

УДК 539.3

**О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ШТАМПОМ
В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ****© 2023 г. В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова^{1,**}, О. М. Бабешко^{2,***},
М. В. Зарецкая^{2,****}, В. С. Евдокимов^{2,*****}**¹*Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*²*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия***e-mail: babeshko41@mail.ru****e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*****e-mail: babeshko49@mail.ru******e-mail: zarmv@mail.ru*******e-mail: evdok_vova@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

В работе впервые строго исследуется двумерная динамическая контактная задача о действии деформируемого штампа на четверть плоскости многослойной среды. В отличие от случая абсолютно твердого штампа, деформируемый штамп вносит дополнительные особенности, состоящие в возможности возникновения дискретных резонансов, предсказанных академиком И.И. Воровичем. Показано, что использование метода, основанного на применении блочных элементов, позволяет получать уравнение, описывающее резонансные частоты. Для исследования контактных задач с деформируемым штампом из материалов сложной реологии, в том числе, смарт-материалов. Вначале рассмотрен случай деформируемого штампа из материала простой реологии, которая описывается уравнениями Гельмгольца. Решения граничных задач для штампов сложной реологии, представляются комбинацией решений граничных задач для штампов простой реологии.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, интегральное уравнение Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S0032823523020030, **EDN:** TYZHLI

1. Введение. Углубленному теоретическому исследованию контактных задач с деформируемым штампом, особенно динамических, посвящено ограниченное количество работ. Большинство из них связано с применением различных пакетов программ, например, COMSOL. Они дают, как правило, лишь качественные картинки в статических задачах, не проникая в глубинные их особенности. Наиболее глубокие исследования в этой области были выполнены И.И. Воровичем [1, 2]. Им были изучены спектральные свойства неоднородной полосы и исследованы возможности возникновения дискретных резонансов. В связи со сложностью решения динамических граничных задач для деформируемого штампа, в [3] была предложена модель деформируемого штампа, состоящая из абсолютно твердых массивных штампов, соединенных упругой пружиной. Возможность учета деформаций штампов, состоящих из материалов сложной реологии, открыл метод блочного элемента и связанный с ним фрактальный универсальный метод моделирования [4]. Этот подход позволяет разла-

гать решения граничных задач для деформируемого штампа из материала сложной реологии на составляющие решений граничных задач, для штампов из материалов простых реологий, что значительно облегчает анализ. Именно этот подход был использован в исследованиях контактных задач для деформируемых штампов в форме полос, действующих на многослойное основание [5]. В процессе исследования этой контактной задачи методом блочного элемента обнаружено, что в отличие от случаев абсолютно твердого штампа, решения для деформируемых штампов зависят от функционалов составных решений, вид которых полностью определяется в процессе решения граничной задачи. Выяснено, что именно с их помощью строятся уравнения для определения упомянутых выше частот дискретных резонансов. Показано, что применявшийся подход позволяет исследовать контактную задачу с деформируемым штампом в том случае, если имеется решение контактной задачи для случая абсолютно жесткого штампа. Определенные возможности в этом отношении дают работы [6–15]. Исследование особенностей рассматриваемой двумерной контактной задачи с деформируемым штампом в четверть плоскости на многослойной среде стало возможным благодаря результату, полученному в [16] в этой области для абсолютно жесткого штампа. На его основе изучается контактная задача с деформируемым штампом простой реологии, описываемым уравнением Гельмгольца. Возможность переноса исследований на случай штампов из материалов сложных реологий дает подход [4].

