ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 3, с. 489–498

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО ПО МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА СТЕРЖНЯ

© 2023 г. В. И. Корзюк[1,2,*], Я. В. Рудько[1,], В. В. Колячко[2,***]**

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
**e-mail: korzyuk@bsu.by*
***e-mail: janycz@yahoo.com by*
****e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru*

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.
После доработки 20.04.2023 г.
Принята к публикации 25.04.2023 г.

В настоящей работе исследуется корректность по Адамару задачи Коши для одномерной гиперболической системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня постоянного поперечного сечения. Также обсуждаются некоторые свойства системы и ее решений: закон сохранения модифицированной “энергии”, конечная скорость распространения волн, дисперсия и диссипация решений.

Ключевые слова: продольные колебания, модель Максвелла, задача Коши, корректно поставленная задача

DOI: 10.31857/S0032823523030086, **EDN:** ZTPLMI

1. Введение. В строительстве различных сооружений очень часто приходится иметь дело с колебаниями сплошных сред. Поэтому изучение математических моделей таких явлений представляется целесообразным. В данной работе мы исследуем одну из таких моделей, представляющую систему двух дифференциальных уравнений с частными производными, исследуем задачу Коши для нее и обсуждаем качественные свойства решений.

В разд. 2, исходя из соображений механики сплошных сред, выписываются уравнения для описания состояния стержня. В разд. 3 формулируется задача Коши для определения свободных и/или вынужденных колебаний стержня. В разд. 4 система записывается в матричной форме, исследуется гиперболичность системы и непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных. В разд. 5 отыскиваются решения в виде плоских волн и экспоненциальных волн, устанавливаются дисперсионные и диссипативные свойства. В разд. 6 устанавливается закон сохранения модифицированной “энергии” и единственность решения задачи Коши. В разд. 7 доказывается, что решения обладают конечной скоростью распространения. В разд. 8 и 9 в явном аналитическом виде отыскивается решение задачи Коши о свободных и вынужденных колебаниях стержня соответственно. В разд. 10 подводится заключение данной работы.

2. Физическая модель. Рассмотрим в одномерном случае вязкоупругий по модели Максвелла стержень постоянного поперечного сечения, свойства материала которого не зависят от времени и координаты. Для него верно уравнение движения [1]

$$\rho\partial_t^2 u = \partial_x\sigma + f, \tag{2.1}$$

где f – внешняя объемная сила, $\rho > 0$ – плотность материала стержня, u – дилатации (смещения) стержня, σ – напряжения стержня. А связь между деформацией ε и напряжением σ подчиняется закону [2, 3]

$$\sigma + \beta\partial_t\sigma = \gamma\partial_t\varepsilon, \tag{2.2}$$

где $\beta > 0$ – время релаксации, $\gamma\beta^{-1} > 0$ – мгновенный модуль упругости. Подставив определения деформации $\varepsilon = \partial_x u$ в уравнение (2.2), получим

$$\sigma + \beta\partial_t\sigma = \gamma\partial_t\partial_x u \tag{2.3}$$

Из связи между деформацией ε и напряжением σ стержня следует интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta\sigma(t)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) мы пренебрегаем начальной деформацией в силу отдаления начального момента времени в минус бесконечность [3].

3. Постановка задачи Коши. Таким образом, для определения свободных колебаний стержня, требуется найти решение системы уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x), \quad \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(t,x) = \beta\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x); \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

при начальных условиях

$$w(0,x) = \mu(x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x); \quad x\in\mathbb{R} \tag{3.2}$$

в предположении достаточной гладкости функций μ, φ, ψ. В уравнении (3.1) для удобства буквой w обозначено напряжения стержня.

Если же требуется определить колебания стержня, происходящие под действием внешней силы, то вместо уравнений (3.1) надо взять уравнения

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) + f(t,x), \quad \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(t,x) = \beta\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x); \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R} \tag{3.3}$$

4. Матричное представление системы уравнений. Введем в систему уравнений (3.1) функцию $v := \partial_t u$. Тогда имеет место матричное представление

$$\mathbf{u}_t = A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \\ \partial_t w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_x = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \\ \partial_x w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^{-1} \end{pmatrix}$$

Заметим, что собственными значениями матрицы – A являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}$ и $\lambda_3 = \sqrt{\gamma\beta^{-1}\rho^{-1}}$. При условии $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1} > 0$ это будут три различных действительных числа. Значит, что если $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1} > 0$, то система (3.1) является гиперболической по [4], и строго гиперболической по классификации [5].

