

УДК 539.3

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ ПРОДОЛЬНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**© 2023 г. И. С. Никитин<sup>1,\*</sup>, Н. Г. Бурого<sup>1,2,\*\*</sup>, А. Д. Никитин<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: i\_nikitin@list.ru

\*\*e-mail: buragong@yandex.ru

\*\*\*e-mail: nikitin\_alex@bk.ru

Поступила в редакцию 09.01.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Рассматривается задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. Предполагается, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате. С использованием метода асимптотических разложений по малому параметру, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5–3. Численные расчеты ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение-сжатие и кручение. Пьезоэлектрические установки для проведения таких высокочастотных испытаний основаны на общем принципе резонансного нагружения корсетных образцов с частотой порядка 20 кГц.

*Ключевые слова:* сверхмногоцикловая усталость, колебания стержней, переменное сечение, растяжение-сжатие, теория возмущений, аналитическое решение, высокочастотные испытания, пьезоэлектрическая установка

DOI: 10.31857/S003282352302011X, EDN: UAJFFL

**1. Введение.** Уравнения продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней с переменным сечением приведены в различных учебниках и монографиях, в частности, в [1]. Задача определения собственных частот и форм продольных и крутильных колебаний стержней с переменным сечением исследовалась многими авторами [2–6]. Обзор работ по определению собственных частот и форм изгибных колебаний можно найти в [7], решение конкретных задач дано в [8–12]. Основные приложения связаны с определением поправок к резонансным частотам и формам колебаний, обусловленных дефектами поверхности – при продольных колебаниях [2–4], при крутильных колебаниях [5, 6], при изгибных колебаниях [10, 11], при наличии внутренних дефектов (трещин) [12].

Стержни переменного сечения используются при проведении экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении образцов на растяжение-сжатие, кручение или трехточечный изгиб [13]. Пьезоэлектрические установки для проведения высокочастотных СВМУ испытаний осуществляют циклическое нагружение: растяжением–сжатием и кручением [13]. Эти испытательные установки обладают общим принципом резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Испытания на растяжение-сжатие и кручение контролируются и программируются с использованием одного и того же программного комплекса. Различие между машинами состоит лишь в типе пьезоэлектрического конвертера и геометрии волновода. Для реализации осевых нагружений используется конвертер, обеспечивающий продольные смещения малой амплитуды (10–30 мкм). Для крутильного нагружения используется конвертер, обеспечивающий непосредственно вращательные колебания с амплитудой 0.10–0.25 миллирадиан. Для случая кручения резонансные длины оказываются меньше, чем для осевых испытаний [13]. Базовая корсетная форма осесимметричного стержня имеет вид “песочных часов” для создания квазиоднородного напряженного состояния с повышенным уровнем напряжений в центральной, узкой части образца.

В данной работе основной интерес представляет исследование влияния геометрии стержня на первую резонансную частоту и антисимметричную форму продольных или крутильных колебаний при исследовании сверхмногоциклового усталостного разрушения (СВМУ) с числом циклов  $N > 10^8$ .

Пьезоэлектрические установки с несущей частотой порядка 20 кГц имеют достаточно узкий частотный диапазон отклонений при эксплуатации, составляющий  $\pm 500$  Гц. Поэтому оценка и определение чувствительности и влияния геометрических параметров образца (общей длины, длины участка переменного сечения и характеристик его изменчивости) на резонансную частоту является необходимой при проектировании экспериментальных установок и образцов из различных металлических сплавов.

Для определения поправок к резонансной частоте и форме собственных продольных и крутильных колебаний для стержня переменного сечения используется теория возмущений [14]. Теория возмущений использовалась в [4] при решении обратной задачи восстановления распределения плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня переменного сечения по частотам собственных колебаний. В данной работе рассматривается прямая задача нулевого и первого приближений для упрощенного, но достаточно общего представления формы стержня, для которой удалось получить явные решения в удобной аналитической форме.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение колебаний общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( I(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Пусть параметры колебательной системы зависят от продольной координаты  $x$ . Для продольных колебаний  $I(x) = E(x)S(x)$ ,  $A(x) = S(x)$ ,  $E$  – модуль Юнга стержня,  $S$  – переменная площадь сечения. Для крутильных колебаний  $I(x) = \mu(x)J(x)$ ,  $A(x) = J(x)$ , где  $\mu$  – модуль сдвига стержня,  $J$  – полярный момент инерции. Поскольку уравнения продольных и крутильных колебаний отличаются только обозначениями, далее будем вести изложение для случая продольных колебаний стержня.