В работе построено высокоточное решение этой контактной задачи, дающее возможность переноса этого метода для исследования контактных задач с деформируемым штампом более сложных реологий. В отличие от одномерного случая, где удается построить аналитически точное решение контактной задачи для деформируемого штампа [5], в случае двумерной задачи построены точные решения для абсолютно жесткого штампа и высокоточные приближенные решения контактной задачи для деформируемого штампа.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать линейно упругую многослойную среду конечной толщины, на верхней границе которой расположен деформируемый штамп, занимающий область первого квадранта, рис. 1. Предполагается, что многослойная среда сформирована изотропными упругими слоями, так, как это описано в [3]. Предполагается, что штамп колеблется вертикально по гармоническому закону, описываемому функцией $e^{-i\omega t}$. Ось декартовой системы координат ox_3 располагается на верхней границе многослойной среды, и направлена по нормали наружу. Остальные оси расположены в касательной плоскости. Принимая во внимание возможность применения универсального метода моделирования [4, 16], позволяющего представлять решения граничной задачи для деформируемого штампа из материала сложной реологии разложенными по решениям граничных задач для уравнений простых реологий, применим в дальнейшем этот подход. Он состоит в том, что решение векторной граничной задачи, например, для системы уравнений Ламе, может быть представлено комбинацией решений скалярных, то есть, отдельных граничных задач, решенных в этой же области. Для выбора уравнений скалярных граничных задач необходимо брать те из них, которые доказаны либо преобразованием Галеркина, либо методом потенциалов [4]. Для системы уравнений Ламе доказано, что необходимо брать скалярные граничные задачи для уравнения Гельмгольца. Для системы уравнений Ламе необходимо брать две скалярные граничные задачи для уравнений Гельмгольца, продиктованных преобразованиями Галеркина или потенциалами. При этом не существенно, какой материал описывается скалярной граничной задачей для уравнения Гельмгольца, важно, чтобы он соответствовал требованиям указанных выше преобразований. В качестве граничных условий берутся условия Дирихле или Неймана.

Известно, что преобразования Галеркина можно применять ко множеству систем дифференциальных уравнений механики и физики [3]. Решения для всех их, в конечном счете, представляются разложениями решений скалярных граничных задач, как

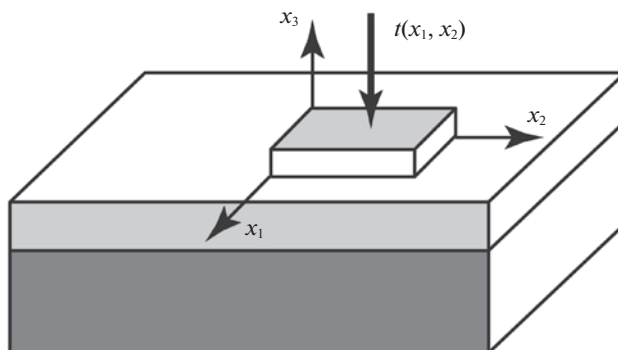


Рис. 1. Часть неограниченной области первого квадранта, занятой деформируемым штампом, действующим на многослойную среду.

описано и опубликовано, в качестве примера, для системы уравнений Ламе. Будем считать, что материал деформируемого штампа описывается уравнением Гельмгольца, рассматриваемым в первом квадранте, а граничная задача является скалярной. В зависимости от реологий материалов для систем дифференциальных уравнений, необходимо находить решения нескольких граничных задач для уравнений Гельмгольца с разными параметрами.

Внешние воздействия на объект будут задаваться на границе — условиями Дирихле или Неймана, а также распределенными или сосредоточенными воздействиями на поверхности $t(x_1, x_2)$.

Построенные решения интегрального уравнения в двумерном случае обладают теми же особенностями решения вблизи границ (описываемыми функциями $\sqrt{x_1}$ и $\sqrt{x_2}$), что и в работе [16], а в угловой точке — интегрируемой особенностью, требующей дополнительного исследования.

Достоинством настоящей работы по сравнению с работой [16] явилась возможность задания внешних воздействий, не требующих разделения переменных, что открывает путь к решению задач для анизотропных материалов.

