ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 2, с. 254–264

УДК 539.374

К ТЕОРИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В. М. Садовский[1,*]

[1]Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
**e-mail: sadov@icm.krasn.ru*

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.
После доработки 01.03.2023 г.
Принята к публикации 01.03.2023 г.

На основе термомеханической модели пластической деформации упруго сжимаемой изотропно упрочняющейся среды получена система соотношений для описания пластических ударных волн конечной амплитуды, удовлетворяющая принципу максимального производства энтропии на фронте сильного разрыва. Проведена классификация допустимых ударноволновых переходов в рамках модели изотропного упрочнения при условии пластичности Мизеса.

Ключевые слова: пластичность, упрочнение, вариационное неравенство, сильный разрыв

DOI: 10.31857/S0032823523020133, **EDN:** UAWXSW

Проблема построения разрывных решений с ударными волнами конечной амплитуды в теории пластичности относится к числу нерешенных проблем механики. Основная причина здесь в том, что до настоящего времени окончательно не решен вопрос о представлении деформации среды в виде суперпозиции упругой и пластической составляющих, и поэтому не существует общепринятой геометрически нелинейной модели.

В геометрически линейном приближении полная система соотношений сильного разрыва для упругопластической среды Прандтля—Рейсса впервые была получена с помощью вспомогательной гипотезы о максимальной диссипации энергии на фронте разрыва [1]. Эта гипотеза применялась также к анализу диссипативных разрывов в необратимо сжимаемых упругопластических средах с кусочно-линейными поверхностями текучести [2, 3]. Ее математически строгим обоснованием послужил метод построения соотношений сильного разрыва на основе интегрального обобщения вариационного неравенства, связанного с принципом Мизеса максимума мощности диссипации энергии [4]. Исследование геометрически линейных моделей упрочняющихся сред проводилось в [5, 6]. Однако полученные в этих работах выражения для скоростей волн и уравнения, связывающие скачки скоростей и напряжений, пригодны лишь для анализа ударных волн малой амплитуды.

Альтернативный метод построения системы уравнений на поверхности разрыва в теории упруго-пластичности основан на приближении разрывного решения последовательностью решений модели вязкой среды, сглаживающей разрывы, при стремлении коэффициентов вязкости к нулю. Исследования в этом направлении активно ведутся А.Г. Куликовским с соавторами [7–9]. Метод вязкости применялся также к анализу одномерных движений пластической среды с плоскими волнами при конечных деформациях [10]. В случае плоского или пространственного напряженно-деформированного состояния реализация этого метода наталкивается на непреодолимые технические трудности.

Как оказалось, построить полную систему соотношений сильного разрыва в геометрически нелинейной теории, исходя только из интегрального обобщения дифференциальных уравнений модели, в принципе невозможно. Примером служит газовая динамика, где наряду с условиями для скачков функций на фронте ударной волны, полученными из интегральных законов сохранения, используется не связанное с основной системой условие положительности скачка энтропии, имеющее термодинамическую природу. Другие такие примеры приведены в работе [7]. Переходные процессы, протекающие на фронте разрыва, приходится рассматривать как самостоятельный объект моделирования. При этом проблема сводится к выбору адекватного способа построения модели, исходя из правдоподобных физико-механических гипотез или на основе формальных принципов неравновесной термодинамики.

В настоящей работе соотношения на ударных волнах конечной амплитуды анализируются в рамках упрощенной термомеханической модели динамики изотропно упрочняющейся среды с упругим изменением объема и пластическим формоизменением с помощью принципа максимального производства энтропии. При отсутствии упрочнения аналогичный метод анализа применялся в работе [11].

1. Термодинамическое построение модели. Деформация сплошной среды рассматривается относительно неподвижной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Уравнения движения и уравнение неразрывности в Эйлеровом описании имеют вид:

$$\rho\dot{v}_j = \sigma_{jk,k}, \quad \dot{\rho} = -\rho v_{k,k}, \quad \sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + \tau_{jk} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность среды, v_j — проекции вектора скорости, δ_{jk} — символ Кронекера, $p = -\sigma_{jk}\delta_{jk}/3$ — гидростатическое давление, τ_{jk} — компоненты девиатора тензора напряжений σ_{jk}. Принято правило суммирования по повторяющимся индексам, индекс после запятой означает частную производную по времени или по пространственной переменной, точка над символом — полную производную по времени.

Принципы термодинамики — уравнение баланса энергии и неравенство Клаузиуса—Дюгема, которое устанавливает баланс энтропии и, по существу, служит определением внутреннего производства энтропии s^i в элементе среды, записываются в виде:

$$\rho\dot{U} = \sigma_{jk}v_{j,k} - q_{k,k}, \quad \rho\dot{s}^i = \rho\dot{s} + (q_k/T)_{,k} \geq 0, \tag{1.2}$$

где U и s — плотности внутренней энергии и полной энтропии, q_k — проекции вектора притока тепла, T — абсолютная температура.