Рассматривая гармонические колебания  $w(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ , приходим к уравнению для амплитуды

$$\frac{d}{dx} \left( I \frac{du}{dx} \right) + \rho S \omega^2 u = 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$du/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l \quad (2.2)$$

2.1. Построение общего решения методом разложения по малому параметру. Рассмотрим случай малого изменения параметров стержня по длине

$$I = I_0 + \varepsilon I_1(x) + \dots, \quad S = S_0 + \varepsilon S_1(x) + \dots; \quad \varepsilon \ll 1$$

Тогда, решение для функций смещений и собственной частоты также будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$$

Подставим разложения в уравнение (2.1) и в граничные условия (2.2) и, приравнявая члены при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ , получаем задачи нулевого а) и первого б) порядков для определения собственных частот и форм колебаний. Введя обозначение  $k^2 = \rho S_0 \omega_0^2 / I_0$  и безразмерные геометрические и упругие параметры стержня, получим

$$u_0'' + k^2 u_0 = 0, \quad u_0' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l$$

$$u_1'' + k^2 u_1 = -\left(\bar{I}_1' u_0' + k^2 (\bar{S}_1 - \bar{I}_1) u_0 + 2k^2 \bar{\omega}_1 u_0\right), \quad u_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l,$$

где  $\bar{I}_1 = I_1 / I_0$ ,  $\bar{S}_1 = S_1 / S_0$ ,  $\bar{\omega}_1 = \omega_1 / \omega_0$ .

Тогда, учитывая, что

$$I(x) = E(x)S(x) = E_0 S_0 + \varepsilon (E_1 S_0 + E_0 S_1) + \dots, \quad I_0 = E_0 S_0, \quad I_1 = E_1 S_0 + E_0 S_1,$$

получим

$$\bar{S}_1 - \bar{I}_1 = S_1 / S_0 - (E_1 S_0 + E_0 S_1) / (E_0 S_0) = -\bar{E}_1, \quad \bar{E}_1 = E_1 / E_0, \quad \bar{I}_1 = I_1 / I_0$$

2.2. Решение для поправок к собственным частотам и формам колебаний. Будем рассматривать антисимметричное решение задачи а) нулевого приближения, которое имеет простой вид:

$$u_{0n} = U_n \sin k_n x, \quad \cos k_n l = 0$$

Отсюда получаем значения параметра  $k$  (нулевого приближения собственных частот):

$$k_n l = \frac{1}{2} \pi + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что наименьшее значение  $k_n$  равно  $k_0 = \pi / (2l)$ .

С учетом решения для нулевого приближения задача б) для первого приближения запишется в виде неоднородного дифференциального уравнения с граничными условиями:

$$u_{1n}'' + k_n^2 u_{1n} = -U_n k \left( \bar{I}_1' \cos k_n x - k_n \bar{E}_1 \sin k_n x + 2k_n \bar{\omega}_{1n} \sin k_n x \right)$$

$$u_{1n}' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l$$

Будем решать эту задачу методом вариации постоянных:

$$u_{1n}(x) = A_{1n}(x) \cos k_n x + A_{2n}(x) \sin k_n x$$

Коэффициентные функции  $A_{i,n}$  находятся из системы уравнений:

$$A_{1n}' \cos k_n x + A_{2n}' \sin k_n x = 0$$

$$A'_{1n}(-k_n \sin k_n x) + A'_{2n}(k_n \cos k_n x) = -U_n k_n \left( \bar{I}'_1 \cos k_n x - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n x + 2k_n \bar{\omega}_{1n} \sin k_n x \right),$$

решение которой имеет вид:

$$A_{1n} = U_n \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} (k_n(x+l) - \sin k_n x \cos k_n x) \right) + B_{1n}$$

$$A_{2n} = -U_n \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \cos k_n \xi d\xi - \bar{\omega}_{1n} \cos^2 k_n x \right) + B_{2n}$$

$$f_n(\xi) = \bar{I}'_1 \cos k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi$$