3. Граничная задача для деформируемого штампа. Рассмотрим граничную задачу для уравнений Гельмгольца, моделирующего материал деформируемого штампа простой реологии

$$(\Delta + k^2)\psi(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2); \quad k = c\omega, \quad c = \text{const} \quad (3.1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\psi(x_1, x_2)$ — решение граничной задачи для уравнений Гельмгольца, $q(x_1, x_2)$ — воздействие на штамп со стороны многослойной среды в области контакта, $t(x_1, x_2)$ внешнее воздействие на штамп сверху. Для уравнения Гельмгольца ставится граничная задача Дирихле вида

$$\psi_1(x_1, x_2) = \psi_1(0, x_2), \quad \psi_2(x_1, x_2) = \psi_2(x_1, 0) \quad (3.2)$$

Вводится обозначение $s(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2)$. Алгоритм метода блочного элемента, включающий этапы внешней алгебры, внешнего анализа и фактор-топологий, для совокупности блоков, описан во многих работах. После его применения к рас-

смагнриваемой граничной задаче, получаем внешнюю форму в преобразовании Фурье, в виде

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_1, \alpha_2) = & \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1 \right] \langle \Psi_1(0, \alpha_2) - \Psi_1(0, \alpha_{2+}) \rangle + \\ & + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1 \right] \langle \Psi_2(\alpha_1, 0) - \Psi_2(\alpha_{1+}, 0) \rangle + S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+}) = & -Q(\alpha_1, \alpha_2) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \\ & + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) + T(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1, \alpha_{2+}) \\ \alpha_{1+} = & i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\alpha_m^2 - k^2} > 0; \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В дальнейшем, для краткости, если оговаривается отдельно, прописными буквами обозначены преобразований Фурье функций, обозначенных строчными буквами, например,

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx$$

Первые четыре члена справа у функции $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+})$ представляют преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ и неизвестные функционалы $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$, $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$ от искомого контактного напряжения. Остальные члены справа представляют преобразования Фурье и функционалы от задаваемых внешних воздействий. По опыту исследования одномерной контактной задачи [5], вначале должны быть определены контактные напряжения под деформируемым штампом, после этого, определяются функционалы.

4. Двумерное интегральное уравнение Винера–Хопфа. Контактная задача о действии деформируемого штампа на многослойную среду, применяемым в статье подходом может быть исследована, если удастся точно решить интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для абсолютно жесткого штампа при задании в правой части произвольной функции. В работе [16] впервые решено точно двумерное интегральное уравнение Винера–Хопфа в четверти плоскости, применением разделения переменных. В настоящей работе развивается другой подход решения этого уравнений для произвольной правой части, не требующий разделения переменных. Ниже дается его краткое изложение. Интегральное уравнение контактной задачи о действии абсолютно твердого штампа на многослойную среду при наличии гармонических воздействий на штамп, в декартовой системе координат в первом квадранте имеет вид [16].

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2); \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq \infty, \\ k(x_1, x_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha x)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} \\ u = & \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(u)}{P_n(u)}, \quad R_n(u) = (u^2 - z_n^2) \\ & P_n(u) = (u^2 - \xi_n^2), \quad K(u) = \frac{1}{u} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обозначения работы [16] полностью сохранены. Здесь γ_1, γ_2 – контуры, лежащие на вещественной оси и отклоняющиеся от нее в динамических задачах гармонической во времени вибрации, лишь обходя вещественные полюса, по малым полуокружностям, если они возникают [16]. Не усложняя проблему, выше рассматривается случай изотропной задачи теории упругости. Функции $R(u), P(u)$ являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции $R(u)$ и $P(u)$ – целые функции первого порядка и конечного типа, то есть являются трансцендентными, в частности, полиномами. В принятых обозначениях целая функция $R(u)$ обращается нуль на множествах значений $u_n = \pm z_n$. Разрешая эти соотношения относительно переменных α_s ; $s = 1, 2$, имеем нули в форме $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}, \alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$. Соответственно, целая функция $P(u)$ имеет нули на множествах $u_n = \pm \zeta_n, \alpha_{12r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - \zeta_r^2}, \alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \zeta_r^2}$. Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости. Для нулей приняты обозначения: плюс – принадлежность верхней полуплоскости комплексной плоскости, минус – нижней.