Применим к (4.1) преобразование Фурье по переменной x в виде

$$\mathcal{F}[\,\bullet\,](t,\omega) = \hat{\bullet}\,(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bullet\,(t,x)\exp(-i\omega x)dx; \quad (t,\omega)\in[0,\infty)\times\mathbb{R},$$

и запишем Фурье-образ системы (4.1)

$$\hat{\mathbf{u}}_t(t,\omega) = Q(\omega)\hat{\mathbf{u}}(t,\omega), \tag{4.2}$$

где разрешающая матрица $Q(\omega) = i\omega A + B$. Рассмотрим матрицу

$$\exp(Q(\omega)t) = \begin{pmatrix} 1 & \exp(t) & 1 \\ 1 & 1 & \exp(-it\omega\rho^{-1}) \\ 1 & \exp(it\gamma\omega\beta^{-1}) & \exp(-t\beta^{-1}) \end{pmatrix},$$

ее норма оценивается как

$$\|\exp(Q(\omega)t)\|_\infty \le \max\left\{3, 2 + \exp(t), 2 + \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)\right\} \le C_t = 2 + \exp(t) \tag{4.3}$$

Так как норма матрицы $\exp(Q(\omega)t)$ ограничена независимо от ω, то решение задачи Коши (3.1)–(3.2) непрерывно зависит от начальных данных [4].

Этими методами аналогично доказывается гиперболичность системы (3.3) при условии $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1} > 0$ и непрерывная зависимость решения задачи Коши (3.2)–(3.3) от начальных данных.

5. Волновые решения. Исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде плоских волн. Такие решения имеют вид

$$u(t,x) = U(kx - \omega t + \phi), \quad w(t,x) = W(kx - \omega t + \phi), \tag{5.1}$$

где k – волновое число, ω – циклическая частота, ϕ – фаза. Если при этом $(U,W)^T \neq (0,0)^T$ и $U, U', U'', W, W', W'' \to 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \to \pm\infty$, то скажем, что такое имеет вид уединенной волны.

Подставляя (5.1) в (3.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций U и W

$$\begin{cases} \rho\omega^2 U''(z) - kW'(z) = 0 \\ \beta\omega W'(z) - W(z) - k\gamma\omega U''(z) = 0 \end{cases}$$

Ее решение может быть представлено в виде

$$U(z) = \sum_{i=1}^{3} c_i U_i(z), \quad W(z) = \sum_{i=1}^{3} c_i W_i(z), \tag{5.2}$$

где

$$U_1(z) = 1, \quad U_2(z) = z, \quad W_1(z) = W_2(z) = 0, \quad W_3(z) = \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right),$$

$$U_3(z) = \frac{1}{\rho^2\omega^3}\left[k^3\gamma - k\rho\omega(z + \beta\omega) + \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right)k\left(\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma\right)\right],$$

и c_1, c_2 и c_3 – произвольные константы.

Теорема 1. Система уравнений (3.1), допускает решения в виде плоских волн, которые представляются в виде (5.1)–(5.2).

Доказательство следует из рассуждений выше.

Из формул (5.1) и (5.2) также следует

Утверждение 1. Система уравнений (3.1) не имеет решений в виде уединенных волн (солитонов).

Доказательство. Достаточно показать, что условие $U, U', W \to 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \to \pm\infty$ влечет $U = W = 0$. Обозначим $\alpha = \dfrac{\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}$. Тогда, в силу формулы $W(z) = c_3 W_3(z) = c_3 \exp(\alpha z)$, имеют место представления

$$\lim_{z\to+\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{z\to-\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$$

из которых следует, что $\lim\limits_{z\to+\infty} W(z) = \lim\limits_{z\to-\infty} W(z) = 0$ если и только если $c_3 = 0$. В таком случае $U(z) = c_1 + c_2 z$ и $U'(z) = c_2$. А в силу $c_2 = \lim\limits_{z\to+\infty} U'(z) = \lim\limits_{z\to-\infty} U'(z) = 0$ имеем $U(z) = c_1$ и аналогично получаем $c_1 = \lim\limits_{z\to+\infty} U(z) = \lim\limits_{z\to-\infty} U(z) = 0$. Значит, $U(z) = W(z) = 0$.

