
УДК 532.59:534.1

АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ИМПУЛЬСНОГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. В. В. Булатов^{1,*}, И. Ю. Владимиров^{2,**}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.01.2023 г.

После доработки 08.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Решена задача о построении асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн, возникающих от импульсного локализованного источника возмущений в стратифицированной вращающейся как целое жидкости конечной глубины. В приближении постоянства частоты плавучести построены равномерные и неравномерные асимптотики решений для описания дальних волновых полей, которые выражаются через функцию Эйри и ее производную. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что на временах, больших нескольких периодов плавучести, и на расстояниях порядка толщины слоя жидкости, полученные асимптотики позволяют описать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей.

Ключевые слова: вращающаяся стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, волновой фронт, асимптотики

DOI: 10.31857/S0032823523030025, EDN: ZSIELU

1. Введение. Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд задач распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами вращения и стратификации [1–4]. В этих задачах корректное применение асимптотических методов дает возможность исследовать ряд физически интересных эффектов, определяемых свойствами гидрофизических сред. Импульсные источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах [5–9]. Такие источники ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры [10–13].

В природных стратифицированных средах вращение среды как целого влияет на основные характеристики полей ВГВ. В линейном приближении волновая картина может быть описана многомерными интегралами Фурье или с помощью геометрического подхода в рамках кинематической теории диспергирующих волн, на основе которой возможно получить аналитическое представление только для фазовых поверхностей (линий), огибающих и волновых фронтов [4, 14, 15]. Более сложной в математическом плане является задача построения равномерных асимптотик интегральных представлений, позволяющих рассчитать амплитудно-фазовую структуру волновых

полей. В общем случае интегральные представления аналитически не вычисляемы, и для их анализа эффективно могут быть использованы только различные асимптотические методы. В современной литературе математический аппарат асимптотических методов изложен достаточно полно: многомерный метод стационарной фазы, метод эталонных интегралов, метод канонического оператора Маслова [16–20]. Асимптотики интегральных представлений позволяют качественно анализировать волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы, что актуально, в частности, для решения задач оперативной океанологии.

В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натуральных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных импульсных источников возбуждения ВГВ в природных стратифицированных средах [5, 6, 8, 9]. Поэтому полученные асимптотические результаты дают возможность определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, математические модели волновой генерации от импульсного источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде могут быть верифицированы, а также использованы для проведения прогнозных оценок.

Была рассмотрена [21] задача о дальних полях ВГВ при стационарном движении источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде. Исследовались [22] дальние поля ВГВ от начального радиально симметричного возмущения без учета вращения среды. Целью настоящей работы является решение ранее не рассматриваемой задачи построения равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным импульсным источником возмущений во вращающейся стратифицированной среде конечной глубины.

2. Постановка задач, интегральные формы решений. Рассматривается слой $-H < z < 0$ вращающейся как целое с частотой Ω стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента–Вайсяля $N(z) = N = \text{const}$. В момент времени $t = 0$ точечный источник, находящийся в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 < 0$ мгновенно выбрасывает объем жидкости q . Тогда возвышение изопикн (линий равной плотности) $\xi = \xi(x, y, z, z_0, t)$ в приближении Буссинеска определяется из уравнения [1, 4, 21]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi + f^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + N^2 \Delta \xi = q \delta'(t) \delta(\xi) \delta(y) \delta'(z - z_0)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f = 2\Omega$$

В качестве граничных условий используется приближение “твердой крышки”: $\xi = 0, z = 0, -H$. Начальное условие берется в виде: $\xi \equiv 0, t < 0$. В безразмерных переменных $x^* = \pi x/H, y^* = \pi y/H, z^* = \pi z/H, z_0^* = \pi z_0/H, f^* = f/N, t^* = Nt, q^* = \pi^3 q/H^3$, задача формулируется следующим образом (индекс “*” далее опускается)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi + f^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \Delta \xi = q \delta'(t) \delta(\xi) \delta(y) \delta'(z - z_0)$$

$$\xi = 0, \quad z = 0, -\pi; \quad \xi \equiv 0, \quad t < 0$$

Фурье образ возвышения изопикн

$$\Phi(\mu, \nu, z, z_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i(\omega t + \nu y + \mu x)) \xi(x, y, z, z_0, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \varphi = iq \frac{\omega}{\omega^2 - f^2} \delta'(z - z_0) \quad (2.1)$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0, -\pi; \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2 \quad (2.2)$$