Пренебрегая упругим формоизменением при развитых пластических деформациях, предположим, что термодинамическое состояние элемента полностью определяется тремя параметрами: плотностью ρ, характеризующей деформацию объема, энтропией s и параметром упрочнения η, который в случае изотропного упрочнения среды считается скалярным и неотрицательным параметром, равным нулю до наступления пластичности и неизменным в состоянии упругой разгрузки.

Обычно в качестве параметра изотропного упрочнения принимается работа пластической деформации или параметр накопленной пластической деформации Одквиста. Обоснование такого выбора состоит лишь в том, что оба они монотонно возрастают в процессе упрочнения материала. Однако, строго говоря, введение в модель нового параметра состояния должно быть согласовано с принципами термодинамики необратимых процессов. Поэтому привлекать уравнение эволюции параметра из механических соображений, независимо от этих принципов, вообще говоря, некорректно. И в то же время, экспериментальные данные по изучению зависимости, например, предела текучести среды от работы пластической деформации или от параметра

Одквиста, могут быть с успехом использованы при построении функций состояния и при определении феноменологических коэффициентов модели.

Внутренняя энергия элемента среды $U = U(\rho, s, \eta)$ представляет собой функцию состояния, следовательно,

$$q_{k,k} = -pv_{k,k} + \tau_{j,k}\xi_{jk} - \rho\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\dot{\rho} - \frac{\partial U}{\partial s}\dot{s} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\dot{\eta}\right),$$

где $\xi_{jk} = (v_{j,k} + v_{k,j})/2 + \dot{\rho}/(3\rho)\delta_{jk}$ — компоненты тензора скоростей пластической деформации. С учетом уравнения неразрывности неравенство Клаузиуса–Дюгема преобразуется к виду:

$$\rho T\dot{s}^{i} = \tau_{jk}v_{j,k} + \left(p - \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \rho\left(T - \frac{\partial U}{\partial s}\right)\dot{s} - \rho\frac{\partial U}{\partial\eta}\dot{\eta} - T_{,k}\frac{q_k}{T} \geq 0$$

В силу независимости термодинамических параметров отсюда следуют система уравнений состояния $p = \rho^2\partial U/\partial\rho$, $T = \partial U/\partial s$ и неравенство внутренней диссипации энергии

$$\rho T\dot{s}^{i} = \tau_{jk}\xi_{jk} - \rho\frac{\partial U}{\partial\eta}\dot{\eta} - T_{,k}\frac{q_k}{T} \geq 0 \tag{1.3}$$

Судя по правой части неравенства (1.3), систему обобщенных термодинамических сил в рассматриваемом необратимом процессе составляют величины τ_{jk}, $\theta = \partial U/\partial\eta$ и $T_{,k}/T$, а соответствующие этой системе термодинамические потоки равны ξ_{jk}, $-\rho\dot{\eta}$ и $-q_k$. Считая обобщенные силы зависящими от потоков и от параметров состояния, можно определить диссипативную функцию $\rho T\dot{s}^{i} = D(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}, -q_k)$ (параметры состояния ρ, s и η для краткости опущены).

Представим диссипативную функцию в виде суммы двух независимых слагаемых $D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta})$ и $D_1(-q_k)$, первое из которых характеризует процесс производства тепла в элементе среды за счет пластической деформации, а второе — тепловую диффузию. Для изотропной среды второе слагаемое может быть найдено в явной форме из закона теплопроводности Фурье: $D_1 = q_kq_k/(\alpha T)$, где $\alpha(\rho, T)$ — коэффициент теплопроводности. Первое слагаемое является положительно-однородной функцией относительно потоков ξ_{jk} и $-\rho\dot{\eta}$, так как по определению пластичности при отсутствии вязких эффектов процесс деформации не зависит от масштаба времени. Это в точности означает, что при $q_k = 0$ уравнение (1.3) допускает преобразование растяжения времени, и таким образом

$$D_0(\lambda\xi_{jk}, -\lambda\rho\dot{\eta}) = \lambda D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) \quad \forall\lambda \geq 0$$

По теореме Эйлера для однородных функций

$$D_0 = \frac{\partial D_0}{\partial\xi_{jk}}\xi_{jk} - \frac{\partial D_0}{\partial(-\rho\dot{\eta})}\rho\dot{\eta}$$

В силу независимости термодинамических потоков из уравнения (1.3) следует система определяющих уравнений:

$$\tau_{jk} = \frac{\partial D_0}{\partial\xi_{jk}}, \quad \theta = \frac{\partial D_0}{\partial(-\rho\dot{\eta})}$$

