ по кватернионным и бикватернионным методам и регулярным моделям аналитической механики и их приложениям является, на наш взгляд, актуальным.

2. Кватернионные и бикватернионные методы и модели механики. В соответствии с фундаментальной теоремой Эйлера о конечном повороте твердого тела оно может быть переведено из исходного углового положения в конечное с помощью одного поворота вокруг оси, проходящей через некоторую выбранную точку тела, например, его центр масс. Угол этого поворота называется углом Эйлера, а ось вращения – осью Эйлера. Уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения принимают наиболее удобный вид, если их записать с использованием четырех вещественных параметров Эйлера, имеющих вид

$$\lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_i = \sin(\varphi/2)\,e_i; \quad i = 1,2,3, \tag{2.1}$$

где φ – эйлеров угол поворота тела (или связанной с ним системы координат X) относительно выбранной опорной, например, инерциальной или орбитальной системы координат ξ, e_i – проекции единичного вектора $\mathbf{e}$ эйлеровой оси конечного поворота тела на оси связанной системы координат X.

Использование четырех вещественных параметров Эйлера в качестве кинематических параметров вращательного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного гиперкомплексного числа (2.2) – кватерниона конечного поворота $\boldsymbol{\lambda}$ (кватерниона поворота Гамильтона), компонентами которого являются вещественные параметры Эйлера λ_j:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}) \\ \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_i = \sin(\varphi/2)e_i \quad (i = 1,2,3),\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, определяемые таблицей умножения

$$\begin{gathered}\mathbf{i}\circ\mathbf{i} = -1, \quad \mathbf{j}\circ\mathbf{j} = -1, \quad \mathbf{k}\circ\mathbf{k} = -1 \\ \mathbf{i}\circ\mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{j}\circ\mathbf{i} = -1, \quad \mathbf{i}\circ\mathbf{k} = -1, \quad \mathbf{k}\circ\mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j}\circ\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{k}\circ\mathbf{j} = -1\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь центральный кружок – символ кватернионного произведения.

Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмизируема.

В нашей стране кватернионы впервые были внедрены в механику космического полета и в системы управления вращательным движением космических аппаратов Бранцем и Шмыглевским в 70-х годах в Ракетно-космической корпорации “Энергия”.

Использование четырех вещественных параметров Эйлера в качестве кинематических параметров вращательного движения также естественным образом привело к введению в механику четырехмерных кватернионных матриц n и m, имеющих вид ([10, 20–22]):

$$n = n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad m = m\{\boldsymbol{\lambda}\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Кватернионные матрицы n и m ортогональны и коммутируют между собой, что является полезным свойством при их совместном использовании в уравнениях и соотношениях механики.

Общее перемещение твердого тела в пространстве состоит из поступательного перемещения вместе с произвольно выбранной точкой тела, например, его центра масс, и углового перемещения. В соответствии с фундаментальной теоремой Шаля общее перемещение тела эквивалентно его винтовому перемещению. Это перемещение тела наиболее эффективно описывается с помощью четырех дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j, имеющих вид [5–7, 10, 16]:

$$\begin{gathered}\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_k = \sin(\Phi/2)\cos\Gamma_k, \quad \Phi = \varphi + s\varphi^0 \\ \Gamma_k = \gamma_k + s\gamma_k^0; \quad k = 1,2,3 \\ \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0,1,2,3, \quad s^2 = 0\end{gathered} \tag{2.5}$$

Из этих дуальных соотношений следуют вещественные скалярные соотношения

$$\lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k = \sin(\varphi/2)\cos\gamma_k$$
$$\lambda_0^0 = -\left(\varphi^0/2\right)\sin(\varphi/2), \quad \lambda_k^0 = \left(\varphi^0/2\right)\cos(\varphi/2)\cos\gamma_k - \gamma_k^0\sin(\varphi/2)\sin\gamma$$

Здесь $\Phi = \varphi + s\varphi^0$ – дуальный угол поворота тела вокруг его оси ab винтового конечного перемещения, φ – обычный (вещественный) угол поворота тела вокруг оси ab, φ^0 – величина поступательного перемещения тела вдоль оси ab, $\Gamma_k = \gamma_k + s\gamma_k^0$ – дуальный угол между осью ab и осью ξ_k системы координат ξ, в которой рассматривается положение и движение тела, γ_k – обычный угол между осью ab и осью ξ_k, $\left|\gamma_k^0\right|$ – кратчайшее расстояние между этими осями; s – комплексность Клиффорда, имеющая свойство $s^2 = 0$, λ_j – обычные (вещественные) параметры Эйлера, характеризующие поворот тела вокруг оси ab, λ_j^0 – линейные параметры, характеризующие поступательное перемещение тела вдоль оси ab.

Декартовые координаты ξ_k твердого тела в опорной системе координат ξ находятся через параметры винтового перемещения λ_j и λ_j^0 по формулам [5–7, 10, 16]:

$$\xi_1 = 2\left(-\lambda_1\lambda_0^0 + \lambda_0\lambda_1^0 - \lambda_3\lambda_2^0 + \lambda_2\lambda_3^0\right), \quad \xi_2 = 2\left(-\lambda_2\lambda_0^0 + \lambda_3\lambda_1^0 + \lambda_0\lambda_2^0 - \lambda_1\lambda_3^0\right)$$
$$\xi_3 = 2\left(-\lambda_3\lambda_0^0 - \lambda_2\lambda_1^0 + \lambda_1\lambda_2^0 + \lambda_0\lambda_3^0\right) \tag{2.6}$$

Использование четырех дуальных параметров Эйлера в качестве дуальных скалярных кинематических параметров общего пространственного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного дуального гиперкомплексного числа (2.7) (бикватерниона Клиффорда) – бикватерниона конечного перемещения $\mathbf{\Lambda}$, компонентами которого являются дуальные параметры Эйлера Λ_j [5–7, 10, 16]:

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \cos(\Phi/2) + \sin(\Phi/2)\left(E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}\right)$$
$$\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_i = \sin(\Phi/2)\,E_i\,, \quad \Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0, \quad s^2 = 0 \tag{2.7}$$
$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0 = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} + s\left(\lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k}\right)$$

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ является дуальной композицией кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$, характеризующего поворот тела, и кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^0$, характеризующего поступательное перемещение тела. Эта композиция образуется с помощью комплексности Клиффорда s, квадрат которой равен нулю.

Декартовые координаты ξ_k твердого тела в опорной системе координат ξ находятся через кватернионы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ по кватернионной формуле [5–7, 10]:

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{2.8}$$

где верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ эквивалентен восьми вещественным числам (или переменным) и содержит, помимо трех мнимых единиц Гамильтона, комплексность Клиффорда. Он был введен в математику и механику в 1873 году [12] спустя 30 лет после изобретения Гамильтоном кватернионов. Бикватернионное исчисление обладает перед винтовым исчислением [23] всеми преимуществами кватернионного исчисления перед векторным.

Использование четырех дуальных параметров Эйлера в качестве дуальных скалярных кинематических параметров общего пространственного движения также естественным образом привело к введению в механику четырехмерных ортогональных бикватернионных матриц N и M, имеющих вид [6, 10]:

$$N = N\{\mathbf{\Lambda}\} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_3 & -\Lambda_2 \\ \Lambda_2 & -\Lambda_3 & \Lambda_0 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_2 & -\Lambda_1 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad M = M\{\mathbf{\Lambda}\} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_i = \sin(\Phi/2)\,E_i, \quad \Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0, \quad s^2 = 0$$

Приведем основные бикватернионные соотношения и уравнения теории конечных перемещений и кинематики пространственного движения твердого тела.

1) Свойства бикватернионов и бикватернионных матриц [6, 10, 16].

Сопряженный бикватернион:

$$\overline{\mathbf{\Lambda}} = \Lambda_0 - \Lambda_1\mathbf{i} - \Lambda_2\mathbf{j} - \Lambda_3\mathbf{k}$$

Норма бикватерниона конечного перемещения $\mathbf{\Lambda}$:

$$\|\mathbf{\Lambda}\| = \mathbf{\Lambda} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}} = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Lambda} = \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1 \to$$
$$\to \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad \lambda_0\lambda_0^0 + \lambda_1\lambda_1^0 + \lambda_2\lambda_2^0 + \lambda_3\lambda_3^0 = 0$$

Обратный бикватернион конечного перемещения:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{\Lambda}\|}\overline{\mathbf{\Lambda}} = \overline{\mathbf{\Lambda}}$$

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\lambda} \circ \left(1 + s\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0\right) = \boldsymbol{\lambda} \circ (1 + s(1/2)\,\mathbf{r}_x) = \boldsymbol{\lambda} \circ \exp(s(1/2)\,\mathbf{r}_x)$$

или в виде

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0 = \left(1 + s\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}\right) \circ \boldsymbol{\lambda} = (1 + s(1/2)\,\mathbf{r}_\xi) \circ \boldsymbol{\lambda} = \exp(s(1/2)\,\mathbf{r}_\xi) \circ \boldsymbol{\lambda},$$

где $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{r}_\xi$ – отображения радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала опорной системы координат ξ в начало связанной с твердым телом системы координат X, на базисы X и ξ соответственно:

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = 2\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0, \quad \mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}$$

В этих формулах x_k и ξ_k – проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ на оси систем координат X и ξ (ξ_k – декартовые координаты твердого тела в опорной системе координат ξ).

Эти формулы наглядно иллюстрируют тот факт, что бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ описывает собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела.

Определители матриц N и M и обратные к ним матрицы:

$$|N| = |M| = 1, \quad N^{-1} = N^T, \quad M^{-1} = M^T$$

Матрицы N и M коммутативны: $NM = MN$. Это свойство коммутативности матриц N и M повышает эффективность аналитического и численного решения ряда геометрических и кинематических задач механики.

Произведение матриц типа N (M) дает матрицу такого же типа.

2) Преобразование дуальных ортогональных координат винта с помощью бикватернионов.

2.1) Бикватернионное перепроектирование винтов [10, 16].

Дуальные ортогональные проекции Ξ_k некоторого винта $\mathbf{R}$ на оси опорной системы координат ξ связаны с его дуальными ортогональными проекциями X_k на оси системы координат X, получаемой из системы координат ξ винтовым конечным перемещением, задаваемым бикватернионом конечного перемещения $\mathbf{\Lambda}$, бикватернионной формулой

$$\mathbf{R}_x = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{R}_\xi \circ \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{R}_x = X_1\mathbf{i} + X_2\mathbf{j} + X_3\mathbf{k}, \quad X_k = x_k + sx_k^0$$
$$\mathbf{R}_\xi = \Xi_1\mathbf{i} + \Xi_2\mathbf{j} + \Xi_3\mathbf{k}, \quad \Xi_k = \xi_k + s\xi_k^0$$

2.2) Перепроектирование винтов с помощью бикватернионных матриц [6, 10]:

$$(0, X_1, X_2, X_3) = N\{\mathbf{\Lambda}\}(M\{\mathbf{\Lambda}\})^T (0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3) = (M\{\mathbf{\Lambda}\})^T N\{\mathbf{\Lambda}\}(0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3),$$

где $(0, X_1, X_2, X_3)$ и $(0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$ – вектор-столбцы, составленные из дуальных ортогональных проекций винта $\mathbf{R}$ на оси систем координат X и ξ, $N\{\mathbf{\Lambda}\}$ и $M\{\mathbf{\Lambda}\}$ – бикватернионные матрицы, имеющие вид (2.8).