Решение (2.1)–(2.2) ищется в виде ряда по собственным функциям $\varphi_n = \varphi_n(z, k)$ соответствующей однородной спектральной задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} \varphi_n = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi_n = 0; \quad z = 0, -\pi \quad (2.4)$$

Задача (2.3)–(2.4) имеет на отрезке $[-\pi, 0]$ полную ортонормированную с весом $(1 - f^2)$ систему собственных функций $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nz}{\sqrt{1 - f^2}}$ и собственных значений

$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{k^2 + f^2 n^2}{f^2 + n^2}}$. Тогда, используя соотношение

$$\delta'(z - z_0) = - (1 - f^2) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0}$$

можно получить выражение для возвышения изопопкн в виде

$$\xi(x, y, z, z_0, t) = \frac{iq}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\nu y + \mu x + \omega t)) T_n(k) D_n(z, z_0) d\omega$$

$$T_n(k) = \frac{\omega(\omega_n^2(k) - f^2)}{k^2(\omega^2 - \omega_n^2(k))}, \quad D_n(z, z_0) = \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0}$$

Внутренний интеграл по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах, при этом контур интегрирования необходимо сместить в область $\text{Im } \omega > 0$. Тогда, замыкая его в нижнюю полуплоскость, и учитывая полюса $\omega = \pm \omega_n(k)$, получаем при $t > 0$ следующее выражение в виде суммы мод

$$\xi(x, y, z, z_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x, y, z, z_0, t)$$

$$I_n(x, y, z, z_0, t) = \frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n^2(k) - f^2}{k^2} \exp(-i(\nu y + \mu x)) \cos(\omega_n(k)t) D_n(z, z_0) d\mu \quad (2.5)$$

3. Асимптотики решений. Далее будет рассматриваться отдельная волновая мода, индекс n опускается. Перейдем к полярным координатам: $\nu = k \sin \psi$, $\mu = x \cos \psi$, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, и проинтегрируем (2.5) по переменной ψ

$$I(r, z, z_0, t) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2(k) - f^2}{k} \cos(\omega(k)t) D(z, z_0) J_0(kr) dk \quad (3.1)$$

Заменим в выражении (3.1) функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$:

$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right). \text{ В результате можно получить}$$

$$I(r, z, z_0, t) = I^+ + I^-$$

$$I^\pm = \int_0^\infty F(k) \cos\left(t(kV \pm \omega(k)) - \frac{\pi}{4}\right) dk; \quad V = \frac{r}{t} \quad (3.2)$$

$$F(k) = \frac{q(\omega^2(k) - f^2)D(z, z_0)}{(2\pi)^{3/2} k\sqrt{kr}}$$

Далее будем рассматривать асимптотику слагаемых I^\pm при больших значениях t и $V = \text{const}$, то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\omega(k)$ – монотонно возрастающая функция, то фазовая функция $kV + \omega(k)$ не имеет стационарных точек на действительной оси, следовательно интеграл I^+ экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$. Обозначим далее: $\gamma(k) = kV - \omega(k)$, $K = f\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 3f^{-2}}}{3}}$ – значение волнового числа, при котором достигается максимум групповой скорости отдельной волновой моды, и через $V_* = \omega'(k)$ – величину этого максимума. Тогда фазовая функция $\gamma(k)$ интеграла I^- при $0 < V < V_*$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_2 < K < k_1$. Главный член асимптотики I^- определяется вкладом этих точек, и может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. В результате можно получить

$$I^- \approx J^1 + J^2, \quad J^1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t\gamma''(k_1)}} F(k_1) \cos(\gamma(k_1)t), \quad J^2 = \frac{\sqrt{-2\pi}}{\sqrt{t\gamma''(k_2)}} F(k_2) \sin(\gamma(k_2)t) \quad (3.3)$$