Такие уравнения выполняются в области дифференцируемости функции D_0, однако из-за однородности она не является дифференцируемой по крайней мере в нуле пространства термодинамических потоков. Предполагая выпуклость D_0 по совокупности аргументов, систему определяющих уравнений можно представить в обобщенной форме, допускающей отсутствие производных:

$$(\tau_{jk}, \theta) \in \partial D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) \tag{1.4}$$

Здесь ∂D_0 обозначает субдифференциал выпуклой функции – множество нормалей опорных гиперплоскостей к надграфику функции D_0 в данной точке пространства. Более строго, субдифференциал представляет собой следующее подмножество пространства термодинамических сил:

$$\partial D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) = \Big\{(\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \,|\, D_0(\xi^*_{jk}, -\rho\dot{\eta}^*) - D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) \geq$$
$$\geq \tilde{\tau}_{jk}(\xi^*_{jk} - \xi_{jk}) - \rho\tilde{\theta}(\dot{\eta}^* - \dot{\eta}) \;\; \forall\xi^*_{jk}, \forall\dot{\eta}^*\Big\}$$

Заметим, что из-за недифференцируемости диссипативных функций в теории пластичности понятие субдифференциала играет исключительно важную роль. Впервые оно применялось П.П. Мосоловым и В.П. Мясниковым при исследовании модели жесткопластической среды (см. [11]).

По определению субдифференциала включение (1.4) эквивалентно уравнению

$$\tau_{jk}\xi_{jk} - \rho\theta\dot{\eta} - D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) = \sup_{\xi^*_{jk}, \dot{\eta}^*}\Big(\tau_{jk}\xi^*_{jk} - \rho\theta\dot{\eta}^* - D_0(\xi^*_{jk}, -\rho\dot{\eta}^*)\Big),$$

правая часть которого есть преобразование Юнга функции $D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta})$. Можно показать, что в силу однородности D_0 преобразование Юнга оказывается равным индикаторной функции

$$\delta_F(\tau_{jk}, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (\tau_{jk}, \theta) \in F \\ +\infty, & \text{если} \quad (\tau_{jk}, \theta) \notin F \end{cases}$$

выпуклого и замкнутого множества допустимых состояний в пространстве термодинамических сил

$$F = \Big\{(\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \,|\, \tilde{\tau}_{jk}\xi^*_{jk} - \rho\tilde{\theta}\dot{\eta}^* \leq D_0(\xi^*_{jk}, -\rho\dot{\eta}^*) \;\; \forall\xi^*_{jk},\, \forall\dot{\eta}^*\Big\}$$

Это следует из цепочки легко проверяемых равенств:

$$\sup_{\lambda\xi^*_{jk}, \lambda\dot{\eta}^*}\Big(\tau_{jk}\lambda\xi^*_{jk} - \rho\theta\lambda\dot{\eta}^* - D_0(\lambda\xi^*_{jk}, -\rho\lambda\dot{\eta}^*)\Big) =$$
$$= \sup_{\lambda\geq 0}\lambda \sup_{\xi^*_{jk}, \dot{\eta}^*}\Big(\tau_{jk}\xi^*_{jk} - \rho\theta\dot{\eta}^* - D_0(\xi^*_{jk}, -\rho\dot{\eta}^*)\Big) = \delta_F(\tau_{jk}, \theta)$$

Граница множества F описывает поверхность текучести, точки которой отвечают пластическому состоянию упрочняющегося материала.

По свойству инволютивности преобразования Юнга диссипативная функция D_0 равна преобразованию Юнга индикаторной функции, то есть

$$D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) = \sup_{(\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \in K}\Big(\tilde{\tau}_{jk}\xi_{jk} - \rho\tilde{\theta}\dot{\eta}\Big)$$

Отсюда следует двойственная формулировка системы определяющих уравнений (1.4) в виде вариационного неравенства:

$$-(\tilde{\tau}_{jk} - \tau_{jk})\xi_{jk} + \rho(\tilde{\theta} - \theta)\dot{\eta} \geq 0, \quad (\tau_{jk}, \theta) \in F, \forall(\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \in F \tag{1.5}$$

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) совместно с законом теплопроводности Фурье: $q_k = -\alpha T_k$, и вариационным неравенством (1.5) составляют замкнутую термомеханическую модель сжимаемой пластической среды. Так как тензоры с компонентами $\tilde{\tau}_{jk}$ и τ_{jk} являются девиаторами (для них выполняется условие $\tilde{\tau}_{ik}\delta_{jk} = 0$), то неравенство (1.5) можно упростить, заменив ξ_{jk} на $v_{j,k}$. Для определенности необходимо задать конкретный вид функции состояния $U(\rho, s, \eta)$ и множества допустимых состояний $F(\rho, s, \eta)$. В случае изотропной среды множество F задается на девиаторной плоскости $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ при помощи условия пластичности общего вида:

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \leq \kappa(\rho, T, \theta)$$

Здесь τ_k – главные значения тензора τ_{jk}, κ – предел текучести материала, f – выпуклая, неотрицательная и симметричная относительно аргументов функция текучести. Функция f может быть выбрана неоднозначно, и простейшим вариантом выбора является положительно однородная функция Минковского [4]. Предел текучести κ должен быть вогнутой функцией по θ, чтобы обеспечить выпуклость множества F в пространстве термодинамических сил.