3) Сложение конечных перемещений твердого тела.

3.1) Бикватернионные формулы сложения конечных перемещений твердого тела [10, 16].

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ результирующего конечного перемещения твердого тела находится через бикватернионы $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ двух слагаемых конечных перемещений, заданные своими компонентами в одной системе координат, например в ξ, по классической формуле

$$\mathbf{\Lambda}_\xi = \mathbf{\Lambda}_{2\xi} \circ \mathbf{\Lambda}_{1\xi}$$

В случае, когда каждый из бикватернионов конечных перемещений твердого тела $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ определен в своей системе координат, преобразуемой этим перемещением, то есть, когда бикватернионы и результирующего и слагаемых конечных перемещений являются собственными, бикватернионная формула сложения двух конечных перемещений твердого тела имеет другой вид:

$$\mathbf{\Lambda}_\xi = \mathbf{\Lambda}_x = \mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}_1^* \circ \mathbf{\Lambda}_2^*,$$

где верхняя звезда означает, что бикватернион является собственным.

Эта формула имеет большое практическое применение, так как в задачах механики, робототехники, навигации и управления движением, как правило, имеется или вырабатывается именно такая информация о перемещениях твердых тел и движущихся объектов.

3.2) Матричные формулы сложения конечных перемещений твердого тела с использованием бикватернионных матриц [6, 10].

Компоненты результирующего бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ двух слагаемых конечных перемещений, заданных в одной системе координат, например ξ, по матричной формуле

$$\mathbf{\Lambda} = N\{\mathbf{\Lambda}_1\}\mathbf{\Lambda}_2 = M\{\mathbf{\Lambda}_2\}\mathbf{\Lambda}_1,$$

где $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $\mathbf{\Lambda}_i = (\Lambda_{0i}, \Lambda_{1i}, \Lambda_{2i}, \Lambda_{3i})$ – матрицы-столбцы, составленные из компонент бикватернионов результирующего и двух слагаемых конечных перемещений, $N\{\mathbf{\Lambda}_1\}$ и $M\{\mathbf{\Lambda}_2\}$ – бикватернионные матрицы, составленные из элементов бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ и имеющие вид (2.9).

Компоненты результирующего бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты собственных бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1^*$ и $\mathbf{\Lambda}_2^*$ двух слагаемых конечных перемещений по другой матричной формуле:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* = N\left\{\mathbf{\Lambda}_2^*\right\}\mathbf{\Lambda}_1^* = M\left\{\mathbf{\Lambda}_1^*\right\}\mathbf{\Lambda}_2^*,$$

где $\mathbf{\Lambda}^* = \left(\Lambda_0^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*, \Lambda_3^*\right)$, $\mathbf{\Lambda}_i^* = \left(\Lambda_{0i}^*, \Lambda_{1i}^*, \Lambda_{2i}^*, \Lambda_{i3}^*\right)$ — матрицы-столбцы, составленные из компонент собственных бикватернионов результирующего и двух слагаемых конечных перемещений, $N\left\{\mathbf{\Lambda}_2^*\right\}$ и $M\left\{\mathbf{\Lambda}_1^*\right\}$ — бикватернионные матрицы, составленные из элементов бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1^*$ и $\mathbf{\Lambda}_2^*$ и имеющие вид (2.9).

Компоненты результирующего бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, \ldots, \mathbf{\Lambda}_n$ n слагаемых конечных перемещений, заданные в одной системе координат по матричной формуле

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\prod_{i=\nu}^{k+1} M_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k-1} N_i\right)\mathbf{\Lambda}_k; \quad k \le \nu$$

Здесь $M_i = M\left(\mathbf{\Lambda}_i\right)$, $N_i = N\left(\mathbf{\Lambda}_i\right)$; $\left(\prod_{i=1}^{k-1} N_i\right) = E$ при $k = 1$, $\left(\prod_{i=\nu}^{k+1} M_i\right) = E$ при $k = \nu$.

Бикватернионные матрицы N_i и M_i имеют структуру вышеприведенных матриц N и M.

Компоненты результирующего бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ конечного перемещения твердого тела находится через компоненты собственных бикватернионов $\mathbf{\Lambda}_1^*, \mathbf{\Lambda}_2^*, \ldots, \mathbf{\Lambda}_n^*$ n слагаемых конечных перемещений по другой матричной формуле:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* = \left(\prod_{i=\nu}^{k+1} N_i^*\right)\left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i^*\right)\mathbf{\Lambda}_k^*; \quad k \le \nu$$

Здесь $N_i^* = N\left\{\mathbf{\Lambda}_i^*\right\}$, $M_i^* = M\left\{\mathbf{\Lambda}_i^*\right\}$; $\left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i^*\right) = E$ при $k = 1$, $\left(\prod_{i=\nu}^{k+1} N_i^*\right) = E$ при $k = \nu$.

Бикватернионные матрицы N_i^* и M_i^* имеют структуру вышеприведенных матриц N и M.

Приведенные матричные формулы сложения конечных перемещений твердого тела с использованием двух типов бикватернионных матриц N и M повышают эффективность аналитического исследования и численного решения уравнений движения сложных многозвенных механизмов и устройств в силу коммутативности матриц типов N и M.

4) Бикватернионные кинематические уравнения движения твердого тела.

4.1) Уравнения в дуальных параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона) и вещественных параметрах винтового движения.

Конечное перемещение связанной со свободным твердым телом системы координат X относительно опорной системы координат ξ будем характеризовать дуальными параметрами Эйлера (Родрига—Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$).

Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела, эквивалентного его винтовому движению, устанавливающее связи дуальных параметров Эйлера, их первых производных по времени с дуальными ортогональными проекциями $U_i = \omega_i + s v_i$ кинематического винта $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{v}$ твердого тела на оси связанной с твердым телом системы координат X, имеет вид [5, 7, 10, 16, 24]

$$
\begin{gathered}
2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x \\
\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0 \\
\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1\mathbf{i} + \dot{\Lambda}_2\mathbf{j} + \dot{\Lambda}_3\mathbf{k} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} + s\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0, \quad \dot{\Lambda}_j = \dot{\lambda}_j + s\dot{\lambda}_j^0 \\
\mathbf{U}_x = U_1\mathbf{i} + U_2\mathbf{j} + U_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x, \quad U_i = \omega_i + sv_i
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ – собственный бикватернион винтового конечного перемещения твердого тела относительно опорного базиса ξ, являющийся комплексной комбинацией кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации тела в опорном базисе и кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^0$, характеризующего поступательное перемещение тела в этом базисе; $\mathbf{U}_x = U_1\mathbf{i} + U_2\mathbf{j} + U_3\mathbf{k}$ – отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на связанный с телом базис X, компоненты $U_i = \omega_i + sv_i$ бикватерниона $\mathbf{U}_x$ являются комплексными комбинациями проекций ω_i и v_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и вектора $\mathbf{v}$ скорости выбранной точки тела (полюса) на связанные с ним координатные оси.

Угловое положение (ориентация) твердого тела в опорном базисе ξ характеризуется параметрами Эйлера λ_j, а его линейное положение (поступательное перемещение) в этом базисе – декартовыми координатами ξ_i выбранного полюса, которые находятся через вещественные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0, являющиеся компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$, с помощью кватернионной формулы (2.8).

Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела, устанавливающее связи дуальных параметров Эйлера, их первых производных по времени с дуальными ортогональными проекциями U_i^* кинематического винта $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{v}$ твердого тела на оси опорной системы координат ξ, имеет вид [7, 10, 16]

$$
\begin{gathered}
2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathbf{U}_\xi \circ \boldsymbol{\Lambda} \\
\mathbf{U}_\xi = U_1^*\mathbf{i} + U_2^*\mathbf{j} + U_3^*\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_\xi + s\mathbf{v}_\xi, \quad U_i^* = \omega_i^* + sv_i^*
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Здесь $\mathbf{U}_\xi$ – отображение кинематического винта на опорный базис ξ, имеющее дуальные компоненты U_i^*.

Кинематические уравнения, связывающие дуальные параметры Эйлера Λ_j и их производные с дуальными ортогональными проекциями U_i и U_i^* кинематического винта на оси связанной с твердым телом системы координат и опорной системы координат, в матричных формах имеют следующий вид [5, 7, 10]:

$$
2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = N\{\mathbf{U}_x\}\boldsymbol{\Lambda}, \quad 2dN/dt = 2\dot{N} = N\{\mathbf{U}_x\}N \tag{2.12}
$$

$$
2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = M\{\mathbf{U}_\xi\}\boldsymbol{\Lambda}, \quad 2dM/dt = 2\dot{M} = M\{\mathbf{U}_\xi\}M, \tag{2.13}
$$

$\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = (\dot{\Lambda}_0, \dot{\Lambda}_1, \dot{\Lambda}_2, \dot{\Lambda}_3)$ – матрицы-столбцы;

$$
N\{\mathbf{U}_x\} = \begin{pmatrix} 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M\{\mathbf{U}_\xi\} = \begin{pmatrix} 0 & -U_1^* & -U_2^* & -U_3^* \\ U_1^* & 0 & -U_3^* & U_2^* \\ U_2^* & U_3^* & 0 & -U_1^* \\ U_3^* & -U_2^* & U_1^* & 0 \end{pmatrix},
$$

N и M – ортогональные бикватернионные матрицы, составленные из дуальных параметров Эйлера, имеющие вид (2.9).

Бикватернионные кинематические уравнения (2.10) и (2.12) в дуальных параметрах Эйлера, являются (при $\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(t)$) линейными нестационарными дифференциальными уравнениями, не имеющими особых точек (деления на ноль), в отличие от нелинейных кинематических уравнений в дуальных углах Эйлера—Крылова [10], содержащих эти особые точки. В отличие от линейных кинематических уравнений в дуальных направляющих косинусах [10], имеющих размерность, равную девяти, уравнения в дуальных параметрах Эйлера имеют меньшую размерность, равную четырем. Поэтому эти уравнения нашли широкое применение в механике твердого тела и механических систем, в инерциальной навигации, в робототехнике и в управлении движением.

Дуальные ортогональные проекции U_i^* кинематического винта $\mathbf{U}$ на оси опорной системы координат имеют вид [10]

$$U_i^* = \omega_i^* + s\left(v_i^* + (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_{\xi_i}\right),$$

где v_i^*, ω_i^* и $(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_{\xi_i}$ — проекции вектора $\mathbf{v}$ скорости выбранной точки тела (полюса), вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и векторного произведения $(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})$ на оси опорной системы координат ξ, в котором $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала опорной системы координат ξ в начало связанной с твердым телом системы координат X.