Теперь исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде экспоненциальных волн. Это комплексно-значные функции вида

$$u(t,x) = U_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad w(t,x) = W_0 \exp(i(kx - \omega t)), \tag{5.3}$$

где $U_0 \in \mathbb{C}$, $W_0 \in \mathbb{C}$ – комплексные амплитуды, $k \in \mathbb{R}$ – волновое число, $\omega \in \mathbb{C}$ – временная частота. Поскольку такие решения представляют собой бесконечно-дифференцируемые функции, то дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x, а второе по t и выражая $\partial_t^2 \partial_x u$ из обеих уравнений, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Подставляя в последнее уравнение представление (5.3), мы находим

$$(k^2\gamma - \rho\omega(\beta\omega + i))w(t,x) = 0$$

Отсюда

$$\omega = \frac{-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}}{2\beta} \tag{5.4}$$

Можно видеть, что скорость распространения волн $\omega/|k|$ нелинейно зависит от частоты. То, что волны, описываемые системой уравнений (3.1), обладают дисперсией. Интегрируя первое уравнение из (3.1) относительно u, получаем

$$u(t,x) = -\frac{ikW_0}{\rho\omega^2}\exp(i(kx - \omega t)), \tag{5.5}$$

т.е. $U_0 = -\dfrac{ikW_0}{\rho\omega^2}$.

Пользуясь данными представлениями, можно найти фазовый сдвиг между волнами смещений и напряжений:

$$\arg(U_0) - \arg(W_0) = \frac{3\pi}{2} + \arg\left(\frac{k}{\omega^2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \arg(k) - 2\arg\left(-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}\right)$$

Рассмотрим теперь случай, что ω это чисто мнимое число (такое произойдет, если будет верно неравенство $4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1 < 0$). В таком случае

$$w(t,x) = W_0 \exp\left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)$$

$$u(t,x) = \frac{ikW_0}{\rho}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)^{-2} \exp\left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)$$

Полагая $W_0 = |W_0|\exp(i\phi)$ ($|W_0| \in [0,\infty)$ и $\phi \in [0,2\pi)$) и беря вещественную и мнимую части от решений u и w, находим что

$$w(t,x) = |W_0|\exp\left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)\cos(kx + \phi)$$

$$u(t,x) = \frac{k|W_0|}{\rho}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)^{-2} \exp\left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)\cos\left(kx + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

и

$$w(t,x) = |W_0|\exp\left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)\sin(kx + \phi)$$

$$u(t,x) = \frac{k|W_0|}{\rho}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)^{-2} \exp\left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}}{2\beta}\right)t\right)\sin\left(kx + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

также являются решениями системы (3.1). В последних формулах присутствует отрицательный экспоненциальный член вида $\exp\left(-(2\beta)^{-1}\left(1 + \sqrt{1 - 4k^2\beta\gamma\rho^{-1}}\right)t\right)$, который соответствует затуханию или диссипации.

Таким образом, при распространении колебаний в вязкоупругих по модели Максвелла стержнях присутствуют эффекты затухания и дисперсии.

6. Сохранение модифицированной энергии. Определим модифицированную “энергию” системы (3.1) как

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\beta}{\gamma}w^2\right)(t,x)dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(\tau,x)dx$$

Замечание 1. Величину $\tilde{E}$ не совсем корректно называть энергией, ведь она имеет размерность $[\tilde{E}] = MT^{-2}$, вместо требуемого L^2MT^{-2}.

Замечание 2. Как известно [1], полная механическая энергия стержня в отсутствии внешних сил и теплового расширения может быть найдена по формуле

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2}\int_V \rho(\partial_t u)^2\, dV, \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma\partial_x u dV, \tag{6.1}$$

где T — кинетическая энергия стержня, Π — потенциальная энергия стержня, V — объем стержня, $dV = dxdydz$ — элемент объема.