В наиболее общем случае функция текучести представима в виде $f = \max(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ через систему непрерывно-дифференцируемых выпуклых и положительно однородных функций $f_l(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Применяя теорему Куна–Таккера, можно привести (1.5) к системе уравнений ассоциированного закона течения:

$$\xi_{jk} = \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \tau_{jk}}, \quad \rho\dot{\eta} = \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \frac{\partial \kappa}{\partial \theta},$$

где λ_l – множители Лагранжа, равные нулю, если $f_l < \kappa$, и неотрицательные, если $f_l = \kappa$. Отсюда в силу теоремы Эйлера для однородных функций:

$$\tau_{jk}\xi_{jk} = \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \kappa, \quad \rho\dot{\eta} = \tau_{jk}\xi_{jk} \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta}$$

С учетом полученного уравнения эволюции параметра упрочнения η неравенство внутренней диссипации энергии (1.3) преобразуется к виду:

$$\rho T\dot{s}^i = \tau_{jk}\xi_{jk}\left(1 - \theta \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta}\right) + D_1(q_k) \geq 0,$$

и, таким образом, функция $\kappa(\rho, T, \theta)$ должна удовлетворять следующим условиям термодинамической корректности модели:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} \leq 0, \quad \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

В модели линейного упрочнения, когда $\kappa = \kappa_0(\rho, T) + \beta(\rho, T)\theta$, условия корректности автоматически выполняются при $\beta \geq 0$. Пластическое разупрочнение материала, которое сопровождается падением предела текучести с ростом пластической деформации, недопустимо. Условие на вторую производную предела текучести по параметру θ может, по-видимому, нарушаться, но возникающее при этом вариационное неравенство относится к теоретически более сложному случаю из-за невыпуклости ограничений на допустимые состояния. Для исследования более широкого круга термомеханических процессов, включая деформационное разупрочнение материала, служат модели, учитывающие вязкие эффекты.

2. Соотношения сильного разрыва. При эйлеровом описании движения приведение определяющих уравнений к дивергентной форме осуществляется с помощью формулы

$$\rho\dot{w} = (\rho w)_{,t} + (\rho v_k w)_{,k},$$

которая в силу уравнения неразрывности справедлива для любой дифференцируемой функции $w(t, x_k)$. Дивергентная форма позволяет получить интегральное обобщение модели на класс решений с ударными волнами.

Считая, что на фронте ударноволнового перехода можно пренебречь влиянием теплопроводности среды, рассмотрим далее адиабатическое приближение модели с $q_k = 0$. В этом случае дивергентные аналоги уравнений движения, неразрывности и баланса энергии принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}(\rho v_j)_{,t} + (\rho v_k v_j - \sigma_{jk})_{,k} = 0, \quad \rho_{,t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \\ (\rho E)_{,t} + (\rho v_k E)_{,k} = (\sigma_{jk} v_j)_{,k}, \quad E = \frac{v_k v_k}{2} + U\end{gathered} \tag{2.1}$$

Для давления, плотности, температуры, энтропии и параметров, характеризующих изотропное упрочнение, по обе стороны фронта волны выполняются уравнения

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{2.2}$$

Вариационное неравенство (1.5), описывающее пластическую деформацию среды, преобразуется к виду:

$$(\rho s)_{,t} + (\rho v_k s)_{,k} \geq \frac{\tilde{\tau}_{jk}}{T} v_{j,k} - \frac{\tilde{\theta}}{T}\left((\rho\eta)_{,t} + (\rho v_k \eta)_{,k}\right) \tag{2.3}$$

Варьируемые функции (термодинамические силы) $\tilde{\tau}_{jk}$ и $\tilde{\theta}$ далее выбираются так, чтобы удовлетворить условию пластичности: $f(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3) \leq \kappa(\rho, T, \tilde{\theta})$ и чтобы функции $\tilde{\tau}_{jk}/T$ и $\tilde{\theta}/T$ оставались непрерывно-дифференцируемыми при переходе через фронт разрыва, на котором температура меняется скачком. Это требование необходимо, чтобы после умножения обеих частей неравенства (2.3) на неотрицательную гладкую финитную функцию и интегрирования по пространственно-временной области можно было корректно применить формулу Грина, сбросив производные по времени и по пространственным переменным с разрывных функций на пробные. Такая процедура преобразования вариационного неравенства подробно описана в [4].