Дуальные проекции U_i^* содержат проекции ξ_i радиус-вектора $\mathbf{r}$ полюса O твердого тела на оси опорной системы координат. Это затрудняет непосредственное использование кинематических уравнений (2.11) и (2.13) винтового движения твердого тела (на этот недостаток уравнения (2.11) не обращают внимания некоторые англоязычные авторы, использующие эти уравнения в робототехнике). От указанного недостатка свободны кинематические уравнения (2.10) и (2.12) винтового движения твердого тела, использующие дуальные ортогональные проекции $U_i = \omega_i + sv_i$ кинематического винта $\mathbf{U}$ тела на оси связанной системы координат X.

Следует отметить, что декартовы координаты ξ_i можно исключить из уравнений (2.11) и (2.13), если учесть их связи с вещественными параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0, являющимися компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$, с помощью кватернионной формулы (2.8). Однако, получающиеся при этом дифференциальные уравнения относительно переменных λ_j^0 являются достаточно сложными и, вследствие этого, малоудобными в приложениях.

Бикватернионное кинематическое уравнение (2.10), а также каждое из дуальных матричных кинематических уравнений (2.12) эквивалентно системе четырех скалярных однородных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных дуальных параметров Эйлера Λ_j, имеющей вид

$$2\dot{\Lambda}_0 = -U_1\Lambda_1 - U_2\Lambda_2 - U_3\Lambda_3, \quad 2\dot{\Lambda}_1 = U_1\Lambda_0 + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3$$
$$2\dot{\Lambda}_2 = U_2\Lambda_0 - U_3\Lambda_1 + U_1\Lambda_3, \quad 2\dot{\Lambda}_3 = U_3\Lambda_0 + U_2\Lambda_1 - U_1\Lambda_2$$

Отметим также, что бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела (2.10) эквивалентно двум следующим кватернионным кинематическим уравнениям в параметрах винтового движения λ_j и λ_j^0:

$$2d\boldsymbol{\lambda}/dt = 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}\circ\boldsymbol{\omega}_x, \quad 2d\boldsymbol{\lambda}^0/dt = 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 = \boldsymbol{\lambda}^0\circ\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{v}_x$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\lambda}^0 = \lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k},$$

где, по-прежнему, ω_i и v_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и вектора $\mathbf{v}$ скорости выбранной точки тела (полюса) на связанные с ним координатные оси.

Первое из этих уравнений — классическое кватернионное кинематическое уравнение сферического (вращательного, углового) движения твердого тела, второе уравнение, дополненное кватернионным соотношением

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}},$$

описывает кинематику поступательного движения тела в опорной системе координат.

Отметим, что приведенные бикватернионные уравнения и соотношения теории конечных перемещений и кинематики винтового движения твердого тела переходят в кватернионные уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения тела, если в них символ Клиффорда s положить равным нулю.

Приведенные кинематические уравнения винтового движения твердого тела в дуальных параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона) и в вещественных параметрах винтового движения были, по-видимому, впервые получены автором статьи в работах [5, 7].

В нашей стране бикватернионы впервые, по-видимому, были использованы в кинематике пространственных механизмов, в инерциальной навигации и управлении движением автором статьи, Бранцем и Шмыглевским.

Разработке кватернионных методов и моделей теоретической механики и их приложений в управлении движеним твердого тела и инерциальной навигации посвящены книги Бранца и Шмыглевского [9, 16]. Первая книга носит пионерский характер в этой области. Во второй книге также изложены бикватернионные методы и модели геометрии и кинематики механики твердого тела и их приложения в инерциальной навигации.

Разработка кватернионных и бикватернионных методов и моделей аналитической механики и их приложение в механике твердого тела, механических и гироскопических систем, в теории регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, а также в инерциальной навигации были начаты автором статьи в 70—80 гг. в его диссертациях [25, 26], полученные результаты в этих областях были частично изложены им в монографиях, изданных при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в 2006 и 2011 годах [10, 27].

Отметим, что проблемы существенной нелинейности и нерегулярности (типа деление на ноль) классических моделей механики, в которых для описания движения используются трехмерные вещественные переменные (углы Эйлера—Крылова) и их дуальные аналоги, кардинально были решены с помощью использования для описания движения четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона), а также гиперкомплексных переменных: кватернионов Гамильтона и бикватернионов Клиффорда, компонентами которых являются вещественные и дуальные параметры Эйлера соответственно.

Также отметим, что существуют другие особенности классических моделей небесной механики и механики космического полета (астродинамики) типа деления на ноль, которые порождаются действующими на небесное или космическое тело (в частности, космический аппарат) гравитационными силами и которые осложняют исследование движения тела (аппарата) вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам. Наиболее эффективные методы регуляризации этих особенностей и регулярные модели небесной механики и астродинамики были разработаны и построены с помощью использования параметров Эйлера и четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля, а также их модификаций, и кватернионных переменных. Поэтому в настоящее время кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным методам и моделям механики, навигации и управления движением.

Далее нами рассматриваются кватернионные методы аналитической механики, с помощью которых эффективно решается проблема регуляризации (проблема устранения сингулярностей (особенностей типа деления на ноль), порождаемых действующими гравитационными силами), а также излагаются регулярные кватернионные модели небесной механики и механики космического полета, построенные с помощью этих методов.

3. Проблема регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики). В основе небесной механики и астродинамики лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Аналогично, ньютоновские уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вырождаются при соударении изучаемого тела (тела с пренебрежимо малой массой) с одним из двух других гравитирующих тел, имеющих конечные массы, что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения тела с пренебрежимо малой массой в окрестности первого или второго гравитирующего тела и также создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности в ограниченной задаче трех тел. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными. Среди методов регуляризации и регулярных моделей прикладной небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменных) посвящены работы Velte [28], Vivarelli [29–31], Шагова [32]; Deprit, Elipe и Ferrer [33], Vrbik [34, 35], Waldvogel [36, 37], Saha [38], Zhao [39]; Roa, Urrutxua и Pelaez [40], Roa и Pelaez [41], Breiter и Langner [42–44], Ferrer и Crespo [45], а также работы автора статьи [46–60].

В работах Штифеля и Шейфеле [19], Бордовицыной [61], Бордовицыной и Авдюшева [62], Fukushima [63, 64], Pelaez, Hedo, Rodriguez [65], Baù, Bombardelli, Pelaez и Lorenzini [66], Amato, Bombardelli, Baù, Morand, Rosengren [67], а также Baù, Roa [68] приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Проведено [69, 70] сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [71] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, принимающих вид ниже приводимых регулярных кватернионных уравнений (5.9) возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Регулярные кватернионные уравнения в *KS*-переменных показали значительно более высокую точность, чем уравнения в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на два порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на четыре порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на семь порядков.

Отметим, что в книге Бордовицыной [61] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием уравнений в *KS*-переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в *KS*-переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой. Отметим также, что Бордовицыной и Шарковским использованы регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля в канонической форме, выведенные ими с использованием соответствующего гамильтониана.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в *KS*-переменных, имеющих возмущенный осцилляторный вид, в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе перед уравнениями в декартовых координатах.

В дальнейшем в нашей статье анализируются кватернионные методы и регулярные кватернионные модели небесной механики и астродинамики, построенные на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо—Штифеля (*KS*-переменных).

Рассматриваемая нами регуляризация особенностей (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными и другими центральными силами, основана на использовании параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона), переменных Кустаахеймо—Штифеля и на использовании в качестве дополнительных переменных энергетических характеристик движения и реального времени, а также на использовании новой независимой переменной вместо реального времени (для регуляризующего преобразования реального времени). В излагаемой нами регуляриации используются четырехмерные кватернионные матрицы и кватернионы Гамильтона, поскольку используемые для целей регуляризации параметры Эйлера и переменные Кустаахеймо—Штифеля являются четырехмерными переменными, а кватернион Гамильтона есть четырехмерное гиперкомплексное число или переменная.

4. Регуляризация Кустаанхеймо—Штифеля уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Векторное и скалярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{f\,(m+M)}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{p}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right); \quad r = |\mathbf{r}|$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \frac{f\,(m+M)}{r^3}\xi_1 = p_1, \quad \frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \frac{f\,(m+M)}{r^3}\xi_2 = p_2 \tag{4.1}$$

$$\frac{d^2\xi_3}{dt^2} + \frac{f\,(m+M)}{r^3}\xi_3 = p_3, \quad r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс второго (изучаемого) тела, проводимый из центра масс первого (центрального) тела, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между телами, m и M — массы второго и первого тел; f — гравитационная постоянная; $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела (вектор-функция времени t, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ второго тела в системе координат ξ, имеющей начало в центре масс первого тела и координатные оси, параллельные осям инерциальной системы координат), t — время; ξ_k — декартовые координаты центра масс изучаемого тела в системе координат ξ, $p_k = p_k\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3\right)$ $(k = 1, 2, 3)$ — проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси инерциальной системы координат, совпадающие с его проекциями на оси системы координат ξ, верхняя точка — символ дифференцирования по времени t.

Уравнения (4.1) вырождаются при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат, как уже отмечалось, создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит, как уже отмечалось, к Эйлеру [72] и Леви-Чивита [73—75]. Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спинорная или *KS*-регуляризация) была предложена Кустаанхеймо и Штифелем [76, 77]. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в монографии Штифеля и Шейфеле [19].

В книге [19, § 4. Сингулярные дифференциальные уравнения, с. 15—16] говорится: "Уравнения движения (16) (в декартовых координатах) имеют особенность в начале координат, так как ньютоновское гравитационное притяжение центральной массы становится бесконечным в этой точке. Вследствие этого возникают не только теоретические, но и очень неприятные практические трудности. Если частица подходит достаточно близко к центральной массе, то можно говорить о почти соударении. Такое событие вызывает большие гравитационные силы и резкое изменение орбиты. При численном интегрировании единственный способ преодолеть эту трудность состоит в уменьшении длины шага и употреблении большого количества шагов интегрирования в зоне тесного сближения. Из-за ошибок округления и отбрасывания членов в формуле интегрирования после прохождения почти соударения будет довольно низкой. В классической небесной механике об этом не приходится заботиться, поскольку соударения планет, как правило, не встречаются[1]. Но любой запуск искусственного космического аппарата приводит к тесному сближению на участках старта и финиша.

Таким образом, нас интересует преобразование сингулярных дифференциальных уравнений в регулярные. Эта процедура называется регуляризацией".

Брумбергом [78] рассматриваются уравнения возмущенной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера. Брумбергом отмечается, что среди математических проблем небесной механики актуальны вопросы регуляризации и стабилизации уравнений небесной механики, в частности, развитие регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля, которая сводит кеплеровское движение в трехмерном пространстве к задаче гармонического осциллятора в четырехмерном пространстве. Им также отмечается, что правые части дифференциальных уравнений небесной механики принимают симметричную форму, приближающуюся к полиномиальной, и становятся более удобными для вычислений, если вместо трех углов Эйлера вводятся четыре параметра Эйлера, которые можно рассматривать как

[1] Трудности, связанные с почти соударениями, возникают и в задачах классической небесной механики, в частности, при исследовании движения кометы в сфере действия большой планеты (Прим. ред. *В.А. Брумберга*).

