

УДК 539.3

## ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ЗОНОЙ КОНТАКТА

© 2023 г. Н. Б. Золотов<sup>1</sup>, Д. А. Пожарский<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

\*e-mail: pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.07.2022 г.

После доработки 29.10.2022 г.

Принята к публикации 01.11.2022 г.

Рассматриваются двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя с неизвестной областью контакта. Одна грань слоя находится в условиях скользящей или жесткой заделки. Задачи сводятся к интегральным уравнениям, ядра которых не содержат квадратур. Для случая полного контакта другой грани слоя с двумерной синусоидальной жесткой поверхностью задачи имеют точное решение, которое используется для отладки программ, реализующих численный метод нелинейных интегральных уравнений Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики при внедрении системы эллиптических параболоидов, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта.

*Ключевые слова:* двоякопериодический контакт, упругий слой, интегральные уравнения

**DOI:** 10.31857/S0032823523010101, **EDN:** HVZBFR

Пионерской работой в области периодического контакта является решение Вестергаарда для одномерной волнистой поверхности [1]. Основная доля публикаций по данной тематике относится к плоским задачам [2]. Для исследования пространственного периодического контакта для круговых инденторов разработан метод локализации [3, 4]. Асимптотические [5, 6] и численные [7] результаты получены для контакта двумерной волнистой поверхности с полупространством. На основе регулярного асимптотического метода изучались двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя при заданной области контакта [8]. Учитывалось влияние трения, износа, сцепления, микрогеометрии и адгезии при периодическом контакте упругих тел [9–13], было получено точное решение задачи о полном контакте волнистого штампа со слоем [13]. Исследовались периодические контактные задачи для вязкоупругого полупространства [14], а также для полупространства с частично закрепленной границей [15].

В настоящей статье для решения трехмерных периодических контактных задач для слоя с *неизвестной* зоной контакта применяется численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений [16]. Для верификации результатов используется точное решение для полного контакта двумерной синусоидальной жесткой поверхности и упругого слоя, которое обобщает известное решение Джонсона и соавторов для полупространства [5, 6]. В отличие от прямого численного метода быстрого преобразования Фурье [7] метод интегральных уравнений [16] позволяет получать приемлемые результаты при существенно меньшем числе узлов. Показано, что переход от дис-

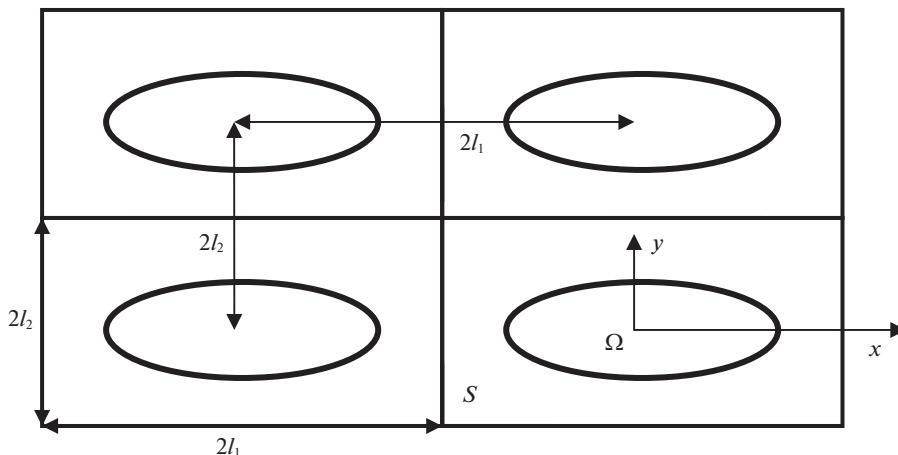


Рис. 1. Двойкопериодическая область контакта.

кретного к непрерывному двойкопериодическому контакту (перколяция) связан с образованием новых интегрируемых особенностей ядра интегрального уравнения на линиях перехода. Качественные выводы согласуются с известными результатами метода локализации для полупространства [3, 4].