Интегральное обобщение (2.1) приводит к следующей системе уравнений на фронте разрыва:

$$m[v_j] = -[\sigma_{jk}]n_k, \quad [m] = 0, \quad m[E] = -[\sigma_{jk} v_j]n_k \tag{2.4}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок функции: $[w] = w^+ - w^-$ ($w^\pm$ — односторонние пределы w на фронте), $m = \rho^+(c - v_n^+) = \rho^-(c - v_n^-)$ — поток массы, c — скорость движения фронта в направлении вектора нормали n_k, $v_n = v_k n_k$ — нормальная проекция массовой скорости.

Из интегрального обобщения вариационного неравенства (2.3) получим

$$m[s] \geq -\frac{\tilde{\tau}_{jk}}{T}[v_j]n_k - \frac{\tilde{\theta}}{T} m[\eta] \tag{2.5}$$

С помощью легко проверяемых формул

$$[w^2] = 2[w]w^0, \quad [uw] = [u]w^0 + u^0[w],$$

в которых $w^0 = (w^+ + w^-)/2$, из системы (2.4) выводится уравнение

$$m[U] = -\sigma^0_{jk}[v_j]n_k \tag{2.6}$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$[U] = -p^\lambda[1/\rho] + T^\lambda[s] + \theta^\lambda[\eta],$$

где $w^\lambda = w^0 + \lambda[w]$ – выпуклая комбинация односторонних пределов $w^\pm$ с подходящим значением $\lambda \in (-1/2, 1/2)$. Подстановка $[U]$ в (2.6) с учетом равенства $m[1/\rho] = -[v_n]$ приводит к уравнению

$$mT^0[s] = -\tau^0_{jk}[v_j]n_k - m\theta^0[\eta] + mQ,$$

в котором $Q = \lambda([p][1/\rho] - [T][s] - [\theta][\eta])$ – квадратичная относительно скачков параметров состояния часть тепловой энергии. Для Q справедливо также выражение

$$Q = -p^0[1/\rho] + \theta^0[\eta] + T^0[s] - [U]$$

Полученное уравнение позволяет представить неравенство (2.5) в виде:

$$(\tau^*_{jk} - \tau^0_{jk})[v_j]n_k + m(\theta^* - \theta^0)[\eta] + mQ \geq 0, \tag{2.7}$$

где $\tau^*_{jk} = T^0\tilde{\tau}_{jk}/T$ и $\theta^* = T^0\tilde{\theta}/T$.

На фронте разрыва односторонние пределы термодинамических сил подчиняются ограничениям $(\tau^\pm_{jk}, \theta^\pm) \in F^\pm$, поэтому (τ^0_{jk}, θ^0) принадлежит множеству $F^0 = (F^+ + F^-)/2$. Можно показать, что область варьирования (τ^*_{jk}, θ^*), то есть множество $T^0(F^+/T^+ \cap F^-/T^-)$, содержится в F^0. Для этого достаточно представить (τ^*_{jk}, θ^*) в виде суммы:

$$(\tau^*_{jk}, \theta^*) = \frac{T^+}{T^+ + T^-}(\tau^*_{jk}, \theta^*) + \frac{T^-}{T^+ + T^-}(\tau^*_{jk}, \theta^*)$$

В этом представлении первое слагаемое принадлежит $F^+/2$, так как $(\tau^*_{jk}, \theta^*) \in$ $\in T^0F^+/T^+$, а второе слагаемое принадлежит $F^-/2$, так как $(\tau^*_{jk}, \theta^*) \in T^0F^-/T^-$. Следовательно, $(\tau^*_{jk}, \theta^*) \in F^0$.

Расширим в (2.7) область варьирования (τ^*_{jk}, θ^*) до множества F^0 и потребуем выполнения более строгого неравенства, в которое входят только линейные относительно скачков слагаемые:

$$(\tau^*_{jk} - \tau^0_{jk})[v_j]n_k + m(\theta^* - \theta^0)[\eta] \geq 0, \quad (\tau^0_{jk}, \theta^0), (\tau^*_{jk}, \theta^*) \in F^0 \tag{2.8}$$

Заметим, что из (2.7) после подстановки $\tau^*_{jk} = \tau^0_{jk}$ и $\theta^* = \theta^0$ следует условие $Q \geq 0$, которое играет роль критерия реализуемости разрыва, аналогичного критерию положительности скачка энтропии на ударных волнах в газовой динамике. И что неравенство (2.8) гарантирует максимальное значение скачка энтропии $[s]$ на множестве допустимых состояний F^0.