компоненты единичного четырехмерного вектора. Такая модификация классических методов, по мнению Брумберга, была начата [79, 80] и постепенно приобретает все большую популярность.

В книге Бордовицыной ([61], с. 25–26) говорится: “...классические уравнения движения небесных тел имеют особенности в окрестности соударений гравитирующих масс. В практических задачах небесной механики прямые соударения тел, как правило, не рассматриваются. Однако в рамках этих задач наличие особенностей в уравнениях движения оказывают заметное влияние на процесс их численного решения.

Наиболее характерной математической моделью движения тел Солнечной системы является возмущенная задача двух тел. Уравнения этой задачи, записанные в системе координат, связанной с центральным телом, сингулярны в начале координат и при тесных сближениях с возмущающими телами. Для орбит, имеющих большие эксцентриситеты, когда скорость изменения центрального радиуса растет при приближении к перицентру и убывает при удалении от него, наличие особенности в начале координат приводит к неравномерному изменению функций правых частей уравнений движения. При численном решении задачи такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования. Все это снижает точность численного интегрирования и приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

В случае тесных сближений с возмущающими телами также появляется неравномерность в изменении функций правых частей уравнений движения, приводящих к потере точности интегрирования. Наиболее сложный случай представляет собой движение долгопериодических комет и особых малых планет. Эти тела движутся по высокоэллиптическим орбитам и имеют тесные сближения с большими планетами.

Процедуру, позволяющую устранить особенности дифференциальных уравнений движения, следуя Леви-Чивита, называют регуляризацией.”

Из изложенного следует, что сингулярности в задачах небесной механики и механики космического полета, порождаемые действующими гравитационными силами, играют важную роль. Их устранение – одна из проблем небесной механики и астродинамики.

В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. На языке вещественного анализа это эквивалентно введению четырех параметров $u_1, u_2, u_3, u_4 = u_0$.

В регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, изложенной в книге Штифеля и Шейфеле [19], использована обобщенная матрица Леви-Чивита, названная KS-матрицей. Эта матрица (обозначается здесь как $L(\mathbf{u}_{KS})$) – четырехмерная квадратная матрица, содержащая в левом верхнем углу двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита и имеющая вид

$$L(\mathbf{u}_{KS}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

В этой матрице u_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ – переменные Кустаанхеймо–Штифеля, называемые KS-переменными (вместо обозначения u_4 одной из переменных Кустаанхеймо–Штифеля здесь и далее нами используется обозначение u_0).

В матричной записи преобразование Кустаанхеймо–Штифеля имеет вид [19]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

В скалярной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \tag{4.4}$$

и с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа [81].

Таким образом, в основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, которое основывается на переходе от трехмерных декартовых координат ξ_k к новым четырехмерным переменным Кустаахеймо–Штифеля u_j (то есть, на переходе от трехмерного пространства декартовых координат к новому четырехмерному пространству).

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [19]

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = \frac{1}{2}rq_j; \quad j = 0,1,2,3 \tag{4.5}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\left(q_0\frac{du_0}{d\tau} + q_1\frac{du_1}{d\tau} + q_2\frac{du_2}{d\tau} + q_3\frac{du_3}{d\tau}\right) \tag{4.6}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{4.7}$$

$$q_0 = u_0p_1 - u_3p_2 + u_2p_3, \quad q_1 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3$$

$$q_2 = -u_2p_1 + u_1p_2 + u_0p_3, \quad q_3 = -u_3p_1 - u_0p_2 + u_1p_3$$

Здесь τ – новая независимая переменная, называемая фиктивным временем, связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$ (преобразованием времени Зундмана [82]), h – кеплеровская энергия единицы массы изучаемого тела, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношением

$$h = \frac{1}{2}v^2 - f(m+M)\frac{1}{r}; \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{4.8}$$

Время t также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля (4.5)–(4.7) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных, в общем случае нестационарных, дифференциальных уравнений относительно четырех KS-переменных u_j, их первых производных $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ, кеплеровской энергии h и времени t.

Эти скалярные уравнения эквивалентны матричным уравнениям [19]

$$\begin{gathered}\frac{d^2\mathbf{u}_{ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u}_{ks} = \frac{1}{2}rL(\mathbf{u}_{ks})\mathbf{P}_{ks}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -2\left(\frac{d\mathbf{u}_{ks}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{ks}))^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{ks}\right)\\ \frac{dt}{d\tau} = (\mathbf{u}_{ks}, \mathbf{u}_{ks}) \quad \mathbf{u}_{ks} = (u_1, u_2, u_3, u_0), \quad \mathbf{P}_{ks} = (p_1, p_2, p_3, 0),\end{gathered} \tag{4.9}$$

где $\mathbf{u}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец KS-переменных, $L(\mathbf{u}_{KS})$ – KS-матрица, определяемая соотношением (4.2), $\mathbf{P}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения $\mathbf{p}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение четырехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (4.5)–(4.7):

– они, в отличие от ньютоновских уравнений (4.1), регулярны в центре притяжения, когда расстояние между телами $r = 0$;

– линейны во времени τ для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений) и имеют в этом случае вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными половинной кеплеровской энергии h, взятой со знаком минус:

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = 0; \quad h = \text{const}, \quad j = 0,1,2,3;$$

– для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h = \text{const} < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во времени τ, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Штифелем и Шейфеле [19], Бордовицыной и Шарковским [61] показано, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше точности интегрирования ньютоновских уравнений. Так, Бордовицыной и Шарковским показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например, задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими, приведенными выше, показало, как уже отмечалось выше, что они в целом согласуются между собой.

Отметим, что в книге Бордовицыной [61] приводятся результаты Всесоюзного эксперимента по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел, который проводился по решению III Всесоюзного совещания “Алгоритмы небесной механики” (Рига, 1980) с целью определения сравнительных характеристик имеющихся в распоряжении предприятий и организаций методов и программ численного интегрировния уравнений движения небесных тел. В книге ([61], с. 109) говорится: “Расчет эталонных орбит осуществлялся с помощью так называемой численной модели движения ИСЗ, разработанной Т.В. Бордовицыной и Н.А. Шарковским. ... В качестве системы уравнений спутника были выбраны уравнения в регулярных оскулирующих элементах. Для обоснования такого выбора на рис. 7 вместе с графиком, иллюстрирующим накапливающиеся ошибки интегрирования при использовании регулярных элементов (α), при вычислении орбиты ИСЗ типа “Навстар” даны аналогичные графики для уравнений в параметрических переменных (u) и обычно применяемых прямоугольных координатах ($\mathbf{x}$)”. Результаты эксперимента, как отмечается Бордовицыной ([61], с. 120), показали, что “Наиболее точные результаты с различными методами дает преобразование Кустаанхеймо–Штифеля, которое, как показал К. Велез, не меняет пределов устойчивости численного метода, но, как мы видели раньше, существенно повышает динамическую устойчивость системы”.

В книге Бордовицыной и Авдюшева [62] говорится: “методы теории специальных возмущений весьма эффективны и могут быть рекомендованы к применению для численного моделирования спутниковых орбит. Впечатляющие результаты получаются при использовании KS-уравнений ($\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{u}$) и уравнений Роя ($\mathbf{ry}$). Так, при сохранении точности интегрирования с их помощью удается повысить быстродействие в 3–4 раза. Кроме того, метод Энке в *KS*-переменных ($\delta\mathbf{u}$) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 1–2 порядка". Здесь речь идет о спутниковых орбитах с эксцентриситетом равным нулю или 0.01 (типа орбит спутниковой навигационной группировки ГЛОНАСС, близких к круговым орбитам).

В работах Фукушимы [63, 64], ученого из японской Национальной астрономической обсерватории, также показано, что *KS*-регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме. В работе [64] приводится численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации Шперлинга–Бюрде (*SB*), Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*), Бюрде–Феррандиса (*BF*) и трехмерное расширение регуляризации Леви-Чивита (*LC*). В аннотации статьи [64] сказано: *KS* и расширенная *LC* регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что также сравниваются семь схем, описанных в ([64], §1) и "нерегуляризованная обработка, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах". Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

Отметим также, что установлено [83], что уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел (для кеплеровского движения) могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} - \frac{2h}{\alpha^2}\mathbf{r} + \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{A} = 0; \quad r d\tau = \alpha dt,$$

где h и $\mathbf{A}$ – энергия и вектор Лапласа, которые в этом случае являются постоянными величинами; постоянная α – это шкала длин, введенная для того, чтобы дать новой независимой переменной τ физическое измерение времени.

Таким образом, Bohlin были предложены регулярные уравнения задачи двух тел в декартовых координатах ξ_k, которые для эллиптического кеплеровского движения имеют вид трехмерного одночастотного гармонического осциллятора, находящегося под действием ускорения, постоянного по модулю и направлению в инерциальной системе координат. Наличие неоднородной части в аналитическом решении уравнений Bohlin осложняет их использование для построения методом вариации произвольных постоянных интегрирования уравнений возмущенной задачи двух в медленно изменяющихся (оскулирующих) переменных.

Идеи Бохлина были использованы в работах Бурде [84, 85].

5. Кватернионная регуляризация и регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные автором статьи. В основе знаменитой регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит, как уже отмечалось, нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, обобщающее преобразование Леви-Чивита и названное *KS*-преобразованием. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля). Поэтому, по мнению Штифеля и Шейфеля прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможен ([19], с. 29): "В случае плоского движения (§ 8) мы начали с уравнений (8) для координат x_i (*в наших обозначениях* ξ_i) и получили уравнения (26) для параметров u_j. Этот прямой подход нельзя повторить в рассматриваемом трехмерном случае. Причина заключается в том, что *KS*-преобразование неоднозначно при переходе от **x** к **u**. Существует целое одномерное множество векторов **u**, соответствующих данному вектору **x**. Единственный путь избежать этой трудности состоит в постулировании уравнений (26) и проверки того, что при этом удовлетворяются старые уравнения (8). Несколько дополнительных теорем помогут в достижении этой цели".

В книге [19] постулируется матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел (первое из уравнений (4.9)), записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение (первое из уравнений (4.1)).

Вскоре после открытия *KS*-преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырехмерных гиперкомплексных чисел) и четырехмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел, поскольку четырехмерность пространства новых координат делала естественным использование для такой регуляризации кватернионов Гамильтона и четырехмерных кватернионных матриц. Однако, Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав в одиннадцатой главе своей книги [19], посвященной геометрии *KS*-преобразования, что "Любая попытка заменить теорию KS-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму". Поэтому вместо хорошо известных в математике четырехмерных кватернионных матриц Штифель и Шейфеле в своей книге используют для построения теории регуляризации новые, введенные ими, четырехмерные квадратные матрицы, названные ими *KS*-матрицами, имеющие вид (4.2).