Асимптотики (3.3) становятся непригодными при $V \rightarrow V_*$, то есть вблизи фронта каждой волновой моды, где стационарные точки сливаются друг с другом, и, соответственно, $\gamma''(k) \rightarrow 0$. Для нахождения асимптотики интеграла I^- в окрестности волнового фронта (локальной асимптотики) отдельной волновой моды необходимо разложить амплитудную и фазовую функции в ряды вблизи при $k \approx K$, ограничиваясь для амплитуды одним членом, и для фазы – тремя

$$F(k) = F(K) + \dots, \quad \gamma(k) = \gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3 + \dots \quad (3.4)$$

В результате, заменяя в (3.2) нижний предел интегрирования на $-\infty$, можно получить

$$I^- \approx \int_{-\infty}^\infty F(K) \cos\left(t\left(\gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3\right) - \frac{\pi}{4}\right) dk \quad (3.5)$$

Интеграл (3.5) выражается через функцию Эйри [18, 19]

$$\text{Ai}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos(\Theta u + u^3/3) du$$

В результате выражение для локальной асимптотики отдельной моды возвышения изопикн имеет вид

$$I^- \approx 2\pi F(K) \sqrt[3]{\frac{2}{t\gamma'''(K)}} \cos\left(t\gamma(K) - \frac{\pi}{4}\right) \text{Ai}\left(\gamma'(K) \sqrt[3]{\frac{2t^2}{\gamma'''(K)}}\right) \quad (3.6)$$

Таким образом, при больших временах поле отдельной моды вблизи волнового фронта (переходной зоны), имеет порядок малости $O(t^{-1/3})$, то есть в $t^{1/6}$ раз больше, чем за фронтом. Ширина (временной интервал) волнового фронта (переходной зоны) каждой моды T определяется условием, чтобы аргумент функции Эйри в (3.6) имел порядок единицы: $T \approx \sqrt{\gamma'''(K)} (\gamma'(K))^{-3/2}$. Асимптотика (3.6) непригодна вдали от волнового фронта отдельной моды.

Построим асимптотику, которая в окрестности фронта совпадает с (3.6), а вдали от волнового фронта с выражением (3.3). Для этого необходимо выполнить регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma(k) = kV - \omega(k)$ интеграла I^- в новую функцию $\tau(s) = C - \sigma s + s^3/3$, имеющую, как и $\gamma(k)$, две стационарные точки. Таким образом

$$\gamma(k(s)) = C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \quad (3.7)$$

При этом стационарной точке k_1 будет отвечать точка $s_1 = \sqrt{\sigma}$, а стационарной точке k_2 — точка $s_2 = -\sqrt{\sigma}$. Тогда из (3.7) находим

$$\sigma = \left(\frac{3}{4}(\gamma(k_2) - \gamma(k_1))\right)^{2/3}, \quad C = \frac{\gamma(k_2) + \gamma(k_1)}{2}$$

В результате подстановки (3.7) интеграл I^- преобразуется к виду

$$I^- = \int_P^\infty G(s) \cos\left(t\left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right) ds \quad (3.8)$$

$$G(s) = F(k(s)) \frac{dk}{ds}, \quad \frac{dk}{ds} = \frac{s^2 - \sigma}{\gamma'(k)}, \quad k = k(s),$$

где P — образ точки $k = 0$ при отображении, обратном к $k = k(s)$. Далее, следуя общим принципам построения равномерных асимптотик, функцию $G(s)$ разложим по степеням $(s^2 - \sigma)$ [17, 20]

$$G(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + B_m s) (s^2 - \sigma)^m$$

Ограничиваясь главными членами разложения, можно получить

$$A_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad B_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}$$

Тогда при $s = \pm\sqrt{\sigma}$ имеем

$$G(\sqrt{\sigma}) = F(k_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_1)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = F(k_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_2)}}$$

Подставляя главные члены разложения в (3.7) и заменяя нижний предел интегрирования P на $-\infty$ можно получить

$$I^- \approx \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 + B_0 s) \cos \left(t \left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \right) ds \quad (3.9)$$