$$R_m(u) = R_{m\pm}(\alpha_m) R_{m\mp}(\alpha_m), \quad R_{m\mp}(\alpha_m) = T_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}}$$

$$T_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

$$P_m(u) = P_{m\pm}(\alpha_m) P_{m\mp}(\alpha_m), \quad P_{m\mp}(\alpha_m) = S_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}} \quad (4.2)$$

$$S_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

$$K_{+m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m-}(\alpha_m)}{P_{m-}(\alpha_m)}, \quad K_{-m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m+}(\alpha_m)}{P_{m+}(\alpha_m)}$$

После деления $R_m(u)$ на $P_m(u)$, возникают мероморфные функции, обозначенные $K(u)$. Их нулями являются $\pm z_{mp}$. Примем правую часть $f(x_1, x_2)$ интегрального уравнения (4.1) в форме

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.3)$$

Для построения решения этого уравнения, не требуя разделения переменных, воспользуемся подходом, изложенным в [16] и будем искать решение в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)} + \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{21s} x_2)} + D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)}, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{21s} x_2)}$$

$$\varphi_*(x_1, x_2) = D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

Причем, справедливы соотношения (ср. с [16])

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{C_{s1}}{(\beta_{11s} + \alpha_1)(\beta_{22s} + \alpha_2)}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{C_{s2}}{(\beta_2 + \beta_{21s+})(\beta_1 + \alpha_1)}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} D(\eta_1) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{D(\eta_1, \eta_2)}{(\alpha_1 - \eta_1)(\alpha_2 - \eta_2)}$$

Следуя [16], получим решение интегрального уравнения в форме

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_{\text{ж}}(x_1, x_2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(\eta_1 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(\eta_2 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.4)$$

Построенное решение двумерного уравнения Винера–Хопфа в первом квадранте легко трансформируется в решения одномерных уравнений Винера–Хопфа, в случаях, когда справедлива замена $K(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow K(\alpha_1)$ или $K(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow K(\alpha_2)$.

5. Интегральное уравнение для деформируемого штампа. Составим интегральное уравнение для определения контактных напряжений под деформируемым штампом. Для этого с учетом формул (3.1)–(3.4) представим перемещение $\psi(x_1, x_2)$ деформируемого штампа в области контакта в виде упакованного блочного элемента

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\omega(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \quad (5.1)$$

Преобразуем представление внешней формы, разделив в ней неизвестные и заданные составляющие

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2) = -Q(\alpha_1, \alpha_2) + Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$Q_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) \quad (5.2)$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = T(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1, \alpha_{2+}) +$$

$$+ \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1 \right] \langle \Psi_1(0, \alpha_2) - \Psi_1(0, \alpha_{2+}) \rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1 \right] \langle \Psi_2(\alpha_1, 0) - \Psi_2(\alpha_{1+}, 0) \rangle$$

Выберем в интегральном уравнении (4.1) в качестве неизвестной функции $\varphi(x_1, x_2)$ контактные напряжения $q(x_1, x_2)$, возникающие под деформируемым штампом. Приравняем вертикальные перемещения (4.1) поверхности многослойной среды $f(x_1, x_2)$ параметрам вертикального перемещения (5.1) $\psi(x_1, x_2)$ деформируемого штампа снизу. Применяя к этому равенству преобразование Фурье, получим соотношение

$$\frac{-Q(\alpha_1, \alpha_2) + Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} = K(\alpha_1, \alpha_2) Q(\alpha_1, \alpha_2)$$

В результате приходим к функциональному уравнению

$$M(\alpha_1, \alpha_2)Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}$$

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}$$

С учетом (4.2), функция $M(\alpha_1, \alpha_2)$ принимает вид

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R(u) \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}{P(u) \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right]} \quad (5.3)$$

Преобразование Фурье правой части двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для деформируемого штампа (4.3) представимо в форме

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2)} \quad (5.4)$$

Применив к этому соотношению обращение Фурье, получаем интегральное уравнение контактной задачи о действии деформируемого штампа на многослойную среду в виде

$$\int_0^\infty \int_0^\infty m(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (5.5)$$

$$m(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} M(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

6. Дисперсионные уравнения частот дискретных резонансов академика И.И. Воровича.