Приведенное утверждение Штифеля и Шейфеле было опровергнуто, по-видимому впервые, автором статьи [46–49]. Известный ученый Вальдвогель по поводу цитированного выше высказывания Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц в работе [37] ("Кватернионы для регуляризации небесной механики: истинный (верный) путь") говорит: "Это утверждение было впервые опровергнуто Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (например, 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения."

Челноковым было показано [46–49] (с использованием классических кватернионных матриц [46] и с использованием кватернионов Гамильтона [47]), что кватернионный подход к регуляризации

– позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в *KS*-переменных (что, как уже отмечалось, ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение ([19], с. 29) из-за неоднозначности *KS*-преобразования);

– позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему *KS*-преобразованию;

– раскрывает геометрический смысл его неоднозначности;

– позволяет получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

В работе [46] для построения кватернионных регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел была использована четырехмерная кватернионная матрица

$$n\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

элементами которой являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля u_j.

Эта матрица имеет вид первой из кватернионных матриц (2.4) и она отличается от *KS*-матрицы (4.2). Если под элементами u_j этой матрицы понимать параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) λ_j, то она будет являться хорошо известной кватернионной матрицей поворота, описывающей вращение в трехмерном пространстве.

В работе [47] для этих целей использован кватернион Гамильтона $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \tag{5.2}$$

элементами которого являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля u_j.

В кватернионной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k}, \tag{5.3}$$

приведенный Штифелем и Шейфеле в их книге [19].

В работах [46, 47] показано, что регуляризующее *KS*-преобразование координат заключается в переходе от декартовых координат центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым переменным, которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона поворота $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, характеризующего ориентацию вращающейся системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ связаны соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\boldsymbol{\lambda}}$.

Было показано, что билинейное соотношение Кустаанхеймо—Штифеля

$$u_1\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_1}{d\tau} + u_3\frac{du_2}{d\tau} - u_2\frac{du_3}{d\tau} = 0, \tag{5.4}$$

связывающее между собой *KS*-переменные u_j и их первые производные по новой независимой переменной τ, накладывает на движение трехгранника η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось η_1):

$$\omega_1 = 2\left(\lambda_0\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1\frac{d\lambda_0}{dt} - \lambda_2\frac{d\lambda_3}{dt} + \lambda_3\frac{d\lambda_2}{dt}\right) = \frac{2}{r}\left(u_1\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_1}{d\tau} + u_3\frac{du_2}{d\tau} - u_2\frac{du_3}{d\tau}\right) = 0$$

Отметим, что по словам Штифеля и Шейфеле ([19], с. 29) соотношение вида (5.4):

$$u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 = 0,$$

где u_j и v_j — компоненты четырехмерных векторов u и v, “называется билинейным соотношением и играет основную роль в нашем построении регулярной небесной механики”.

Таким образом, переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от декартовых координат центра масс второго тела к *KS*-переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся системе координат η с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j, являющихся компонентами кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$ этой системы координат.

Наши дальнейшие преобразования этих уравнений связаны с нормировкой параметров Эйлера λ_j (кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$) с помощью множителя $\sqrt{r}$ и с переходом в них к переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j, а также с введением в качестве дополнительных зависимых переменных кеплеровской энергии h и времени t и с переходом к новой независимой переменной τ.

Отметим, что в работах [46, 47] были получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) матричные (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в KS-переменных в предположении, что вышеуказанное билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля (5.4) не выполняется. Эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которых присутствуют проекции ω_1 и ε_1 векторов угловой скорости и углового ускорения сопровождающего трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), и являются более сложными.

Для получения этих уравнений нами были использованы восьмимерные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0 ($j = 0, 1, 2, 3$) введенной поступательно перемещающейся и вращающейся системы координат η, а также полученные в этих переменных матричные [46] или кватернионные [47] дифференциальные уравнения возмущенного движения материальной точки (второго тела) в ньютоновском гравитационном поле. В этих работах было отмечено, что переменные λ_j и λ_j^0 являются компонентами дуальных параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера) $\Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0$, которые, в свою очередь, являются компонентами бикватерниона конечного перемещения Клиффорда [12]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0 = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} + s\left(\lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k}\right),$$

описывающего движение подвижной системы координат η, в которой были записаны уравнения движения материальной точки.

В состав использованных уравнений движения материальной точки входят дифференциальные уравнения в переменных λ_j и λ_j^0, записанные в матричном виде с использованием кватернионных матриц типа n, имеющей вид первой из матриц (2.4) [46], или в кватернионном виде [47] с использованием кватернионных переменных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$.

В работе [47] отмечено, что использованные кватернионные дифференциальные уравнения в переменных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ эквивалентны одному бикватернионному (дуальному кватернионному) кинематическому уравнению [5]

$$2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{v} = (\omega_1 + sv_1)\,\mathbf{i} + (\omega_2 + sv_2)\,\mathbf{j} + (\omega_3 + sv_3)\,\mathbf{k},$$

имеющему вид уравнения (2.10).

В этом уравнении $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости подвижной системы координат η, $\mathbf{v}$ – вектор линейной скорости начала этой системы координат, совпадающего с материальной точкой (центром масс второго тела), ω_k и v_k – проекции этих векторов на оси подвижной системы координат η.

Декартовые координаты центра масс изучаемого тела ξ_k в системе координат ξ (т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс этого тела на оси инерциальной системы координат) связаны с переменными λ_j и λ_j^0 скалярными соотношениями (2.6):

$$\xi_1 = 2\left(-\lambda_1\lambda_0^0 + \lambda_0\lambda_1^0 - \lambda_3\lambda_2^0 + \lambda_2\lambda_3^0\right), \quad \xi_2 = 2\left(-\lambda_2\lambda_0^0 + \lambda_3\lambda_1^0 + \lambda_0\lambda_2^0 - \lambda_1\lambda_3^0\right)$$
$$\xi_3 = 2\left(-\lambda_3\lambda_0^0 - \lambda_2\lambda_1^0 + \lambda_1\lambda_2^0 + \lambda_0\lambda_3^0\right),$$

которые в кватернионной записи имеют вид (2.8): $\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}$.

Если в приведенных скалярных соотношениях (2.6) положить

$$\lambda_0 = r^{-1/2}u_0, \quad \lambda_i = -r^{-1/2}u_i; \quad i = 1,2,3$$

$$\lambda_0^0 = (1/2)\,r^{1/2}u_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)\,r^{1/2}u_0, \quad \lambda_2^0 = -(1/2)\,r^{1/2}u_3, \quad \lambda_3^0 = (1/2)\,r^{1/2}u_2,$$

то из них следуют формулы Кустаанхеймо–Штифеля (4.4):

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)$$

Таким образом, нами было показано, что преобразование Кустаанхеймо–Штифеля является частным случаем более общего преобразования, описывающего винтовое движение в пространстве.

Приведенные скалярные соотношения (2.6), связывающие декартовые координаты ξ_k с параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0, впервые были установлены алгебраическим путем Штуди [86] как формулы, служащие для нахождения координат начала новой системы координат, получаемой из старой некоторым винтовым перемещением, определяемым бикватернионной операцией $\overline{\boldsymbol{\Lambda}} \circ (\bullet) \circ \boldsymbol{\Lambda}$. Их вывод также приводится в работе Котельникова [13], где для их получения используется теория приведения бикватернионов и бивекторов к выбранной точке приведения, и в работах автора статьи [5, 10] с использованием теории конечных перемещений твердого тела.

Отметим, что проекции η_k радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела на оси подвижной системы координат η связаны с переменными λ_j и λ_j^0 кватернионным соотношениям $\mathbf{r}_\eta = \eta_1\mathbf{i} = 2\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0 = r\mathbf{i}$.

Матричные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в общем случае, когда билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля (5.4) не выполнется, имеют вид [46]

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_0'' \\ -u_3'' \\ u_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1 - 3r & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 + 3r & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 + 3r \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 - 3r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_0' \\ -u_3' \\ u_2' \end{pmatrix} -$$
$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} h + \omega_1^2 r^2 & -r^2\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ r^2\varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h + \omega_1^2 r^2 & r^2\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -r^2\varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ -u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$h' = 2\left(q_0u_0' + q_1u_1' + q_2u_2' + q_3u_3'\right), \quad t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{5.5}$$
$$q_0 = u_0p_1 - u_3p_2 + u_2p_3, \quad q_1 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3$$
$$q_2 = -u_2p_1 + u_1p_2 + u_0p_3, \quad q_3 = -u_3p_1 - u_0p_2 + u_1p_3$$
$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2),$$

где ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), верхний штрих, по-прежнему, — символ дифференцирования по независимой переменной τ.

Кватернионные регулярные уравнения этой задачи в общем случае в переменных Кустаанхеймо—Штифеля имеют вид [47] (в этой работе эти уравнения записаны в другой кватернионной форме, соответствующей приведенной выше матричной записи этих уравнений (5.5), когда кватернионная переменная $\boldsymbol{\alpha}$, введенная в этой работе и соответствующая вектор-столбцу $(u_1, u_0, -u_3, u_2)$, равна $\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}$):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{3}{2}r\omega_1\mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(r^2\varepsilon_1 + \omega_1\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{u}}\right) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} - \frac{1}{2}\left(h + r^2\omega_1^2\right)\mathbf{u} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \mathbf{p}_\xi \cdot \left[\frac{d}{d\tau}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u})\right], \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad \frac{d\omega_1}{d\tau} = r\varepsilon_1 \tag{5.6}$$

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\mathbf{p}_\xi = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \quad p_k = p_k\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3\right)$$

В этих уравнениях $\mathbf{u}$, h, t — неизвестные функции независимой переменной τ, $\bar{\mathbf{u}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону $\mathbf{u}$, проекции p_k вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат являются заданными функциями времени t, декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс второго тела на оси опорной системы координат ξ, которые могут быть представлены как функции времени t и переменных u_j, u'_j; ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на ось η_1, заданные как функции переменных t и u_j, u'_j; центральная точка означает скалярное произведение.

Для нахождения проекций радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ центра масс изучаемого тела на оси инерциальной системы координат (координат ξ_k и их производных $\dot{\xi}_k$ по времени t) через переменные u_j и u'_j необходимо воспользоваться кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k} = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}'$$

Таким образом, нами были получены более общие, чем в случае Кустаанхеймо—Штифеля, регулярные матричные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения сложнее уравнений Кустаанхеймо—Штифеля. Они, в первую очередь, имеют теоретический интерес, демонстрируя тот факт, что регуляризация достигается и в том случае, когда $\omega_1 \neq 0$, т.е. когда не выполняется билинейное соотношение, являющееся одним из основных в теории регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля. Возможно, эти уравнения будет целесообразно использовать для высокоточных численных расчетов, поскольку при их интегрировании не требуется выполнения билинейного соотношения (5.4), которое неизбежно будет нарушаться в процессе численного интегрирования из-за методических и вычислительных погрешностей.