Интеграл (3.9) выражается через функцию Эйри и ее производную [18, 19]

$$\begin{aligned} I^- \approx & \frac{\pi(G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma}))}{\sqrt[3]{t}} \cos \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}(-\sigma t^{2/3}) + \\ & + \frac{\pi(G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma}))}{\sqrt{\sigma} \sqrt[3]{t^2}} \sin \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}'(-\sigma t^{2/3}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Асимптотика (3.10) является равномерной по параметру V при $t \rightarrow \infty$. Чтобы показать, что равномерная асимптотика (3.10) переходит в окрестности волнового фронта в локальную (3.6) необходимо решить уравнение $\gamma'(k) = 0$ в приближении (3.4). В результате можно получить

$$k_{1,2} - K = \pm \sqrt{\frac{-2\gamma'(K)}{\gamma'''(K)}}$$

При малых значениях $k_{1,2} - K$ имеем: $C = \gamma(K)$, $\sigma = -\gamma'(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3}$, $G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma}) = 2G(0) = F(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3}$. Подставляя эти выражения в (3.10) и пренебрегая слагаемыми, содержащими производную функции Эйри (поскольку вблизи фронта эти слагаемые имеют более высокий порядок малости) получим в итоге локальную асимптотику (3.6). Равномерная асимптотика (3.10) при больших значениях t и σ , то есть при $\sigma t^{2/3} \rightarrow \infty$ переходит в неравномерную асимптотику стационарной фазы (3.3). Действительно, воспользовавшись соответствующими асимптотическими разложениями функции Эйри и ее производной при больших отрицательных значениях аргумента в виде: $\text{Ai}(-x) \approx \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{3}{2} x^{2/3} + \frac{\pi}{4} \right)$, $\text{Ai}'(-x) \approx -\frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{3}{2} x^{2/3} + \frac{\pi}{4} \right)$, можно показать, что оба слагаемых в (2.10) имеют один порядок малости $O(t^{1/2})$. Таким образом локальная асимптотика (3.6) и неравномерная асимптотика (3.3) являются частными случаями равномерной асимптотики (3.10), что является основным результатом работы.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов первой моды возвышения ξ для следующих значений безразмерных параметров: $q = 1$, $f = 0.2$, $z = -2$, $z_0 = -1$. Сплошная линия на всех рисунках – точное решение, точка – положение волнового фронта. Штриховая линия на рис. 1 – равномерная асимптотика (3.10). На рис. 2 штриховая линия – приближение стационарной фазы (3.3), пунктирная линия – локальная асимптотика (3.6). Численные расчеты показывают, что на расстояниях порядка толщины слоя жидкости и на временах порядка нескольких периодов Брента–Вайсяля равномерная асимптотика с достаточной степенью точности описывает точное решение. Локальная асимптотика совпадает с точным решением на масштабах не более первой полуволны Эйри. Вдали от волнового фронта приближение стационарной фазы хорошо описывает точное решение.