Вспользуемся построенным решением интегрального уравнения Винера–Хопфа в первом квадранте (5.5). С учетом принятых обозначений (5.3), (5.4), его решение, для произвольной правой части имеет вид

$$q(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{M_{+1}(\lambda_1, \beta_2)(\eta_1 - \lambda_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda_1 d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{M_{+2}(\beta_1, \lambda_2)(\eta_2 - \lambda_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda_2 d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (6.1)$$

Принимая во внимание обозначения (5.3), (5.4), получаем

$$\frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} = \frac{[Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)] P(u)}{R(u) \left[(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2) \right] + P(u)}; \quad u = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

Для нахождения функционалов (5.2), $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$, $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$ применим к формуле (6.1) преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 , с параметрами α_1, α_2 получим соотношение

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{A(\alpha_1, \alpha_2)}{M(\alpha_1, \alpha_2)} + \frac{i2\pi}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2 + \\
&+ \frac{i2\pi}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2
\end{aligned} \quad (6.2)$$

С учетом (5.2) представим уравнение (6.2) в следующем виде

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_1, \alpha_2) &= \left[-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right] B(\alpha_1, \alpha_2) + \\
&+ G_1(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{i2\pi}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2 + \\
&+ \frac{i2\pi}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2,
\end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{P(u)}{R(u) \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}$$

Полагая слева в этом выражении $\alpha_1 = \alpha_{1+}$, $\alpha_2 = \alpha_{2+}$, получаем систему трех интегральных уравнений относительно $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$, $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_{1+})}{M_{+1}(\alpha_{1+}, \alpha_2)} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_2)}{M_{+2}(\alpha_{1+}, \alpha_2)} + G_1(\alpha_{1+}, \alpha_2) \\
Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_1)}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_{2+})} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_{2+})}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_{2+})} + G_1(\alpha_1, \alpha_{2+}) \\
Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_{1+})}{M_{+1}(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_{2+})}{M_{+2}(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})} + G_1(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}),
\end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$G_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2)}{R(u) \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}$$

$$\frac{A(\alpha_1, \alpha_2)}{M(\alpha_1, \alpha_2)} = Q_1(\alpha_1, \alpha_2) B(\alpha_1, \alpha_2) + G_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$A_1(\alpha_1) = \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2, \quad A_2(\alpha_2) = \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2$$

Полученная система уравнений (6.4) является точной для определения функционалов. Однако, она имеет сложный вид из-за наличия интегральных операторов. Важно отметить, что входящие в это уравнение члены, содержащие функции $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, получаются в результате учета узкой приграничной зоны штампа, в которой описыва-

ются особенности типа $x^{-0.5}$ [3]. Остальные члены уравнения учитывают значение контактных напряжений во внутренней зоне области. Пренебрегая узкой зоной вблизи границы, получим следующие приближенные уравнения для функционалов.

$$\begin{aligned} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_{1+})(\eta_2 - \alpha_2)} \\ Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_1)(\eta_2 - \alpha_{2+})} \\ Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_{1+})(\eta_2 - \alpha_{2+})} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Функционалы (6.5) позволяют описать высокоточные дисперсионные уравнения для нахождения частот ω_k дискретных резонансов, предсказанных И.И. Воровичем.

Подставляя найденные значения функционалов (6.5) $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$, $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$ в правую часть соотношения (6.3), получаем высокоточное аналитическое решение контактной задачи с деформируемым штампом. Для большей точности приближенного решения, функционалы следует внести также и в подынтегральные функции в (6.3). Переход к штампам более сложной реологии осуществляется по алгоритму, описанному в работе [4].