Полагая $\omega_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, из уравнений (5.6) получаем кватернионную форму регулярных уравнений Кустаанхеймо—Штифеля:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1\mathbf{i} + \mathbf{q}_2\mathbf{j} + \mathbf{q}_3\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

Здесь scal(•) — скалярная часть кватернионого произведения $\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}$, $\mathbf{p}_\xi$ — кватернион действующих возмущений.

Регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Автором статьи также получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и ИСЗ в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля [51] (см. также [27, 55]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных матричных и кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру для движения второго тела (космического аппарата (спутника)) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная, но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [51, 59].

Введение модифицированных переменных основано на выше приведенных геометрической и кинематической интерпретациях регуляризующего преобразования Кустаанхеймо—Штифеля и их билинейного соотношения. В случае Кустаанхеймо—Штифеля ось η_1 ранее введенной нами вращающейся системы координат η направляется по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс второго тела (спутника). Координаты ξ_k тела в инерциальной системе координат ξ связаны с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j скалярными соотношениями

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)$$

и кватернионным соотношением

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}$$

Нами предложено направить по радиус-вектору $\mathbf{r}$ не ось η_1 системы координат η, а ось η_3. В этом случае все вышеприведенные кватернионные уравнения задачи двух тел сохраняют свой вид, лишь вместо орта $\mathbf{i}$ необходимо взять орт $\mathbf{k}$ (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые переменные u_{jm}, определяемые через параметры Эйлера λ_{jm}, как и в случае Кустаанхеймо—Штифеля, формулами

$$u_{0m} = r^{1/2}\lambda_{0m}, \quad u_{im} = r^{1/2}\lambda_{im}; \quad i = 1, 2, 3,$$

будут связаны с координатами ξ_k соотношениями

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 2r(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) = 2(u_{1m}u_{3m} - u_{0m}u_{2m}) \\
\xi_2 &= 2r(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) = 2(u_{2m}u_{3m} + u_{0m}u_{1m}) \\
\xi_3 &= r\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) = u_{0m}^2 - u_{1m}^2 - u_{2m}^2 + u_{3m}^2,
\end{aligned}$$

которые отличны от выше приведенных соотношений и в кватернионной записи имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}_m,$$

где новая кватернионная переменная $\mathbf{u}_m = u_{0m} + u_{1m}\mathbf{i} + u_{2m}\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ имеет смысл, отличный от кватернионной переменной $\mathbf{u}$, использованной нами в случае Кустаанхеймо—Штифеля.

Расстояние r, по-прежнему, находится через новые переменные u_{jm} по формуле

$$r = \|\mathbf{u}_m\|^2 = \mathbf{u}_m \circ \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{u}_m = u_{0m}^2 + u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + u_3^2,$$

а отображение $\mathbf{v}_\xi$ вектора скорости $\mathbf{v}$ на инерциальный базис — по другой формуле

$$\mathbf{v}_\xi = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_\xi/dt = 2\bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u}_m/dt = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u}_m/d\tau$$

Модифицированные переменные u_{jm} связаны с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j соотношениями

$$u_{0m} = (1/2)(u_0 + u_1 + u_2 + u_3), \quad u_{1m} = -(1/2)(u_0 - u_1 - u_2 + u_3)$$
$$u_{0m} = -(1/2)(u_0 + u_1 - u_2 - u_3), \quad u_{1m} = -(1/2)(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения принимают вид ортогонального преобразования

$$\mathbf{u}_m = \pi \circ \mathbf{u}, \quad \pi = (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

Билинейное соотношение для модифицированных переменных u_j имеет другой вид:

$$u_{1m}u'_{0m} - u_{0m}u'_{1m} + u_{3m}u'_{2m} - u_{2m}u'_{3m} = 0$$

Полученные [51, 59] кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных u_{jm} обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j [51, 59], но имеют более простую и симметричную структуру. Это обусловлено тем, что выражения переменной $\gamma = \sin\varphi$ (φ – геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные u_{jm} могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах

$$\gamma = 1 - 2r^{-1}\left(u_{1m}^2 + u_{2m}^2\right) = 2r^{-1}\left(u_{0m}^2 + u_{3m}^2\right) - 1, \quad r = u_{0m}^2 + u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + u_{3m}^2,$$

в сравнении с ее представлением

$$\gamma = 2r^{-1}(u_1u_3 + u_0u_2), \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уравнения движения спутника.

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля для аналитического исследования движения спутника показано на примере движения спутника в гравитационном поле Земли [59], в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. Найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Автором статьи были также предложены [54, 55] регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в кватернионных оскулирующих элементах (т.е. в медленно изменяющихся переменных). Эти уравнения являются кватернионным аналогом уравнений пространственной задачи двух тел в регулярных элементах, полученных Штифелем и Шейфеле [19]. Отметим следующие достоинства этих уравнений: во-первых, они регулярны, во-вторых, их правые части в случае возмущенного эллиптического движения – равномерно и медленно изменяющиеся функции, в случае же невозмущенного кеплеровского движения интегрирование уравнений производится без методических ошибок. К недостаткам этих уравнений относится то, что область их применения ограничена движениями эллиптического типа (когда $h < 0$).

В работе [47] показано, что регуляризация дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел достигается и в том случае, когда смысл преобразований исходных уравнений этой задачи остается прежним, но переменные Кустаанхеймо–Штифеля не используются: уравнения записываются во вращающейся системе координат η, ось η_1 которой направляется вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела, для описания ориентации этой системы координат используются параметры Эйлера λ_j (кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$), в качестве дополнительной переменной используется кеплеровская энергия h, а в качестве независимой переменной новое “время” τ, связанное с реальным временем t дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$. Полученные в этом случае регулярные дифференциальные уравнения первого порядка не являются линейными в случае кеплеровского движения, но имеют простой и наглядный вид.

В развитие этого подхода получены [55] регулярные кватернионные уравнения задачи двух тел, в которых используются параметры Эйлера, а не переменные Кустаанхеймо–Штифеля, в другой, более простой и наглядной форме.

В работах [49, 51] предложен способ однозначного нахождения значений параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля по заданным в рассматриваемый момент времени значениям декартовых координат и их первых производных (проекциям вектора скорости). Этот способ имеет в сравнении со способом неоднозначного нахождения переменных Кустаанхеймо–Штифеля, описанном Штифелем и Шейфеле в [19], существенные преимущества.

6. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения. Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс второго (изучаемого) тела, описывающих движение этого тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно, т.е. рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения центра масс изучаемого тела. В недавней работе автора [58] предложено кватернионное решение задачи регуляризации уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела в системе координат, вращающейся относительно инерциальной системы координат по произвольно заданному закону, т.е. предложена регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела.

В курсах теоретической механики для сложения движений с использованием векторного способа описания движения и для получения векторной формы уравнений относительного движения материальной точки используется векторная операция сложения переносного и относительного движений (в виде суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения), т.е. используется аддитивная форма сложения движений. Для сложения движений с использованием кватернионного способа описания движения нами используется кватернионная операция сложения движений в виде кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой – относительное движение, т.е. используется мультипликативная форма сложения движений. Это кардинальное отличие векторного и кватернионного способов описания движения приводит к существенным отличиям в способах получения векторных и кватернионных дифференциальных уравнений динамики относительного движения материальной точки.

Векторный способ получения векторного дифференциального уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в векторное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо вектора абсолютного ускорения векторной суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений (в соответствии с теоремой о сложении ускорений), полученной в результате последовательного дифференцирования векторной суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения (с использованием понятий абсолютной и локальной производных от вектора), и последующего введения сил инерции.

Наш способ получения кватернионного дифференциального уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в полученное нами кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо кватерниона, характеризующего положение точки в инерциальной системе координат, кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой — относительное движение, и последующий учет кватернионного кинематического уравнения переносного вращения.

Будем рассматривать движение второго (изучаемого) тела относительно системы координат ζ, вращающейся относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_e$ ($\boldsymbol{\omega}_e$ — переносная угловая скорость). Эта система координат характеризует собой переносное движение. Начало системы координат ζ совместим с началом системы координат ξ, движущейся относительно инерциальной системы координат поступательно, а ее ориентацию в инерциальной системе координат (и в системе координат ξ) будем задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$. Ориентацию ранее введенной системы координат η, ось η_1 которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс изучаемого тела, во вращающейся системе координат ζ будем задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\nu} = \nu_0 + \nu_1\mathbf{i} + \nu_2\mathbf{j} + \nu_3\mathbf{k}$.

Нормы кватернионов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ равны единице, а их компоненты μ_j и ν_j ($j = 0, 1, 2, 3$) являются параметрами Эйлера (Родрига—Гамильтона), характеризующими ориентации систем координат ζ и η в системах координат ξ и ζ соответственно. Ориентацию системы координат η в инерциальной системе координат будем, по-прежнему, задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$ (этот кватернион характеризует собой абсолютное движение в инерциальной системе координат).

Будем считать, что все введенные кватернионы являются собственными [9, 10]: каждый из них определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим кватернионом, системе координат. Тогда в соответствии с кватернионной формулой сложения двух конечных поворотов [9—11] собственные кватернионы $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ будут связаны соотношением

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\nu} \tag{6.1}$$

Эта формула является кватернонной формулой сложения переносного и относительного вращений.

Введем кватернионы

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = r^{1/2}\left(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}\right) = r^{1/2}\overline{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = r^{-1/2}\overline{\mathbf{u}} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{s} = s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = r^{1/2}\left(\nu_0 - \nu_1\mathbf{i} - \nu_2\mathbf{j} - \nu_3\mathbf{k}\right) = r^{1/2}\overline{\boldsymbol{\nu}}, \quad \boldsymbol{\nu} = r^{-1/2}\overline{\mathbf{s}} \tag{6.3}$$

Компоненты u_j и s_j ($j = 0, 1, 2, 3$) кватернионов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$ связаны с параметрами Эйлера λ_j и ν_j и расстоянием r от центра масс второго тела до центра притяжения (центра масс первого (центрального) тела) соотношениями

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2}\lambda_k, \quad k = 1,2,3; \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = r$$

$$s_0 = r^{1/2}\nu_0, \quad s_k = -r^{1/2}\nu_k, \quad k = 1,2,3; \quad s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = r$$

Эти компоненты являются переменными Кустаанхеймо—Штифеля, связанными с декартовыми координатами ξ_k и ζ_k центра масс изучаемого тела в системе координат ξ и во вращающейся системе координат ζ соотношениями

$$\begin{aligned} &\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ &\varsigma_1 = s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, \quad \varsigma_2 = 2(s_1s_2 - s_0s_3), \quad \varsigma_3 = 2(s_1s_3 + s_0s_2) \end{aligned} \tag{6.4}$$

В кватернионной записи соотношения (6.4) имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}_\varsigma = \varsigma_1\mathbf{i} + \varsigma_2\mathbf{j} + \varsigma_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} \tag{6.5}$$

Из соотношений (6.1)–(6.3) следует соотношение

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}},$$

которым устанавливается связь основных кватернионных (четырехмерных) переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$, характеризующих абсолютное и относительное движения точки (кватернион $\boldsymbol{\mu}$ характеризует переносное вращение).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения (движения изучаемого тела относительно системы координат ζ, вращающейся в инерциальной системе координат ξ по произвольно заданному закону $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t)$) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют (во времени τ) вид уравнений [58]

$$\mathbf{s}'' + \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}'' \circ \boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{s}' \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}' \circ \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}h\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \tag{6.6}$$

$$h' = 2\,\mathrm{scal}\left(\left(\bar{\mathbf{s}}' + \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \boldsymbol{\mu}' \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right) \tag{6.7}$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{6.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_\varsigma, \quad \mathbf{p}_\varsigma = \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\mu} \\ &\mathbf{p}_\varsigma = p_{\varsigma 1}\mathbf{i} + p_{\varsigma 2}\mathbf{j} + p_{\varsigma 3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_\xi = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

$\mathbf{p}_\zeta$ и $\mathbf{p}_\xi$ – отображения вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся ζ и инерциальной (или ξ) систем координат, $p_{\zeta k}$ и p_k – проекции вектора $\mathbf{p}$ на оси систем координат ζ и ξ соответственно.