Вариационное неравенство (2.8), совместно с системой уравнений (2.4) и уравнениями состояния (2.2), образует замкнутую математическую модель сильного разрыва в изотропно упрочняющейся пластической среде. Модель позволяет исследовать классы разрывных решений при различных условиях пластичности. Из (2.8) в общем случае вытекает, что движущиеся разрывы возможны, только если в пространстве термодинамических сил точка (τ^0_{jk}, θ^0) принадлежит границе множества F^0, а $(\tau^{\pm}, \theta^{\pm})$ являются граничными точками $F^{\pm}$, соответственно. Действительно, если (τ^0_{jk}, θ^0) – внутренняя точка F^0, то в силу произвольности вариации выполняется система уравнений:

$$[v_j]n_k + [v_k]n_j = \frac{2}{3}[v_n]\delta_{jk}, \quad [\eta] = 0$$

Полагая за счет поворота осей координат $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$, получим условие непрерывности вектора скорости на фронте. При отсутствии скачка скорости из уравнения неразрывности и условия $[\rho] \neq 0$ следует, что $m = 0$ и $v_1 = c$. В данном случае реализуется контактный разрыв, неподвижный относительно среды. На фронте контактного разрыва непрерывен вектор напряжений, проекциями которого в системе координат, связанной с фронтом, являются компоненты σ_{11}, σ_{12} и σ_{13}. Остальные компоненты тензора напряжений могут быть разрывными. Допускается также скачок параметра упрочнения η. Разрывы такого рода реализуются, например, на границе раздела двух сред.

3. Условие пластичности Мизеса. На основе простого тождества [2]:

$$\frac{\kappa^+\kappa^-}{4}\left[\frac{\tau_{jk}}{\kappa}\right]\left[\frac{\tau_{jk}}{\kappa}\right] = \frac{\kappa^0}{2\kappa^+}\tau^+_{jk}\tau^+_{jk} + \frac{\kappa^0}{2\kappa^-}\tau^-_{jk}\tau^-_{jk} - \tau^0_{jk}\tau^0_{jk}$$

доказывается, что при условии пластичности Мизеса с функцией текучести

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)/2} = \sqrt{\tau_{jk}\tau_{jk}/2}$$

компоненты тензора τ_{jk}/κ на фронте диссипативной ударной волны непрерывны. Поэтому тензоры напряжений $\sigma^{\pm}_{jk}$ по обе стороны поверхности разрыва соосны. В результате поворота координатной системы к главным осям этих тензоров уравнения (2.4) преобразуются к виду:

$$m[v_j] = -[\sigma_j]n_j, \quad m^2[1/\rho] = [\sigma_j]n_j^2, \quad 2m^2[U] = [\sigma_j^2]n_j^2 \tag{3.1}$$

С учетом обозначений $2\tau^*_{jk} = \tilde{\tau}^+_{jk} + \tilde{\tau}^-_{jk}$ и $2\theta^* = \tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-$ вариационное неравенство (2.8) приводится к эквивалентной задаче минимизации при ограничениях $(\tilde{\tau}^{\pm}_{jk}, \tilde{\theta}^{\pm}) \in F^{\pm}$ линейной функции

$$l(\tilde{\tau}^{\pm}_{jk}, \tilde{\theta}^{\pm}) = -(\tilde{\tau}^+_{jk} + \tilde{\tau}^-_{jk})\left([\sigma_j + \sigma_k]n_j n_k - 2[\sigma_l]n_l^2\delta_{jk}/3\right) + 2m^2(\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-)[\eta],$$

причем минимум этой функции достигается, когда $\tilde{\tau}^{\pm}_{jk} = \tau^{\pm}_{jk}$ и $\tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm}$. Соответствующий лагранжиан

$$L(\tilde{\tau}^{\pm}_{jk}, \tilde{\theta}^{\pm}) = l(\tilde{\tau}^{\pm}_{jk}, \tilde{\theta}^{\pm}) + 2\lambda^+\left(f(\tilde{\tau}^+_{jk}) - \kappa^+\right) + 2\lambda^-\left(f(\tilde{\tau}^-_{jk}) - \kappa^-\right)$$

включает в себя множители Лагранжа $\lambda^{\pm} \geq 0$, удовлетворяющие условиям дополнительности: $\lambda^{\pm}\left(f(\tilde{\tau}^{\pm}_{jk}) - \kappa^{\pm}\right) = 0$. В силу теоремы Куна–Таккера решение задачи минимизации удовлетворяет системе уравнений

$$[\sigma_j + \sigma_k]n_j n_k - \frac{2}{3}[\sigma_l]n_l^2\delta_{jk} = \lambda^{\pm}\frac{\tau_j}{\kappa}\delta_{jk}, \quad m^2[\eta] = \lambda^{\pm}\frac{\partial\kappa^{\pm}}{\partial\theta}, \tag{3.2}$$