**1. Постановка задач, интегральные уравнения.** В декартовых координатах рассмотрим слой  $\{|x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$  с параметрами упругости  $G$  (модуль сдвига) и  $\nu$  (коэффициент Пуассона). Изучим контактные задачи без учета сил трения, когда контактное давление

$$q(x, y) = q(x - 2nl_1, y - 2ml_2); \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

является двойкопериодической функцией с полупериодами  $l_1$  и  $l_2$  соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ . Контакт осуществляется на верхней грани слоя  $z = 0$ , а нижняя грань  $z = -h$  подчинена условиям скользящей или жесткой заделки (задачи А и Б соответственно). Давление (1.1) порождено двойкопериодической системой одинаковых жестких штампов, внедренная подошва которых не имеет острых кромок, поэтому зона контакта заранее неизвестна и содержится в прямоугольных ячейках размера  $2l_1 \times 2l_2$ . Пусть ячейка  $S$  содержит начало координат и единичную область контакта  $\Omega$  (рис. 1). Форма оснований штампов описывается функцией

$$f(x, y) = f(x - 2nl_1, y - 2ml_2); \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

К каждому штампу приложена нормальная сила  $P$  так, что штампы вдавливаются без перекоса и испытывают осадку  $\delta$ .

Граничные условия контактных задач имеют вид

$$z = h: \quad u_z = -(\delta - f(x, y)), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (x, y) \notin \Omega$$

$$\text{А) } z = 0: u_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \text{Б) } z = 0: u_x = u_y = u_z = 0$$

При заданных параметрах упругости  $G$ ,  $\nu$ , величинах  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\delta$ ,  $h$  и функции  $f(x, y)$  требуется определить область контакта  $\Omega$  и давление  $q(x, y) = -\sigma_z(0, 0, h)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ . Затем при использовании интегрального условия равновесия штампов может быть найдена сила  $P$ .

Интегральные уравнения задач А и Б относительно контактного давления, используя известные функции Грина для слоя и периодичность, можно записать, интегрируя по единичной области контакта  $\Omega$ , в виде ( $\theta = G/(1 - \nu)$ )

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta = 2\pi\theta[\delta - f(x, y)]; \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

с ядром без квадратур в форме В.М. Александрова [8] ( $s = \xi - x, t = \eta - y$ )

$$K(\xi, \eta, x, y) = R^{-1} + F(s, t); \quad R = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$F(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{4h^2 + R^2}} + F_1 + F_2 + F_3 - \frac{\pi h}{2l_1 l_2} (G_0 + 2G_1 + 2G_2 + G_3)$$

$$F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n0} + Q_{-n,0}), \quad F_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{0m} + Q_{0,-m})$$

$$F_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{nm} + Q_{-n,m} + Q_{n,-m} + Q_{-n,-m})$$

$$Q_{nm} = R_{nm}^{-1} - (4h^2 + R_{nm}^2)^{-1/2}, \quad R_{nm} = [(s + 2nl_1)^2 + (t + 2ml_2)^2]^{1/2} \quad (1.3)$$

А)  $G_0 = 3/2$ ,    Б)  $G_0 = 2 - 4(\kappa - 1)/(\kappa + 1)^2$ ,     $\kappa = 3 - 4\nu$

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} M(r_{n0}) \cos \frac{\pi ns}{l_1}, \quad G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} M(r_{0m}) \cos \frac{\pi mt}{l_2}$$

$$G_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M(r_{nm}) \cos \frac{\pi ns}{l_1} \cos \frac{\pi mt}{l_2}$$

$$M(r) = \frac{1 - \exp(-2r) - L(r)}{r}, \quad r_{nm} = \pi h [(n/l_1)^2 + (m/l_2)^2]^{1/2}$$

А)  $L(r) = \frac{\text{ch}(2r) - 1}{\text{sh}(2r) + 2r}$ ,    Б)  $L(r) = \frac{2\kappa \text{sh}(2r) - 4r}{2\kappa \text{ch}(2r) + 1 + \kappa^2 + 4r^2}$

Сходимость рядов в выражениях для  $F_k$ . ( $k = 1, 2, 3$ ) улучшается при уменьшении толщины слоя  $h$ . Функция  $M(r)$  на бесконечности убывает, как  $\exp(-2r)$ , обеспечивая сходимость рядов в выражениях для  $G_k$ . ( $k = 1, 2, 3$ ), а в нуле стремится к  $G_0$ .