Справедливо утверждение о том, что модифицированная “энергия” сохраняется.

Теорема 2. Пусть пара функций u, w есть классическое решение уравнения (3.1) и функции $u(t,\bullet)$ и $w(t,\bullet)$ имеют компактный носитель в пространстве для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $t \mapsto \tilde{E}(t)$ есть константа.

Доказательство. В самом деле, легко рассчитать

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma}w\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x)dx + \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma}w\left(\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - w\right) + \frac{1}{\gamma}w^2\right)(t,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)(t,x)dx = 0$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, поскольку функции u и w имеют компактный носитель в пространстве для любой временной координаты.

Замечание 3. В теореме 2 требование компактного носителя можно ослабить, например, $u \in C^2(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}))$ и $w \in C^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2([0,T]\times\mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Из сохранения модифицированной энергии следует, что задача (3.1), (3.2) не может иметь двух и более различных классических решений.

Теорема 3. Задача Коши (3.1)–(3.2) имеет не более одного классического решения, если оно существует.

Доказательство. Пусть существует два решения задачи Коши (3.1) и (3.2): (u_1, w_1) и (u_2, w_2). Обозначим $u = u_1 - u_2$ и $w = w_1 - w_2$. Тогда пара функций u и w удовлетворяет задаче (3.1) и (3.2), в которой $\mu = \varphi = \psi = 0$. Тогда для любого $t \ge 0$ верно равенство $\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$. Отсюда следует, что на множестве $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t, так как она непрерывна, то в силу условия $u(0,x) = 0$ на всем множестве $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ выполняется $u = 0$. Из последних результатов следует, что $u_1 = u_2$ и $w_1 = w_2$.

7. Конечная скорость распространения волн. Для фиксированных $x_0 \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ рассмотрим *конус прошлого* с вершиной (t_0, x_0)

$$K(t_0,x_0) := \{(t,x)\,|\,0 \le t \le t_0 \wedge |x - x_0| \le \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}|t_0 - t|\}$$

Теорема 4. Если $u \equiv \partial_t u \equiv w \equiv 0$ на отрезке $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, то $u \equiv w \equiv 0$ внутри конуса $K(t_0, x_0)$.

Доказательство. Определим локальную модифицированную энергию как

$$\tilde{e}(t) = \frac{1}{2}\int_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}\left(\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\beta}{\gamma}w^2\right)(t,x)dx + \frac{1}{\gamma}\int_0^t d\tau\int_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(\tau,x)dx; \quad t \in [0,t_0]$$

Тогда

$$\tilde{e}'(t) = \int_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma}w\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x)dx + \frac{1}{\gamma}\int_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(t,x)dx -$$

$$- \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{W}(w)(t) =$$

$$
= \int\limits_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)(t,x)dx -
$$

$$
- \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{W}(w)(t) = \tag{7.1}
$$

$$
= \int\limits_{x_0-(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0+(t_0-t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x)dx +
$$

$$
+ (w\partial_t u)\left(t, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - (w\partial_t u)\left(t, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) -
$$

$$
- \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{B}(u,w)\left(t, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mathcal{W}(w)(t); \quad t \in [0, t_0],
$$

где использованы обозначения

$$
\mathcal{B}(u,w) = \sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma\rho}}w^2
$$

$$
\mathcal{W}(w)(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\frac{1}{\gamma\beta\rho}}\left(w^2\left(\tau, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + w^2\left(\tau, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right)\right)d\tau
$$

В силу неравенства Коши—Шварца имеем

$$
\pm w\partial_t u \le \sqrt{\frac{\beta}{\gamma\rho}}w^2 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}}(\partial_t u)^2 \tag{7.2}
$$

Подставляя (7.2) в (7.1), получаем

$$
\tilde{e}'(t) \le -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(t, x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\left(t, x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right)\right) - \mathcal{W}(w)(t) \le 0
$$

В таком случае, $0 \le e(t) \le e(0) = 0$ для всех $t \in [0, t_0]$. Отсюда следует, что на множестве $K(t_0, x_0)$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t, так как она непрерывна, то в силу условия $u(0, x) = 0$ при $x \in [x_0 - t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)},\ x_0 + t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, на всем множестве $K(t_0, x_0)$ выполняется $u = 0$.