которая получена из условия минимума лагранжиана с учетом равенства

$$\left.\frac{\partial f(\tilde{\tau}_{jk})}{\partial \tau_{jk}}\right|_{\tilde{\tau}_{jk}=\tau_j\delta_{jk}} = \frac{\tau_j}{2\kappa}\delta_{jk}$$

Анализируя уравнения (3.2), можно показать, что в изотропно упрочняющейся пластической среде с условием пластичности Мизеса наряду с контактными разрывами возможны два типа диссипативных ударных волн: продольные волны, распространяющиеся вдоль главных осей, и квазипоперечные волны, направления движения которых лежат в главных плоскостях тензора напряжений. При пространственной ориентации вектора нормали к фронту относительно главных осей, когда $n_1 n_2 n_3 \neq 0$, движущиеся разрывы невозможны. В этом случае для всех индексов $j \neq k$ выполняются уравнения $[\sigma_j + \sigma_k] = 0$, из которых следует непрерывность решения.

В общем случае в силу уравнений (3.2) имеют место равенство $\lambda^+ = \lambda^-$ и условие непрерывности производной $\partial\kappa/\partial\theta$ на фронте разрыва. Продольные волны, движущиеся вдоль оси x_1 ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$), описываются системой:

$$\frac{\tau_1}{\kappa} = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\tau_2}{\kappa} = \frac{\tau_3}{\kappa} = -\frac{\tau_1}{2\kappa}, \quad [\sigma_1]\frac{\tau_1}{\kappa} > 0 \tag{3.3}$$

Неравенство в (3.3) (условие положительности множителя Лагранжа) обеспечивает диссипативность волны. Знак “+” в (3.3) соответствует ударной волне растяжения ($[\sigma_1] > 0$), знак “–” соответствует волне сжатия ($[\sigma_1] < 0$). С помощью уравнений (3.1) и (3.2) выводится уравнение для скачка параметра упрочнения:

$$[\eta] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\left[\frac{1}{\rho}\right]\right|\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}$$

Из системы (3.1) с учетом равенств

$$[\sigma_j] = -[p] + [\kappa]\tau_j/\kappa, \quad \sigma_j^0 = -p^0 + \kappa^0\tau_j/\kappa \tag{3.4}$$

выводится уравнение ударной адиабаты:

$$[U] = -p^0\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{\kappa^0[\eta]}{\partial\kappa/\partial\theta} \tag{3.5}$$

Для скачка плотности на фронтах продольных волн растяжения и сжатия справедлива формула:

$$m^2\left[\frac{1}{\rho}\right] = -[p] \pm \frac{2[\kappa]}{\sqrt{3}}$$

Если нормальный вектор к фронту волны лежит в главной плоскости тензора напряжений и не совпадает с главными направлениями, то реализуется квазипоперечная волна. Пусть, например, $n_1 n_3 \neq 0$ и $n_2 = 0$, тогда из системы (3.2) следует уравнение $[\sigma_1 + \sigma_3] = 0$, которое означает, что в плоскости x_1, x_3 для скачков напряжений реализуется состояние чистого сдвига. Остальные уравнения системы, принимая во внимание, что $[\sigma_3] = -[\sigma_1]$ и $n_1^2 + n_2^2 = 1$, можно привести к виду:

$$\frac{2}{3}(1 + n_1^2)[\sigma_1] = \lambda\frac{\tau_1}{\kappa}, \quad -\frac{2}{3}(1 + n_3^2)[\sigma_1] = \lambda\frac{\tau_3}{\kappa}, \quad m^2[\eta] = \lambda\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}$$

Отсюда в силу условия пластичности выполняются равенства

$$\frac{\tau_1}{\kappa} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \frac{1 + n_1^2}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}, \quad \frac{\tau_3}{\kappa} = -\frac{1 + n_3^2}{1 + n_1^2} \frac{\tau_1}{\kappa} \tag{3.6}$$

Из уравнения $[\sigma_1 + \sigma_3] = 0$ с привлечением (3.4) и (3.6) выводятся формулы для скачков давления и напряжений:

$$[p] = \pm \frac{[\kappa]}{2\sqrt{3}} \frac{n_1^2 - n_3^2}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}, \quad [\sigma_1] = -[\sigma_3] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{[\kappa]}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}$$

Для скачков плотности и параметра упрочнения справедливы формулы

$$m^2 \left[\frac{1}{\rho}\right] = -3[p], \quad m^2[\eta] = [\kappa] \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}$$

Уравнение баланса энергии для квазипоперечных волн приводится к уравнению ударной адиабаты (3.5).

При $n_1^2 = n_3^2$ квазипоперечная волна превращается в поперечную волну, на фронте которой давление и плотность непрерывны. Разрывны напряжения и параметр упрочнения.