**2. Точное решение.** Интегральное уравнение (1.2) имеет точное решение, когда единичная область контакта  $\Omega$  совпадает с ячейкой  $S$  (полный контакт), а к функции  $f(x, y)$  применимо преобразование Фурье. Для определенности рассмотрим полный контакт грани упругого слоя с жесткой двойкопериодической синусоидальной поверхностью амплитуды  $A$  и длинами волн (периодами)  $2l_1$  и  $2l_2$ . В рамках линейной теории упругости предполагается, что амплитуда мала по сравнению с длинами волн [6]. В этом случае уравнение (1.2) преобразуется к виду [8]

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) d\xi d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{u^2 + w^2})}{\sqrt{u^2 + w^2}} \cos\left(u \frac{\xi - x}{h}\right) \cos\left(w \frac{\eta - y}{h}\right) dudw =$$

$$= 4\pi^2 \theta h \left[ \delta - \left( A - A \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} \right) \right]; \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\delta \geq 2A) \quad (2.1)$$

Условие  $\delta \geq 2A$  не является достаточным для полного контакта ввиду несогласованности деформаций поверхности слоя с жесткой поверхностью. Как показывают

расчеты по методу Галанова, при  $\delta = 2A$  могут оставаться малые зоны в  $S$  вне контакта. В этом случае полный контакт возникает лишь при  $\delta \geq \delta_1 > 2A$ , где  $\delta_1$  – некоторое критическое значение.

Пусть  $l_1 \geq l_2$ . Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l_1}, \quad \xi' = \frac{\xi}{l_1}, \quad y' = \frac{y}{l_1}, \quad \eta' = \frac{\eta}{l_1}, \quad A' = \frac{A}{l_1}, \quad \lambda = \frac{h}{l_1}, \quad \delta' = \frac{\delta - A}{l_1} \\ q'(x', y') &= \frac{q(x, y)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{l_2}{l_1}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l_1^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Параметр  $\lambda$  характеризует относительную толщину упругого слоя, а параметр  $\varepsilon \leq 1$  – отношение периодов.

В обозначениях (2.2) уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{u^2 + w^2})}{\sqrt{u^2 + w^2}} \cos\left(u \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \cos\left(w \frac{\eta - y}{\lambda}\right) dudw = \\ = 2\pi\lambda \left( \delta + A \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon} \right); \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\delta \geq A) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Точное решение интегрального уравнения (2.3) находится при помощи двойного преобразования Фурье. В результате получим

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{\delta L_0}{2\pi\lambda} + \frac{A\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}}{2L(\pi\lambda\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}})} \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon} \\ L_0 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{L(u)}; \quad \text{А) } L_0 = 2, \quad \text{Б) } L_0 = \frac{2(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В задаче Б при приближении материала слоя к несжимаемому ( $\nu \rightarrow 0.5$ ) контактные давления неограниченно возрастают (полный контакт становится затруднительным).

При  $\lambda \rightarrow \infty$  решение (2.4) переходит в решение Джонсона и соавторов [5, 6] для упругого полупространства

$$q(x, y) = \frac{A\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}}{2} \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon},$$

из которого нельзя определить связь между вдавливающей силой и осадкой.

Для слоя из решения (2.4) найдем вдавливающую силу

$$P = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(x, y) dx dy = \frac{2\delta L_0}{\pi\lambda} \quad (2.5)$$

Для задачи Б сила  $P$  чувствительна к значению коэффициента Пуассона. При  $\nu = 0.25$  значение  $P$  (2.5) для задачи Б на 12.5% превышает соответствующее значение для задачи А.