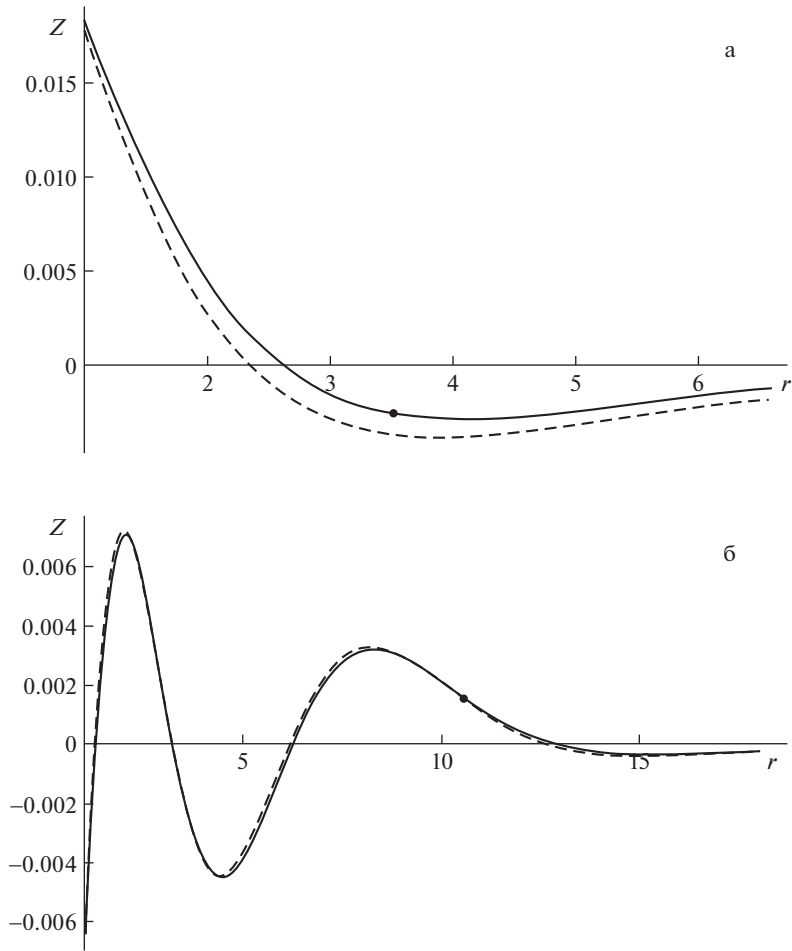


Рис. 1. Возвышение изопикн при $t = 5$ (а) и $t = 15$ (б).

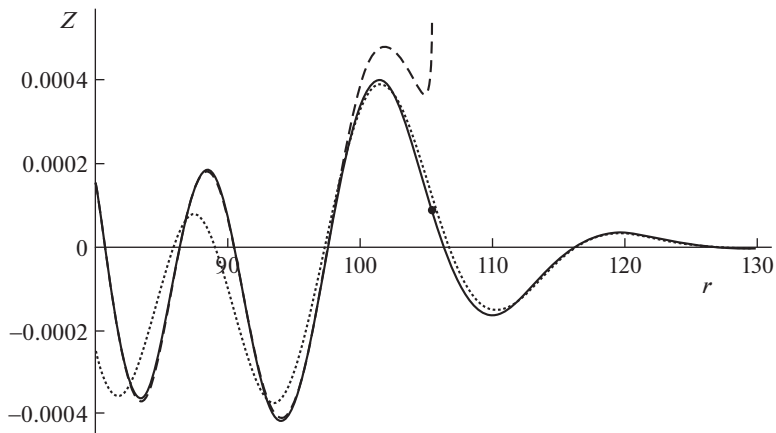


Рис. 2. Возвышение изопикн при $t = 150$.

Заключение. Построенные в работе равномерные асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника возмущений во вращающейся как целое стратифицированной среде конечной толщины как вблизи, так и вдали от волновых фронтов отдельной волновой моды. Полученные результаты описывают характер асимптотического поведения волновых пакетов при больших временах и на большом удалении от источника волн. В частности, асимптотический анализ показывает затухание амплитуды волны как корня квадратного от времени за исключением особых случаев вырождения дисперсионного соотношения — обращения в нуль второй производной дисперсионной зависимости. Естественное решение проблемы вырождения, включение в анализ высших дифференциалов дисперсионной зависимости приводит к решению в терминах функции Эйри и ее производной, а также к более медленному дисперсионному затуханию амплитуды волны как корня третьей степени от времени.

Наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании эволюции волновых пакетов, возбуждаемых распределенными в пространстве возмущениями, так как, используя операцию свертки, построенные в работе асимптотики позволяют аналитически рассчитывать дальние волновые поля от нелокальных источников возмущений различной физической природы в стратифицированных вращающихся средах. Полученные асимптотики дальних полей дают возможность не только эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, но и проводить качественный анализ получаемых решений. Асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик пакетов внутренних гравитационных волн, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Такие волновые картины полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании, наблюдении и измерениях внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных вращающихся стратифицированных средах.