Таким образом, любое возмущение начальных данных, заданное вне отрезка $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)},\ x_0 + t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, не влияет на решение внутри $K(t_0, x_0)$. Следовательно, эффекты ненулевых начальных данных распространяются со скоростью, не превышающей $\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}$.

8. Классическое решение задачи Коши о свободных колебаниях. Формально найдем выражения для решения задачи (3.1)—(3.2). Дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x, а второе по t и выражая $\partial_t^2\partial_x u$ из обеих уравнений, получаем

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = 0; \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}
$$

$$
w(0,x) = \mu(x), \quad \partial_t w(0,x) = \frac{\gamma}{\beta}\psi'(x) - \frac{1}{\beta}\mu(x); \quad x \in \mathbb{R}
$$

Такая задача Коши легко интегрируется, и ее классическое решение существует и единственно [6]. Но для нахождения решения в явном аналитическом виде сделаем замену

$$w(t,x) = w_{KG}(t,x)\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right), \tag{8.1}$$

и в результате получим задачу Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока в виде

$$\frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial x^2}(t,x) - \frac{w_{KG}}{4\beta^2}(t,x) = 0; \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

$$w_{KG}(0,x) = \mu(x), \quad \partial_t w_{KG}(0,x) = \frac{\gamma}{\beta}\psi'(x) - \frac{1}{2\beta}\mu(x); \quad x\in\mathbb{R}$$

Выражение для w_{KG} можно взять из работы [7], а с учетом формулы (8.1) имеем

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)\left(\mu\left(x - \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}}t\right) + \mu\left(x + \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}}t\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)\sqrt{\frac{\rho\beta}{\gamma}}\int\limits_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{t^2 - \frac{\rho\beta(x-\xi)^2}{\gamma}}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta}\psi'(\xi) - \frac{1}{2\beta}\mu(\xi)\right)d\xi + \\ &+ \frac{t}{4}\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)\sqrt{\frac{\rho}{\gamma\beta}}\int\limits_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \frac{1}{4\beta}\,{}_0F_1\left(2;\frac{t^2 - \gamma^{-1}\beta\rho(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right)\mu(\xi)d\xi; \quad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t d\lambda\int\limits_0^\lambda \frac{\partial w}{\partial x}(\tau,x)d\tau = \\ &= \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t d\lambda\int\limits_0^\lambda (16\beta)^{-1}\exp(-\tau/(2\beta))\times \\ &\times\left(8\beta\sqrt{\frac{\beta\rho}{\gamma}}\int\limits_{x-\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}} \frac{\rho(x-\xi)}{64\beta^2\gamma}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)}{16\beta^2}\right)(\mu(\xi) - 2\gamma\psi'(\xi))d\xi + \right. \\ &+ t\sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}}\left(\mu\left(x + \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x - \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right)\right) + 8\beta\left(\mu'\left(x - \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + \mu'\left(x + \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right)\right) + \\ &+ 4\sqrt{\frac{\beta\rho}{\gamma}}\left(\mu\left(x - \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x + \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - 2\gamma\psi'\left(x - \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + 2\gamma\psi'\left(x + \tau\sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right)\right) + \\ &+ \left. 4\beta\tau\sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}}\int\limits_{x-\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}} \frac{\rho(\xi - x)}{64\beta^2\gamma}\,{}_0F_1\left(;3;\frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)}{16\beta^2}\right)\mu(\xi)d\xi\right)d\tau; \quad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.3}$$

В формулах (8.2) и (8.3) использованы обозначения: I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n и ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение было построено формально, поэтому непосредственной проверкой убеждаемся, что функции u и w обладают необходимой степенью гладкости, удовлетворяют уравнениям (3.1) и начальным условиям (3.2), если, например, $\mu\in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi\in C^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, построено в явном аналитическом виде классическое решение задачи Коши (3.1)–(3.2). Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное классическое решение, представленное формулами (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