**3. Численный анализ.** Для численного решения контактных задач применим метод, предложенный Галановым [16], позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. В этом методе интегрирование в уравнении (1.2), (1.3) распространяется на ячейку  $S$ , содержащую область  $\Omega$ . Предположения об отсутствии контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области  $S \setminus \Omega$  приводят к системе интегрального уравнения и интегрального неравенства (снова используем размерные величины)

$$\begin{aligned} \int_S q(N)K(N, M)dN &= d(M); & q(M) &\geq 0, & M \in \Omega \\ \int_S q(N)K(N, M)dN &> d(M); & q(M) &= 0, & M \in S \setminus \Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$N = \xi, \eta, \quad M = x, y, \quad d(M) = 2\pi\theta[\delta - f(M)]$$

После введения нелинейных операторов

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представления искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

система (3.1) сводится к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d, \quad (3.2)$$

где  $p = p(M)$ ,  $p^\pm = p^\pm(M)$ ,  $d = d(M)$ ,

$$Kp^+ = \int_S p^+(N)K(N, M)dN \quad (3.3)$$

При этом интегральное неравенство (3.1) удовлетворяется автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (3.1) и уравнения (3.2) [16].

При численном решении уравнения (3.2) применяется модифицированный метод Ньютона, основанный на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F' p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M); \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d,$$

где  $F$  – дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор  $\Theta$  по равномерной метрике [16].

В отличие от задач для одного штампа ядра (1.3) в ячейке  $S$  имеют не только классическую особенность  $R^{-1}$ , но и дополнительные интегрируемые особенности  $R_{\pm 1, 0}^{-1}$ ,  $R_{0, \pm 1}^{-1}$ ,  $R_{\pm 1, \pm 1}^{-1}$ ,  $R_{\pm 1, \mp 1}^{-1}$  соответственно в точках  $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y)$ ,  $(\xi = x, \eta = y \mp 2l_2)$ ,  $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y \mp 2l_2)$  и  $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y \pm 2l_2)$  на сторонах и в вершинах прямоугольника  $S$ . При расчете значений ядра оператора (3.3) в этих точках особенности сглаживались по формуле ( $n, m = 0; \pm 1$ )

$$(\xi - x + 2nl_1)^2 + (\eta - y + 2ml_2)^2 \rightarrow (\xi - x + 2nl_1)^2 + (\eta - y + 2ml_2)^2 + \frac{h_1 h_2}{16},$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – шаги сетки соответственно по осям  $x$  и  $y$ .

Отладку программ проведем при помощи сравнения интегральной характеристики с точным значением (2.5) при  $A = 0.001$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$ . В силу симметрии достаточно интегрировать по четверти  $S$ . В табл. 1 даны значения  $P$ , рассчитанные при разных  $\lambda$ ,  $\delta$  и изменении числа узлов равномерной сетки в первой четверти  $S$  (сетка  $9 \times 9$  соответствует 289 узлам в  $S$ ; сетка  $13 \times 13$  – 625 узлам в  $S$ ). Видно, что при сгущении сетки численное решение приближается к точному. Для сетки  $13 \times 13$  погрешность расчета интегральной характеристики не превосходит 3%. В табл. 1 неполный (почти полный) контакт осуществляется для задачи А при  $\lambda = 1$ ,  $\delta \times 10^3 = 2$ . При почти полном контакте численное решение также стремится к точному.

**Таблица 1.** Сравнение значений силы  $P(\delta) \times 10^3$  для сеток  $9 \times 9$ ,  $13 \times 13$  с (2.5) при  $A = 0.001$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$ 

Задача		А		Б	
$\delta \times 10^3$		2	3	2	3
$\lambda = 0.25$	$9 \times 9$	10.50	15.75	11.86	17.78
	$13 \times 13$	10.40	15.60	11.73	17.59
	(2.5)	10.19	15.28	11.46	17.19
$\lambda = 1$	$9 \times 9$	2.58	3.87	2.91	4.36
	$13 \times 13$	2.57	3.86	2.90	4.35
	(2.5)	2.55	3.82	2.86	4.30

**Таблица 2.** Значения силы  $P \times 10^3$  при  $A_0 = B_0 = 0.001$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$ 

$\delta_0 \times 10^3$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\lambda = 1$					
Задача А	0.172	0.575	1.124	1.734	2.365
Задача Б	0.183	0.634	1.257	1.948	2.663
$\lambda = 2$					
Задача А	0.119	0.337	0.605	0.897	1.205
Задача Б	0.127	0.369	0.671	1.004	1.352
$\lambda = 3$					
Задача А	0.0935	0.247	0.426	0.619	0.820
Задача Б	0.101	0.271	0.473	0.691	0.920