Заключение. В работе впервые построены основы теории двумерных контактных задач для деформируемых штампов, действующих на многослойные основания. Установлено соответствие получаемых результатов с ранее обнаруженным И.И. Воровичем существованием дискретных резонансов в контактных задачах с деформируемыми штампами. Найденны высокоточные приближенные решения контактных задач с деформируемым штампом в четверть плоскости и дисперсионные уравнения для случая материала штампа простой реологии. Изложен алгоритм решения таких контактных задач для деформируемых штампов сложных реологий. В основе теории лежит универсальный метод моделирования, позволивший точно решать контактные задачи для абсолютно жесткого штампа и высокоточно для случая с деформируемым штампом.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00129.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
2. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
4. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // Докл. РАН. 2021. Т. 499. С. 21–26. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>
5. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О контактных задачах с деформируемым штампом // Пробл. прочн. и пластич. 2022. Т. 84. № 1. С. 25–34. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34>
6. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
7. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc. 2015. A 471. Iss. 2180: Art. No. 20150271.

8. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. P. 2349–2378.
9. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 2013. V. 64. P. 145–166.
10. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // *Int. J. Mech. Sci.* 2007. V. 49. P. 161–182.
11. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2007. V. 26. P. 171–188.
12. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribol. Int.* 2007. V. 40 (4). P. 574–579.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522050046>
13. *Almqvist A.* An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>.
14. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
15. *Cocou M.* A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlin. Anal.: Real World Appl.* 2015. V. 22. P. 508–519.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 628–637.

On the Contact Problem with Deformable Stamp in the Quarter Plain

**V. A. Babeshko^{a,b,#}, O. V. Evdokimova^{a,##}, O. M. Babeshko^{b,###},
M. V. Zaretskaya^{b,####}, and V. S. Evdokimov^{b,#####}**

^a*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

^b*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

[#]*e-mail: babeshko41@mail.ru*

^{##}*e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*

^{###}*e-mail: babeshko49@mail.ru*

^{####}*e-mail: zarmv@mail.ru*

^{#####}*e-mail: evdok_vova@mail.ru*

In this paper, for the first time, a two-dimensional dynamic contact problem on the action of a deformable stamp on a quarter of the plane of a multilayer medium is strictly mathematically investigated. In contrast to the case of an absolutely solid stamp, a deformable stamp introduces additional features, consisting in the possibility of the occurrence of discrete resonances predicted by academician I.I. Vorovich. The paper shows that the use of a method based on the use of block elements makes it possible to obtain an equation describing resonant frequencies. To study contact problems with a deformable stamp made of materials of complex rheology, including smart materials, it is proposed in the paper to first conduct a study for the case of a deformable stamp made of a material of simple rheology described by Helmholtz equations. Solutions of boundary value problems for stamps of complex rheology, after that, are represented by a combination of solutions of boundary value problems for stamps of simple rheology.

Keywords: contact problem, block element, deformable stamp, Wiener–Hopf integral equation

REFERENCES

1. *Vorovich I.I.* Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous band // *Dokl. akad. nauk SSSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)
2. *Vorovich I.I.* Resonant properties of an elastic inhomogeneous band // *Dokl. akad. nauk SSSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)

3. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Prakhina O.D. Dynamics of Massive Bodies and Resonant Phenomena in Deformable Media. Moscow: Nauka, 1999. 246 p. (in Russian).
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method // Dokl. Phys., 2021, vol. 66, iss. 8, pp. 218–222.
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On contact problems with a deformable stamp // Problems of Strength&Plasticity, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34 (in Russian)
6. Goracheva I.G., Dobichin M.N. Contact Problems of Tribology. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 256 p. (in Russian)
7. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc., 2015, A 471, iss. 2180, Art. No. 20150271.
8. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // Int. J. Solids Struct., 1998, vol. 35, pp. 2349–2378.
9. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2013, vol. 64, pp. 145–166.
10. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci., 2007, vol. 49, pp. 161–182.
11. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids, 2007, vol. 26, pp. 171–188.
12. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int., 2007, vol. 40 (4), pp. 574–579. DOI: 10.31857/S0032823522050046
13. Almqvist A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem. // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>.
14. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Appl. Math. Optim., 2000, vol. 42, pp. 169–202.
15. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlin. Anal.: Real World Appl., 2015, vol. 22, pp. 508–519.
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Exact Solution to the Contact Problem in a Quarter-Plane of a Multilayer Medium by the Universal Simulation Method // Mech. Solids, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 2058–2065. DOI: 10.3103/S0025654422080039