Учитывая граничные условия при  $x = \pm l$

$$u'_{1n} = 0,$$

имеем:

$$x = \pm l: \quad A_{1n} \sin k_n x - A_{2n} \cos k_n x = 0, \quad \cos k_n l = 0$$

Тогда, из граничных условий при нахождении:

$$x = -l: \quad B_{1n} = 0; \quad x = l: \quad A_{1n}(l) = \int_{-l}^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + 2k_n l \bar{\omega}_{1n} = 0$$

Таким образом, поправка к частоте равна:

$$\bar{\omega}_{1n} = -\frac{1}{2k_n l} \int_{-l}^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi$$

Если фиксировать полную амплитуду колебаний величиной  $U_n$ , то константу  $B_{2n}$  можно положить равной нулю. Тогда поправка к собственной форме колебаний примет вид:

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \cos k_n \xi d\xi \right) \sin k_n x \right\},$$

или, с учетом выражения для  $f_n(\xi)$ :

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x (\bar{I}'_1 \cos k_n \xi \sin k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin^2 k_n \xi) d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x (\bar{I}'_1 \cos^2 k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi \cos k_n \xi) d\xi \right) \sin k_n x \right\}$$

Если переменные по длине стержня площадь сечения и модуль Юнга являются четными функциями пространственной координаты, то функция  $f_n(\xi) = \bar{I}'_1 \cos k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi$  является нечетной. Тогда поправка к собственной частоте колебаний будет равна:

$$\bar{\omega}_{1n} = -\frac{1}{k_n l} \int_0^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi$$

Подставляя выражение для  $f_n(\xi)$ , получим окончательно:

$$\bar{\omega}_{1n} = \frac{1}{l} \left( \int_0^l (\bar{I}'_1 - \frac{1}{2} \bar{E}'_1) \cos 2k_n \xi d\xi + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{E}'_1 d\xi \right)$$

2.3. *Случай однородного стержня переменного сечения.* Для однородного по модулю упругости стержня  $E_1 = 0$ ,  $\bar{I}_1 = \bar{S}_1$ . Для этого случая первые поправки

$$\bar{\omega}_{1n} = \frac{1}{l} \left( \int_0^l \bar{S}_1 \cos 2k_n \xi d\xi \right)$$

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos k_n \xi \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos^2 k_n \xi d\xi \right) \sin k_n x \right\}$$

Проводя интегрирование по частям, в этом случае получим

$$u_{1n}(x) = k_n U_n \left\{ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos(2k_n \xi) d\xi \cos(k_n x) (x+l) - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos(k_n x - 2k_n \xi) d\xi \right\}$$

Для первой моды  $k_0 = \pi/(2l)$ :

поправка к собственной частоте равна

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (2.3)$$

поправка к собственной форме равна

$$u_1(x) = \frac{\pi U}{2l} \left\{ \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \frac{(x+l)}{2l} - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l} - \frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \right\} \quad (2.4)$$

### 3. Примеры аналитических расчетов собственной частоты и формы колебаний.

3.1. *Тригонометрическое представление формы стержня.* Рассмотрим конкретную форму осесимметричного стержня радиуса  $r(x) = r_0 + \varepsilon r_1(x)$ ,  $S(x) = S_0 + \varepsilon S_1(x)$ ,  $S_0 = \pi r_0^2$ ,  $S_1(x) = 2\pi r_0 r_1(x)$ ,  $\bar{S}_1 = 2r_1(x)/r_0$ .

Пусть радиус стержня может быть представлен в следующем виде:

$$r(x) = r_0(1 - \varepsilon \cos(\pi x/l))$$

Определим первую собственную частоту и антисимметричную моду колебаний при  $k_0 = \pi/(2l)$  по формуле (2.3).

Поправка к частоте равна:

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{2}{l} \int_0^l \cos^2(\pi\xi/l) d\xi = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{1 + \cos(2\pi\xi/l)}{2} d\xi = -1 - \frac{1}{l} \frac{\sin(2\pi\xi/l)}{2\pi/l} \Big|_0^l = -1$$

Собственная частота определится формулой:

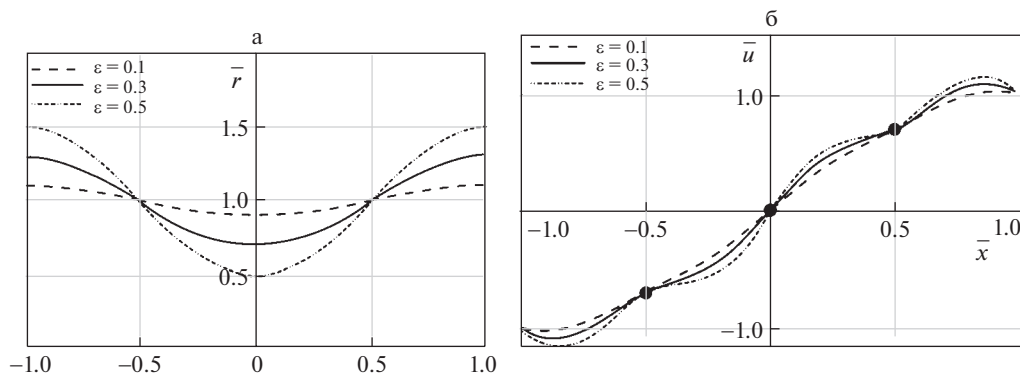
$$\omega = \omega_0(1 - \varepsilon + \dots), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

Вычисляя интегралы (2.4), находим поправку к собственной форме:

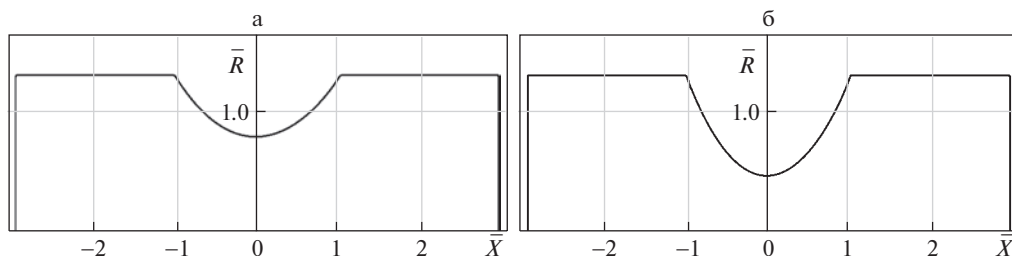
$$u_1(x) = \frac{U}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Первая антисимметричная собственная форма колебаний имеет вид:

$$u(x) = U \left( \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \dots \right)$$



**Рис. 1.** Форма стержня – а) и собственная форма колебаний – б) при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  – штрихованная,  $\varepsilon = 0.3$  – сплошная,  $\varepsilon = 0.5$  – штрих-пунктир.



**Рис. 2.** Форма стержня при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.3$  (а),  $\varepsilon = 0.5$  (б).

Для наглядной иллюстрации поведения решений задачи для конкретных функций переменного радиуса поперечного сечения на рис. 1,а представлены безразмерные формы стержня  $\bar{r} = r(\bar{x})/r_0$ , а на рис. 1,б безразмерные собственные формы колебаний  $\bar{u} = u(\bar{x})/U$  при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5$  в зависимости от безразмерной продольной координаты  $\bar{x} = x/l$ .

*3.2. Экспериментальные корсетные образцы в форме “песочных часов”.* Выберем следующее, часто используемое для образцов в высокочастотных усталостных испытаниях, представление переменного радиуса осесимметричного стержня [8]:

$$r(x) = \begin{cases} R_1 \operatorname{ch}(\alpha x), & \text{при } |x| < l_2 \\ R_2, & \text{при } l_2 \leq |x| \leq l, \end{cases}$$

где значение параметра  $\alpha$  определяется равенством  $R_2 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_2)$ .

Выберем срединный радиус стержня равным  $R_0 = (R_1 + R_2)/2$ , что соответствует горизонтальной координате  $l_0$  ( $R_0 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_0)$ ). Далее считаем, что отклонение наружного и внутреннего радиусов стержня от среднего радиуса невелико  $R_2 = R_0(1 + \varepsilon)$ ,  $R_1 = R_0(1 - \varepsilon)$ .

Характерная форма такого стержня со значительным изменением поперечного сечения показана на рис. 2,а для  $\varepsilon = 0.3$  и на рис. 2,б для  $\varepsilon = 0.5$ , введены безразмерные переменные  $\bar{R} = r(\bar{X})/R_0$  для формы стержня и  $\bar{X} = x/l_2$  для продольной координаты.