Производные в новом времени τ от кватерниона $\boldsymbol{\mu}$, характеризующие угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения, имеют вид

$$\boldsymbol{\mu}' = r\left(d\boldsymbol{\mu}(t)/dt\right), \quad \boldsymbol{\mu}'' = r'\left(d\boldsymbol{\mu}(t)/dt\right) + r^2\left(d^2\boldsymbol{\mu}(t)/dt^2\right)$$

В уравнениях (6.6)–(6.9) в качестве переменных выступают кватернион $\mathbf{s}$, компонентами которого являются регулярные переменные s_j, кеплеровская энергия h и время t. Кватернион $\mathbf{s}$ характеризует относительное движение центра масс изучаемого тела. Эти уравнения, также как и уравнения (4.5)–(4.7) или (5.7) возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения. Они сложнее уравнений для абсолютного движения, но, в отличие от них, позволяют непосредственно изучать движение второго тела относительно не инерциальной, а выбранной вращающейся системы координат, связанной, например, с той или иной планетой.

Для нахождения декартовых координат ζ_k изучаемого тела во вращающейся системе координат ζ и проекций $v_{rk} = d\zeta_k/dt$ его вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на оси этой системы координат служат второе соотношение (6.5) и соотношения

$$\mathbf{v}_{rz} = v_{r1}\mathbf{i} + v_{r2}\mathbf{j} + v_{r3}\mathbf{k} = d\mathbf{r}_z/dt = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{s}/dt) + (d\bar{\mathbf{s}}/dt) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} = r^{-1}\left(\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}' + \bar{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}\right),$$

где $\mathbf{v}_{r\zeta}$ – отображение вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на вращающийся базис ζ.

Используя кватернионное кинематическое уравнение переносного вращения

$$2\boldsymbol{\mu}' = r\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_{ez},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{ez}$ – отображение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ вращающейся системы координат ζ на ее же координатные оси, запишем уравнения (6.6)–(6.8) относительного движения в другом виде [58]:

$$\mathbf{s}'' - r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{ez} - \frac{1}{2}\mathbf{s} \circ \left(r'\boldsymbol{\omega}_{ez} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ez}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_e^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \tag{6.10}$$

$$h' = \operatorname{scal}\left(\left(2\overline{\mathbf{s}}' + r\boldsymbol{\omega}_{ez} \circ \overline{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad t' = r = \mathbf{s} \circ \overline{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{6.11}$$

Здесь $r' = 2\left(s_0 s_0' + s_1 s_1' + s_2 s_2' + s_3 s_3'\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{e\varsigma} = d\boldsymbol{\omega}_{e\varsigma}/dt$ – отображение вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ вращающейся системы координат ζ на ее же координатные оси, $\omega_e = |\boldsymbol{\omega}_\mathrm{e}|$.

В основном регулярном кватернионном дифференциальном уравнении (6.10) первое слагаемое $\mathbf{s}''$ в левой части уравнения характеризует относительное ускорение центра масс изучаемого тела во вращающейся системе координат ζ, сумма слагаемых

$$-\frac{1}{2}\mathbf{s} \circ \left(r'\boldsymbol{\omega}_{ez} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ez}\right) - \frac{1}{4}\omega_e^2 r^2 \mathbf{s},$$

характеризует переносное ускорение, а слагаемое $-r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{ez}$ характеризует ускорение Кориолиса (напомним, что движение рассматривается в новом времени τ, определяемом дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$).

Из уравнений (6.10), (6.11) следуют регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого (второго) тела относительно Земли, принимаемой за центральное тело, в переменных Кустаанхеймо–Штифеля s_j, когда кватернион $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r\mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\Omega_E r'\mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega_E^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \tag{6.12}$$

$$h' = \operatorname{scal}\left(\left(2\overline{\mathbf{s}}' + \Omega_E r\mathbf{k} \circ \overline{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \overline{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{6.13}$$

Здесь

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_\varsigma, \quad \mathbf{p}_\varsigma = (\mu_0 - \mu_3\mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_\xi \circ (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k}); \quad r' = 2\left(s_0 s_0' + s_1 s_1' + s_2 s_2' + s_3 s_3'\right)$$

$$\mu_0 = \cos\left((\chi_0 + \Omega_E t)/2\right), \quad \mu_3 = \sin\left((\chi_0 + \Omega_E t)/2\right),$$

$\chi_0 = \mathrm{const}$ – значение угла χ разворота системы координат ζ, связанной в этом случае с Землей, относительно системы координат ξ вокруг оси ξ_3, направленной вдоль оси вращения Земли, в начальный момент времени, $\boldsymbol{\Omega}_E = \omega_e = \mathrm{const}$ – угловая скорость суточного вращения Земли.

Замечание. Уравнение (4.7) работы [58] для кеплеровской энергии h, приведенное в этой работе, содержит ошибку: из правой части этого уравнения нужно убрать выражение, заключенное в квадратных скобках (это уравнение должно иметь вид уравнения (6.13) нашей статьи).

Заключение. Кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным современным методам и моделям аналитической механики. Они широко используются для решения многих актуальных задач механики, навигации и управления движением в силу их достоинств. Кватернионная регуляризация уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики) является одной из наиболее эффективных регуляризаций особенностей классических ньютоновских уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами.

Кватернионный метод регуляризации, основанный на использовании для описания орбитального движения параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем.

Выше были изложены кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела. Кватернионные и бикватернионные модели кинематики, в отличие от классических моделей, в которых для описания движения используются углы Эйлера–Крылова и их дуальные аналоги, не имеют особенностей типа деления на ноль и не содержат тригонометрических функций, что повышают эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, навигации и управления движением. Рассмотрена проблема регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера, переменных Кустаанхеймо–Штифеля и их модификаций, кватернионов Гамильтона. Приведены основные регуляризующие соотношения и регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные Кустаанхеймо, Штифелем и Шейфеле, а также кватернионные регуляризующие соотношения и регулярные кватернионные уравнения этой задачи, как для абсолютного, так и относительного движения изучаемого тела, предложенные автором статьи. Приведены предложенные им геометрические и кинематические интерпретации регуляризующих преобразований классических уравнений в декартовых координатах, более общие (в сравнении с широко известными уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, построенные с использованием четырехмерных кватернионных матриц (первый вариант уравнений) или кватернионов Гамильтона (второй вариант уравнений).

Также приведены полученные авторами [69] и другими исследователями (Штифель, Шейфеле, Бордовицына, Шарковский, Авдюшев и Фукушима) результаты численного исследования точности численного интегрирования регулярных кватернионных и других форм регуляризованных уравнений небесной механики и астродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах, показывающие, что точность численного интегрирования уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (в частности, уравнений задачи о движении искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений. Это говорит о целесообразности использования для прогноза и коррекции орбитального движения небесных и космических тел регулярных кватернионных моделей орбитального движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, построенных в рамках уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00218.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // Novi Comm. Acad. Sci. Imper. Petrop. 1770. V. 15. P. 75–106.
2. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espase, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // J. Math. Pureset Appl. 1840. V. 5. P. 380–440.
3. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1937. 500 с.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
5. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.

6. *Челноков Ю.Н.* Об одном винтовом методе описания движения твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 129–138.
7. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
8. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges&Smith, 1853. 382 p.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
11. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
12. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. № 4. P. 381–395.
13. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: 1895. 215 с.
14. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
15. *Котельников А.П.* Теория векторов и комплексные числа // в сб.: Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1950. С. 7–47.
16. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
17. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. New York: Dover, 1961.
18. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. New York: Scribners, 1901.
19. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
21. *Ickes B.F.* A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J. 1970. № 8. P. 13–17.
22. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 122–129.
23. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
24. *Челноков Ю.Н.* Об устойчивости решений бикватернионного кинематического уравнения винтового движения твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1983. Вып. 13. С. 103–109.
25. *Челноков Ю.Н.* Исследование некоторых алгоритмических задач определения ориентации объекта бесплатформенными инерциальными навигационными системами. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук, Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина), Ленинград: 1974, 20 с.
26. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твердого тела и материальных систем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-матем. наук, Институт проблем механики АН СССР, Москва: 1987. 36 с.
27. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
28. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
29. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. 1983. V. 29. P. 45–50.
30. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
31. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
32. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 3–8.
33. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
34. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Canad. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
35. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A: Math.&General. 1995. V. 28. P. 193–198.

36. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212.
37. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Mech.&Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
38. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2009. V. 400. P. 228–231. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441
39. *Zhao L.* Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // R&C Dyn. 2015. V. 20. № 1. P. 19–36. https://doi.org/10.1134/S1560354715010025
40. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454. https://doi.org/10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
41. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2017. V. 127. P. 343–368.
42. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342.
43. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2018. V. 130. Art. No. 68. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4
44. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. No. 9. https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3
45. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. An interpretation through symmetry // J. Geom. Mech. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
46. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
47. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
48. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: Деп. в ВИНИТИ 13.12.85. № 218628-В, 1985. 36 с.
49. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: Деп. в ВИНИТИ 13.22.85. № 8629-В, 1985. 18 с.
50. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
51. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космич. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
52. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
53. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
54. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
55. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. https://doi.org/10.7868/S0023420613050026
56. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. https://doi.org/10.7868/S0023420614030029
57. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. https://doi.org/10.7868/S0023420615050040

58. *Челноков Ю.Н.* Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733. https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9
59. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космич. исслед. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. https://doi.org/10.1134/S002342061902002X
60. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9
61. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
62. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
63. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. № 5. Art. No. 2496. https://doi.org/10.1086/429546
64. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. № 6. Art. No. 2815.
65. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150. https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3
66. *Baù G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2015. V. 454. P. 2890–2908.
67. *Amato D., Bombardelli C., Baù G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. No. 21. https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1
68. *Baù G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2020. V. 132. Art. No. 10. https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y
69. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
70. *Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Щекутьев А.Ф.* Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных производных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
71. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
72. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
73. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
74. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. https://doi.org/10.1007/BF02418577
75. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math. 1956. № 2. P. 411–417.
76. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7. https://doi.org/10.1086/518165
77. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
78. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
79. *Musen P.* On Stromgren's method of special perturbations // J. Astron. Sci. 1961. V. 8. P. 48–51.