Заметим, что в случае постоянного предела текучести из вышеперечисленных диссипативных разрывов допускаются только продольные ударные волны, на которых непрерывен девиатор тензора напряжений, а давление и плотность среды разрывны.

Для детального анализа соотношений сильного разрыва в изотропно упрочняющейся пластической среде необходимо построить уравнение состояния материала и зависимость предела текучести от параметров состояния на основе имеющихся экспериментальных данных (см. [13, 14]).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быковцев Г.И., Кретова Л.Д.* О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106–116.
2. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А.* Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. к 60-летию акад. В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116–127.
3. *Буренин А.А., Дудко О.В., Семенов К.Т.* Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругопластических средах // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 5. С. 176–185.
4. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
5. *Садовский В.М.* К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 5. С. 166–172.
6. *Садовский В.М.* Упругопластические волны сильного разрыва в линейно упрочняющихся средах // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 104–111.
7. *Куликовский А.Г.* О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 531–550.
8. *Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.* Ударные волны в упругопластических средах со структурой, определяемой процессом релаксации напряжений // Тр. МИАН. 2015. Т. 289. С. 178–194.
9. *Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.* Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 650–663.

10. *Садовский В.М.* К исследованию структуры поперечных ударных волн конечной амплитуды в пластической среде // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 40–49.
11. *Садовский В.М.* К теории ударных волн в сжимаемых пластических средах // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 87–95.
12. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
13. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е.* Экспериментальные профили ударных волн в конденсированных веществах. М.: Физматлит, 2008. 248 с.
14. *Канель Г.И.* Ударные волны в физике твердого тела. М.: Физматлит, 2018. 208 с.

On the Theory of Shock Waves in Isotropic Hardening Plastic Media

V. M. Sadovskii[a,#]

[a] *Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*
[#] *e-mail: sadov@icm.krasn.ru*

Based on the thermomechanical model of plastic deformation of an elastically compressible isotropic hardening medium, the system of relations for describing plastic shock waves of finite amplitude is obtained, which satisfies the maximum entropy production principle at the front of strong discontinuity. A classification of admissible shock-wave transitions is performed within the framework of the model of isotropic hardening under the von Mises plasticity condition.

Keywords: plasticity, hardening, variational inequality, strong discontinuity

REFERENCES

1. *Bykovtsev G.I., Kretova L.D.* Shock wave propagation in elastic-plastic media // JAMM, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 94–103.
2. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Rychkov V.A.* Surfaces of velocity discontinuities in the dynamics of irreversibly compressible media // Problems of Continuum Mechanics (Problemy mekhaniki sploshnyh sred: Sb. nauch. tr.). Vladivostok: IACP FEB RAS, 1996. pp. 116–127. (in Russian)
3. *Burenin A.A., Dudko O.V., Semenov K.T.* Conditions for the existence of discontinuity surfaces of irreversible strains in elastoplastic media // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2009, vol. 50, no. 5, pp. 878–885.
4. *Sadovskii V.M.* Discontinuous Solutions in Dynamic Elastic-Plastic Problems. Moscow: Fizmatlit, 1997. 208 p. (in Russian)
5. *Sadovskii V.M.* Toward a theory of the propagation of elastoplastic waves in strain-hardening media // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1994, vol. 35, no. 5, pp. 798–804.
6. *Sadovskii V.M.* Elastoplastic waves of strong discontinuity in linearly hardening media // Mech. Solids, 1997, vol. 32, no. 6, pp. 88–94.
7. *Kulikovskii A.G.* Multi-parameter fronts of strong discontinuities in continuum mechanics // J. Appl. Math. Mech., 2011, vol. 75, no. 4, pp. 378–389.
8. *Kulikovskii A.G., Chugainova A.P.* Shock waves in elastoplastic media with the structure defined by the stress relaxation process // Proc. Steklov Inst. Math., 2015, vol. 289, pp. 167–182.
9. *Kulikovskii A.G., Chugainova A.P.* Study of discontinuities in solutions of the Prandtl–Reuss elastoplasticity equations // Comput. Math. Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 4, pp. 637–649.
10. *Sadovskii V.M.* To the analysis of the structure of finite-amplitude transverse shock waves in a plastic medium // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 6, pp. 31–39.
11. *Sadovskii V.M.* On the theory of shock waves in compressible plastic media // Mech. Solids, 2001, vol. 36, no. 5, pp. 67–74.
12. *Mosolov P.P., Myasnikov V.P.* Mechanics of Rigid-Plastic Media. Moscow: Nauka, 1981. 208 p. (in Russian)
13. *Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E.* Experimental Profiles of Shock Waves in Condensed Matter. Moscow: Fizmatlit, 2008. 248 p. (in Russian)
14. *Kanel G.I.* Shock Waves in Solid State Physics. Moscow: Fizmatlit, 2018. 208 p. (in Russian)