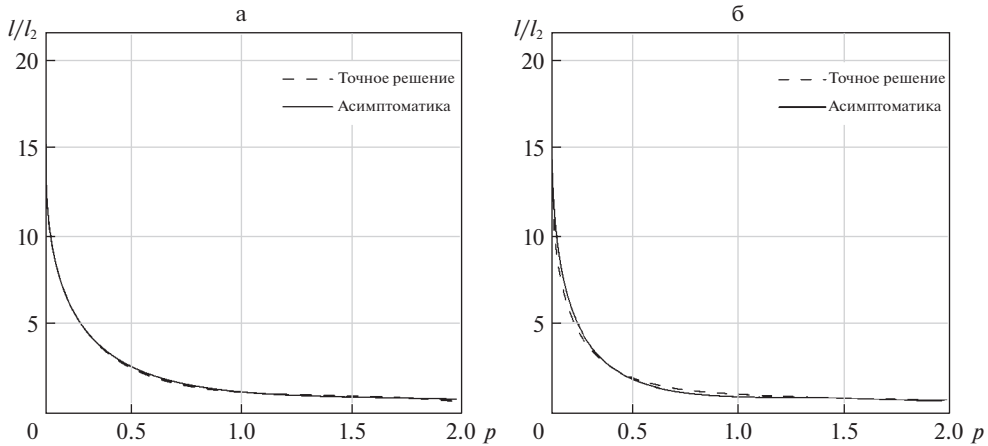


Рис. 3. Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.96$ , б)  $R_2/R_1 = 2.1$ ,  $\varepsilon = 0.355$ ,  $\gamma = 1.38$ .

Определим унифицированные представления этой формы стержня с учетом малости параметра  $\varepsilon$

$$R_2/R_1 \sim 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2, \quad R_0/R_1 \sim 1 + \varepsilon + \varepsilon^2, \quad \alpha \sim \frac{2}{l_2} \sqrt{\varepsilon} \left(1 - \frac{5}{4} \varepsilon\right)$$

С учетом этих оценок определим поправки к собственной частоте для первой антисимметричной моды:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{l}{l_2} \left[ \cos\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) - \frac{1}{\pi l_2} \sin\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) \right]$$

Введя обозначение  $\delta = \pi l_2/l$ , получим компактную формулу для поправки к собственной частоте:

$$\bar{\omega}_1 = 8[\cos \delta - (\sin \delta)/\delta]/(\pi \delta)$$

Частота первого резонанса будет вычисляться по следующей формуле:

$$\omega = \omega_0[1 + 8\varepsilon(\cos \delta - (\sin \delta)/\delta)/(\pi \delta)]; \quad \omega_0 = \pi c/(2l), \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

Для данной формы стержня существует точная формула для первой частоты собственных колебаний [8], которая позволяет оценить точность полученной приближенной асимптотической формулы в зависимости от отношения  $R_2/R_1$ .

Точная формула связи геометрии стержня с первой резонансной частотой  $\omega$  в безразмерных переменных имеет вид:

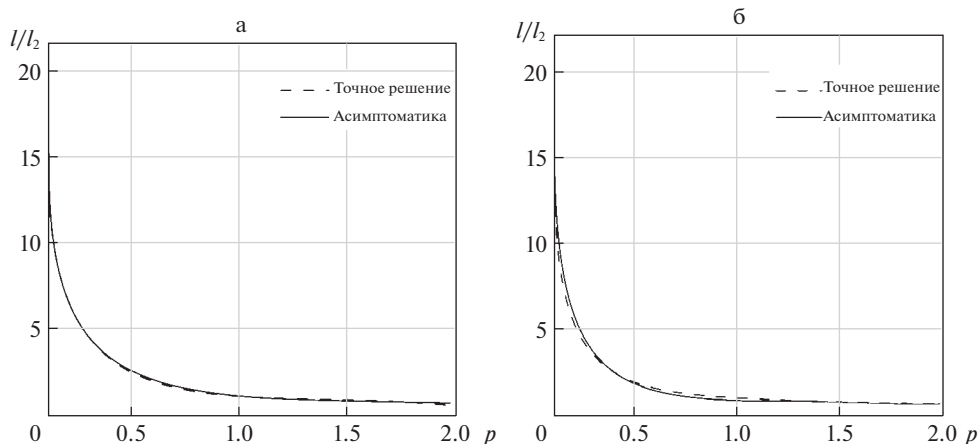
$$l/l_2 = 1 + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\gamma^2/p^2 - 1} \operatorname{cth} \left( p \sqrt{\gamma^2/p^2 - 1} \right) - \operatorname{th}(\gamma) \gamma/p \right\} / p,$$

где  $\gamma = \operatorname{arcsch}(R_2/R_1)$ ,  $p = kl_2$ ,  $\alpha = \gamma/l_2$ ,  $\beta = k\sqrt{\gamma^2/p^2 - 1}$ .