9. Классическое решение задачи Коши о вынужденных колебаниях. Рассмотрим начальную задачу (3.2)–(3.3). Ее решение можно искать в виде суммы

$$u_{\text{forced}} = u + u_p, \quad w_{\text{forced}} = w + w_p, \tag{9.1}$$

где пара функций (“общее” решение однородной системы) u, w есть решение задачи (3.1)–(3.2), а функции (частное решение неоднородной системы) u_p, w_p удовлетворяют уравнениям (3.3) и однородным граничным условиям

$$w_p(0,x) = u_p(0,x) = \partial_t u_p(0,x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

Фактически, при условии $f \in C^{1,4}([0,\infty)\times\mathbb{R})$, функции u_p, w_p построены в работах [6, 8], и они имеют вид [8]

$$\begin{gathered} w_p(t,x) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}}\int_0^t d\tau \int_{x-\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)}^{x+\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)} \left(\exp\left(\frac{\tau}{2\beta}\right)\times \right. \\ \left. \times\, \partial_x f(\tau,\lambda) I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho\beta\gamma^{-1}(x-\lambda)^2}\right)\right) d\lambda \\ u_p(t,x) = \frac{1}{\rho}\int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} + f\right)(\tau,x)\,d\tau \end{gathered} \tag{9.2}$$

Они принадлежат классам $C^3([0,\infty)\times\mathbb{R})$ и $C^{2,4}([0,\infty)\times\mathbb{R})$ соответственно при условии $f \in C^{1,4}([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Кроме того, $\partial_t w_p(0,x) = 0$ и $\partial_t^2 w_p(0,x) = \gamma\rho^{-1}\beta^{-1}\partial_x f(0,x)$.

Единственность решения задачи устанавливается методом энергий, аналогично теореме 3.

Теорема 6. Пусть выполняются условия $f \in C^{1,4}([0,\infty)\times\mathbb{R})$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.2)–(3.3) имеет единственное классическое решение u_{forced} и w_{forced}, представленное формулами (9.1), (9.2), (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

Заключение. В данной работе показано, что задача Коши для одномерной системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня, является корректной. Найдено ее решение в явном аналитическом виде. Также указаны некоторые качественные свойства решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: в 10 тт. М.: Физматлит, 2003. Т. VII: Теория упругости. 264 с.
2. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.
3. *Ржаницын А.Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: ГИТТЛ, 1949. 248 с.
4. *Strikwerda J.C.* Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.

6. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. Нац. АН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
7. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
8. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Частное решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши // Изв. Нац. АН Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук. 2022. Т. 58. № 3. С. 300–311.

Problem of Longitudinal Vibrations of a Viscoelastic Rod of Maxwell Type

V. I. Korzyuk[a,b,#], J. V. Rudzko[a,##], and V. V. Kolyachko[b,###]

[a]*Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, Minsk, Belarus*
[b]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[#]*e-mail: korzyuk@bsu.by*
[##]*e-mail: janycz@yahoo.com*
[###]*e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru*

In this paper, we study well-posedness in the sense of Hadamard of the Cauchy problem for a one-dimensional hyperbolic system of partial differential equations describing the longitudinal vibrations of a viscoelastic rod of Maxwell type with constant cross-section. We discuss some properties of the system and its solutions: the conservation of modified “energy”, the finite propagation speed, dispersion, and dissipation of solutions.

Keywords: longitudinal vibrations, Maxwell material, Cauchy problem, well-posed problem

REFERENCES

1. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Course of Theoretical Physics. in 10 vol. Vol. 7. Theory of Elasticity. Moscow: Fizmatlit, 2003. 264 p. (in Russian)
2. *Rzhanitsyn A.R.* Theory of Creep. Moscow: Stroiizdat, 1968. 418 p. (in Russian)
3. *Rzhanitsyn A.R.* Some Questions of the Mechanics of Systems Deforming in Time. Moscow: GITTL, 1949. 248 p. (in Russian)
4. *Strikwerda J.C.* Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.
6. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // Dokl. Nat. Acad. of Sci. Belarus, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 14–19.
7. *Polyanin A.D.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002. 800 p.
8. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* A particular solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions // Proc. of the Nat. Acad. of Sci. Belarus. Ser. Phys.&Math., 2022, vol. 58, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)