Работа выполнена за счет гранта РФФИ № 23-21-00194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical Fluid Dynamics II. Stratified Rotating Fluid Dynamics of the Atmosphere—Ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. AG Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
7. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dyn. Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.
8. *Сидняев Н.И.* Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инж. ж.: наука и инновации. 2013. № 2.
<https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html>
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-2-614>
9. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 117–127.

10. Матюшин П.В. Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 83–97.
11. Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z. Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engng. 2022. V. 266. P. 112840.
12. Ulloa H.N., Fuente A., Nino Y. An experimental study of the free evolution of rotating, nonlinear internal gravity waves in a two-layer stratified fluid // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. P. 308–339.
13. Li T., Wan M., Wang J., Chen S. Flow structures and kinetic-potential exchange in forced rotating stratified turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. P. 014802.
14. Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
15. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.
16. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
17. Бреховских Л.М., Гордин О.А. Акустика неоднородных сред. в 2 тт. Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с. Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
18. Kravtsov Y., Orlov Y. Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
19. Froman N., Froman P. Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
20. Babich V.M., Buldyrev V.S. Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory. Oxford: Alpha Sci., 2007. 480 p.
21. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 57–63.
22. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально симметричного возмущения // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 206–215.

Far Fields Asymptotics of Internal Gravity Waves from a Pulse Localized Source in a Rotating Stratified Medium

V. V. Bulatov^{a,#} and I. Yu. Vladimirov^{b,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: internalwave@mail.ru*

^{##}*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of constructing asymptotics of the internal gravity waves far fields arising from an impulsive localized source of perturbations in a stratified fluid of finite depth rotating as a whole is solved. In the approximation of constant buoyancy frequency, uniform and nonuniform asymptotics of solutions are constructed to describe far wave fields, which are expressed in terms of the Airy function and its derivative. The exact and asymptotic results are compared, and it is shown that at times longer than several buoyancy periods and at distances of the order of the liquid layer thickness, the obtained asymptotics allow one to describe the amplitude-phase structure of far wave fields.

Keywords: rotating stratified medium, internal gravity waves, far fields, wave fronts, asymptotics

REFERENCES

1. Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V. Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.

2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical Fluid Dynamics II. Stratified Rotating Fluid Dynamics of the Atmosphere-Ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The Ocean in Motion. Springer Oceanogr. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
7. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dyn. Atm. Oceans*, 2019, vol. 86, pp. 116–133.
8. *Sidnjaev N.I.* Theoretical studies of hydrodynamics in an underwater explosion of a point source // *Inzh. zh.: Nauka i Innovastii*, 2013, vol. 2. <https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html> (in Russian)
9. *Belyaev M.Y., Desinov L.V., Krikalev S.K. et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // *J. Comp. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, pp. 110–120.
10. *Matyushin P.V.* Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54 (3), pp. 374–388.
11. *Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // *Ocean Engng.*, 2022, vol. 266, pp. 112840.
12. *Ulloa H.N., Fuente A., Nino Y.* An experimental study of the free evolution of rotating, nonlinear internal gravity waves in a two-layer stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 742, pp. 308–339.
13. *Li T., Wan M., Wang J., Chen S.* Flow structures and kinetic-potential exchange in forced rotating stratified turbulence // *Phys. Rev. Fluids*, 2020, vol. 5, pp. 014802.
14. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Phys. Uspekhi*, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
15. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // *Fluids*, 2020, vol. 5, pp. 219.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Waves in Stratified Medium. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)
17. *Brehovskih L.M., Godin O.A.* Acoustic of Inhomogeneous Medium. Vol. 1: Fundamentals of the Theory of Sound Reflection and Propagation. Moscow: Nauka, 2007. 443 p. Vol. 2: Sound Fields in Layered and Three-Dimensionally Inhomogeneous Medium. Moscow: Nauka, 2009. 426 p. (in Russian)
18. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
19. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
20. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory. Oxford: Alpha Sci., 2007. 480 p.
21. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Far fields of internal gravity waves generated by a perturbation source in a stratified rotating medium // *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51 (5), pp. 633–638.
22. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Uniform asymptotics of internal gravitational wave fields from an initial radially symmetric perturbation // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 8 (8), pp. 1112–1118.