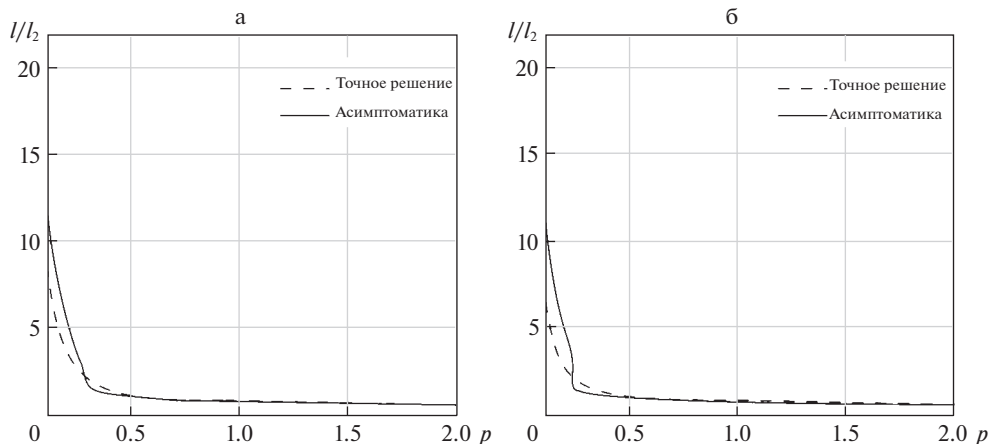
В этих же обозначениях асимптотическая формула для безразмерной частоты  $p$

$$p = \delta[1 + 8\varepsilon(\cos \delta - (\sin \delta)/\delta)/(\pi \delta)]/2, \quad \varepsilon = (R_2/R_1 - 1)/(R_2/R_1 + 1), \quad \delta = \pi l_2/l$$

Для оценки точности асимптотических формул построим графики зависимостей  $l/l_2(p)$  для точной и приближенной формул при различных значениях  $R_2/R_1$  и  $\varepsilon$ . Эти графики попарно представлены на рис. 3–5, где прерывной линией изображены кривые, соответствующие точному решению, а сплошной линией – решению по асимптотическим формулам.



**Рис. 4.** Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 2.5$ ,  $\varepsilon = 0.429$ ,  $\gamma = 1.56$ , б)  $R_2/R_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\gamma = 1.76$ .



**Рис. 5.** Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 4$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\gamma = 2.06$ , б)  $R_2/R_1 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.67$ ,  $\gamma = 2.30$ .

Из рис. 3–4 видно, что при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.2$  решения на графике неоглицимы, даже при не малых значениях  $\varepsilon = 0.35$ – $0.43$  ошибка не превышает 2.5%.

Только при более высоких значениях  $\varepsilon > 0.5$ , когда параметр  $\varepsilon$  ни в коем случае не может считаться малым, графики серьезно расходятся в диапазоне  $0 < p < 0.4$  (рис. 5).

Однако можно отметить такой любопытный факт. Для типичных образцов из титанового сплава, применяемых в пьезоэлектрической испытательной установке с эксплуатационной частотой 20 кГц,  $E = 115$  ГПа,  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 5055$  м/с и геометрическим параметром  $l_2 = 1.5$  см, величина  $p = 0.373$ . Как видно из рис. 3–5, в окрестности этой точки графики точного и приближенного решения пересекаются, и точность асимптотического решения резко возрастает до величин  $< 1\%$ . Поэтому использование полученных асимптотических формул при типичных значениях параметров уста-



новки и экспериментальных образцов обеспечивает высокую точность в доли процента для определения их геометрических характеристик.

**Заключение.** Решена задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. В предположении, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы для первой антисимметричной моды хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5–3.

Проведены численные расчеты геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение–сжатие.