80. *Musen P.* // NASA TN D-2301. 1964. P. 24.
81. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 637–665.
82. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois crops // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105–179.
83. *Bohlin K.* Note sur le probleme des deux corps et sur une integration nouvelle dans le problem des trois corps // Bull. Astron. 1911. V. 28. P. 113–119.
84. *Burdet C.A.* Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem // Zeitschrift fur angewandte Math. und Phys. 1968. V. 19. P. 345–368.
85. *Burdet C.A.* Le mouvement Keplerien et les oscillateurs harmoniques // J. fur die reine und angewandte Math. 1969. V. 238. P. 71–84.
86. *Study E.* Von der Bewegungen und Umlegungen // Math. Annal. 1891. V. 39. P. 441–566.

Quaternion and Biquaternion Methods and Regular Models of Analytical Mechanics (Review)

Yu.N. Chelnokov[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

The work is of a survey analytical nature. The first part of the work presents quaternion and biquaternion methods for describing motion, models of the theory of finite displacements and regular kinematics of a rigid body based on the use of four-dimensional real and dual Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters. These models, in contrast to the classical models of kinematics in Euler–Krylov angles and their dual counterparts, do not have division-by-zero features and do not contain trigonometric functions, which increases the efficiency of analytical research and numerical solution of problems in mechanics, inertial navigation, and motion control.

The problem of regularization of differential equations of the perturbed spatial two-body problem, which underlies celestial mechanics and space flight mechanics (astrodynamics), is discussed using the Euler parameters, four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables, and Hamilton quaternions: the problem of eliminating singularities (division by zero), which are generated by the Newtonian gravitational forces acting on a celestial or cosmic body and which complicate the analytical and numerical study of the motion of a body near gravitating bodies or its motion along highly elongated orbits. The history of the regularization problem and the regular Kustaanheim–Stiefel equations, which have found wide application in celestial mechanics and astrodynamics, are presented. We present the quaternion methods of regularization, which have a number of advantages over Kustaanheimo–Stiefel matrix regularization, and various regular quaternion equations of the perturbed spatial two-body problem (for both absolute and relative motion). The results of a comparative study of the accuracy of numerical integration of various forms of regularized equations of celestial mechanics and astrodynamics in Kustaanheimo–Stiefel variables and Newtonian equations in Cartesian coordinates are presented, showing that the accuracy of numerical integration of regularized equations in Kustaanheimo–Stiefel variables is much higher (by several orders of magnitude) than the accuracy of numerical integration Newtonian equations.

Keywords: analytical mechanics, motion geometry, regular kinematics, space flight mechanics (astrodynamics), perturbed spatial problem of two bodies, regularization of singularities generated by gravitational forces, equations of orbital motion, Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters, Kustaanheimo–Stiefel variables, quaternions

REFERENCES

1. *Euler L.* Problema Algebraicum ob Affectiones Prorsus Singulares Memorabile // Novi Comm. Acad. Sci. Imper. Petrop., 1770, vol. 15, pp. 75–106.
2. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espase, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // J. des Math. Pureset Appl., 1840, vol. 5, pp. 380–440.

3. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1927.
4. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 1961. 824 p.
5. *Chelnokov Yu.N.* On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion // Appl. Math.&Mech., 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19–23.
6. *Chelnokov Yu.N.* On one helical method for describing the motion of a rigid body // in: Sat. Sci. Meth. Art. on Theoret. Mech. Moscow: Higher School, 1981. Iss. 11. pp. 129–138.
7. *Chelnokov Yu.N.* One form of the equations of Inertial navigation // Mech. Solids., 1981, vol. 16, no. 5, pp. 16–23.
8. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853. 382 p.
9. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
10. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Rigid Body Mechanics and Their Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow: Fizmatlit, 2006. 511 p.
11. *Zhuravlev V.F.* Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008. 304 p.
12. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc., 1873, no. 4, pp. 381–395.
13. *Kotelnikov A.P.* Screw Calculus and Some of Its Applications to Geometry and Mechanics. Kazan: 1895. 215 p.
14. *Kotelnikov A.P.* Screws and complex numbers // Izv. Phys.-Math. Society at Kazan Univ., 1896, Ser. 2, no. 6, pp. 23–33.
15. *Kotelnikov A.P.* Theory of vectors and complex numbers // in: Some Applications of Lobachevsky's Ideas in Mechanics and Physics. Moscow: Gostekhizdat, 1950. pp. 7–47.
16. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems. Moscow: Nauka, 1992. 280 p.
17. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. N.Y.: Dover, 1961.
18. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. N.Y.: Scribners, 1901.
19. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
20. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill. 1960.
21. *Ickes B.F.* A New method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J., 1970, no. 8, pp. 13–17.
22. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Application of quaternion matrices in the theory of finite rotation of a rigid body // in: Sb. Sci.&Meth. Art. on Theoret. Mech. Moscow: Higher School, 1981. Iss. 11, pp. 122–129.
23. *Dimentberg F.M.* Theory of Screws and Its Applications. Moscow: Nauka, 1978. 328 p.
24. *Chelnokov Yu.N.* On the stability of solutions to the biquaternion kinematic equation of the helical motion of a rigid body // in: Sb. Sci.&Meth., Art. on Theoret. Mech. Moscow: Higher School, 1983. Iss. 13, pp. 103–109.
25. *Chelnokov Yu.N.* Study of some algorithmic problems of determining the orientation of an object by strapdown inertial navigation systems. Abstract of the dissertation for the degree of Cand. tech. Sciences. Leningrad Electrotechnical Institute named after V.I. Ulyanov (Lenin). Leningrad: 1974. 20 p.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion methods in problems of rigid body mechanics and material systems. Abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR. Moscow: 1987. 36 p.
27. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Models and Methods of Dynamics, Navigation and Motion Control. Moscow: Fizmatlit, 2011. 560 p.
28. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech., 1978, vol. 17, pp. 395–403.
29. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech., 1983, vol. 29, pp. 45–50.
30. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech., 1988, vol. 41, pp. 359–370.
31. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1991, vol. 50, pp. 109–124.
32. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // Mech. Solids, 1990, no. 2, pp. 3–8.

33. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1994, vol. 58, pp. 151–201.
34. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Canad. J. Phys., 1994, vol. 72, pp. 141–146.
35. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A: Math.&General, 1995, vol. 28, pp. 193–198.
36. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech.&Dyn. Astr., 2006, vol. 95, pp. 201–212.
37. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech.&Dyn. Astr., 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
38. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2009, vol. 400, pp. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441
39. *Zhao L.* Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // R.&C. Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
40. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2016, vol. 459, no. 3, pp. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
41. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2017 vol. 127 pp. 343–368.
42. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2017, vol. 128, pp. 323–342.
43. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2018, vol. 130, art. no. 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
44. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2019, vol. 131, art. no. 9. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
45. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. an interpretation through symmetry // J. Geom. Mech., 2018, vol. 10, no. 3, pp. 359–372.
46. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
47. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
48. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Pt. 1. General Theory. Applications to Problem of Regularization and to Problem of Satellite Motion. Moscow: VINITI, 1985. no. 8628-B.
49. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Pt. 2. Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions. Moscow: VINITI, 1985. no. 8629-B.
50. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Res., 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
51. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Res., 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409–418.
52. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 1, pp. 16–25.
53. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 2, pp. 1–12.
54. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material points in a central field with application of quaternions // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2007, vol. 46, no. 5, pp. 688–713.
55. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Res., 2013, vol. 51, no. 5, pp. 353–364. DOI: 10.1134/S001095251305002X
56. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // Cosmic Res., 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361. DOI: 10.1134/S0010952514030022
57. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // Cosmic Res., 2015, vol. 53, no. 5, pp. 394–409.
58. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S0025654419030075

59. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial earth satellite // Cosmic Res., 2019, vol. 57, no. 2, pp. 101–114. DOI: 10.1134/S0010952519020023
60. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech., 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
61. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p.
62. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of Motion of Artificial Satellites of the Earth. Analytical and Numerical Methods. Tomsk: Tomsk Univ., 2007. 178 p.
63. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization // The Astronomical J., 2005, vol. 129, no. 5. 2496. DOI: 10.1086/429546
64. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // The Astronomical J., 2007, vol. 133, no. 6. 2815.
65. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2007. vol. 97, pp. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3
66. *Baù G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2015, vol. 454, pp. 2890–2908.
67. *Amato D., Bombardelli C., Baù G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2019, vol. 131, no. 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1
68. *Baù G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2020, vol. 132, no. 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y
69. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst., 2021, 9470806.
70. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Shchekutiev A.F.* Forecast and correction of spacecraft orbital motion using regular quaternion equations and their solutions in Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // PMM, 2023, vol. 87, iss. 2, pp. 124–156.
71. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the eguations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639. DOI: 10.3103/S0025654417060036
72. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop., 1765, vol. 11, pp. 144–151.
73. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl., 1904, vol. 9, pp. 1–32.
74. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math., 1920, vol. 42, pp. 99–144. DOI:10.1007/BF02418577
75. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math., 1956, no. 2, pp. 411–417.
76. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku, 1964, vol. 73, pp. 3–7. DOI: 10.1086/518165
77. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math., 1965, vol. 218, pp. 204–219.
78. *Brumberg V.A.* Analytical Algorithms of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1980. 208 p.
79. *Musen P.* On Stromgren's method of special perturbations // J. Astron. Sci., 1961, vol. 8, pp. 48–51.
80. *Musen P.* // NASA TN D-2301, 1964, pp. 24.
81. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann., 1931, vol. 104, pp. 637–665.
82. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois crops // Acta Math., 1912, vol. 36, pp. 105–179.
83. *Bohlin K.* Note sur le probleme des deux corps et sur une integration nouvelle dans le problem des trois corps // Bull. Astron., 1911, vol. 28, pp. 113–119.
84. *Burdet C.A.* Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem // Zeitschrift fur angewandte Math. und Phys., 1968, vol. 19, pp. 345–368.
85. *Burdet C.A.* Le mouvement Keplerien et les oscillateurs harmoniques // J. fur die reine und angewandte Math., 1969, vol. 238, pp. 71–84.
86. *Study E.* Von der Bewegungen und Umlegungen // Math. Annal., 1891, vol. 39, pp. 441–566.