Исследование выполнено в рамках госзадания ИАП РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
2. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 98–107.
3. *Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В.* Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 136–144.
4. *Ватульян А.О., Бочарова О.В.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. ж. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
5. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // Вестн. УГАТУ. Машиностр. и технич. науки. 2022. Т. 26. № 1 (95). С. 22–30.
6. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93–98.
7. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О колебаниях неоднородных балок // Инжен. вестн. Дона. 2017. № 3.
8. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // Вестн. Башк. ун-та. Машиностр. и технич. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 774–779.
9. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения // Промышл. и гражд. строит. 2019. № 8. С. 93–98.
10. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // Дефектоскопия. 2014. № 11. С. 37–47.
11. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
12. *Лебедев И.М., Шифрин Е.И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 50–70.
13. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New York: Marcel Dekker, 2005. 328 p.

## Natural Frequency and Modes of the Longitudinal and Torsional Vibrations in the Bars with Variable Cross Section

I. S. Nikitin<sup>a,#</sup>, N. G. Burago<sup>a,b,##</sup>, and A. D. Nikitin<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: i\_nikitin@list.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: buragong@yandex.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: nikitin\_alex@bk.ru*

The paper is focused on the problem of natural frequencies and modes determination based on perturbation theory for longitudinal and torsional vibrations in bars with variable cross section. The mechanical properties and cross section geometry of the bar are changing small from the average value with regard to longitudinal coordinate. Based on the theory of small perturbations the analytical solution is obtained for natural frequencies and modes of the stationary harmonic vibrations in bars. The efficiency of the proposed method is supported by comparison and good agreement of the obtain results with a sharp solution for a given cross section profiles. It was established that the approximate solution is working good up to the ratio 2.5–3 between maximum and minimum diameter of cross section. The results of numerical simulations are aimed to estimate the geometry and elastic behavior of the metallic specimens for very high cycle fatigue experimental investigation under axial tension-compression and torsion loadings. The piezoelectric fatigue testing system and procedure is based on stationary vibration excitation in the metallic specimen at the first mode natural frequency.

*Keywords:* very high cycle fatigue, vibrations in bars, variable cross section, tension-compression, perturbation theory, analytical solution, high frequency tests, piezoelectric fatigue testing system

### REFERENCES

1. Babakov I.M. Oscillation Theory. Moscow: Nauka, 1965. 560 p.
2. Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. Identification of defects in the cross section of the rod by natural frequencies and features of the form of longitudinal vibrations // Mech. Solids, 2019, no. 6, pp. 98–107.
3. Akulenko L.D., Baydulov V.G., Georgievskiy D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a rod with increasing cross-sectional defect // Mech. Solids, 2017, no. 6, pp. 136–144.
4. Vatulyan A.O., Bocharova O.B. On the reconstruction of the density and Young's modulus for an inhomogeneous rod // Acoust. Phys., 2009, vol. 55, no. 3, pp. 275–282.
5. Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Torsional vibrations of a rod of non-constant section // Bull. USATU. Mech. Engng.&Engng. Sci., 2022, vol. 26, no. 1 (95), pp. 22–30.
6. Khakimov A.G. On natural oscillations of a shaft with a model of an artificial defect // Defectoscopy, 2010, no. 6, pp. 93–98.
7. Gusev B.V., Saurin V.V. On vibrations of inhomogeneous beams // Don Engng. Gazette, 2017, no. 3.
8. Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Exact solutions of the equation describing transverse vibrations of a bar with variable cross section and their application // Bull. USATU. Mech. Engng.&Engng. Sci., 2019, vol. 23, no. 4, pp. 774–779.
9. Gusev B.V., Saurin V.V. On free bending vibrations of concrete beams of variable cross section // Industrial&Civil Constr., 2019, no. 8, pp. 93–98.
10. Vatulian A.O., Osipov A.V. On one approach to determining the parameters of a defect in a beam // Defectoscopy, 2014, no. 11, pp. 37–47.
11. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage to a notched cantilever beam // Defectoscopy, 2009, no. 6, pp. 83–89.
12. Lebedev I.M., Shifrin E.I. Identification of transverse cracks in a bar by natural frequencies of transverse vibrations // Mech. Solids, 2020, no. 4, pp. 50–70.
13. Naiphe A.Kh. Introduction to Perturbation Methods. Moscow: Mir, 1984. 535 p.
14. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. N.Y.: Marcel Dekker, 2005. 328 p.