Рассмотрим внедрение двоякопериодической системы эллиптических параболоидов, когда

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad R_1 \geq R_2, \quad (x, y) \in S$$

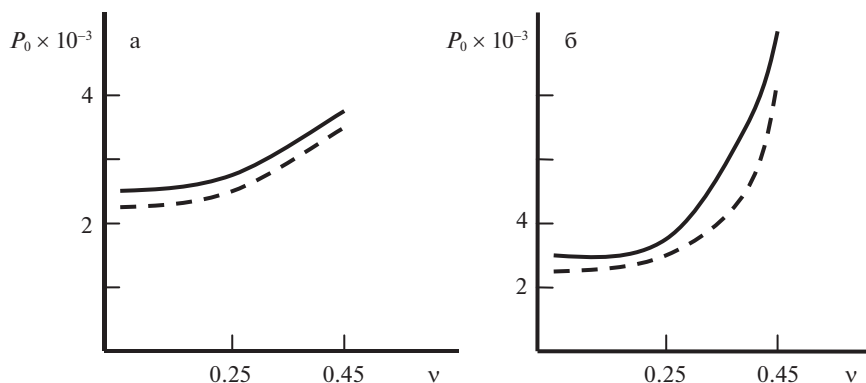
Далее используем безразмерные обозначения (2.2), заменяя формулы для  $A$  и  $\delta$  на

$$A_0 = \frac{l_1}{2R_1}, \quad B_0 = \frac{l_1}{2R_2}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{l_1}$$

Значения силы  $P$  в зависимости от осадки  $\delta_0$  при разных  $\lambda$  приведены в табл. 2 для случая  $A_0 = B_0 = 0.001$  (круговые параболоиды),  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$ . В задаче А (скользящая заделка) значения силы меньше, чем в задаче Б (жесткая заделка). В обеих задачах, как видно из табл. 2, вдавливающая сила снижается при увеличении  $\lambda$ . В задаче Б, как правило, площадь области контакта немного больше, чем в задаче А.

Для изучения зависимости интегральной характеристики от  $\nu$  введем безразмерную силу

$$P_0 = \frac{P}{2\pi G l_1^2} \quad (3.4)$$



**Рис. 2.** Зависимость безразмерной вдавливающей силы  $P_0$  от коэффициента Пуассона  $\nu$  для задач А и  $A_1$  (а) и Б и  $B_1$  (б);  $\delta_0 = A_0 = B_0 = 0.001$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.25$ , пунктир для задач  $A_1$  и  $B_1$ .

На рис. 2 представлены зависимости силы  $P_0$  от  $\nu$  для задач А и Б при  $\delta_0 = A_0 = B_0 = 0.001$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.25$  и для соответствующих случаев вдавливания одного штампа (задачи  $A_1$  и  $B_1$ ). Для задач А и  $A_1$  зависимость  $P_0(\nu)$  имеет гиперболический тип. Значения силы (3.4) для двоякопериодической системы больше, чем для случая одного штампа. Труднее становится вдавить двоякопериодическую систему для задачи Б, когда материал приближается к несжимаемому.

При сближении штампов (уменьшении  $\epsilon$ ) растет их взаимодействие, которое проявляется в уменьшении интегральной характеристики контактных давлений.

Для вытянутых вдоль оси  $x$  эллиптических параболоидов ( $A_0 = 0.0005$ ,  $B_0 = 0.001$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$ ) значения  $P$  больше, чем соответствующие значения для круговых параболоидов из табл. 2.

Отметим, что в случае периодической контактной задачи для упругого полупространства на основе метода локализации были сделаны выводы о том, что учет взаимного влияния пятен контакта уменьшает контактный радиус и увеличивает давление в центральной части области контакта по сравнению со случаем единичного штампа [17]. Для слоя можно сделать аналогичные выводы. Хотя интегральная характеристика (номинальная сила) для единичного штампа, как правило, больше, чем для двоякопериодической системы, давление в центре области контакта больше для двоякопериодической системы. При этом номинальная площадь области контакта меньше для двоякопериодической системы. Например, для задач  $A_1$  и  $B_1$  при  $\delta_0 = 0.0025$ ,  $A_0 = B_0 = 0.001$ ,  $\epsilon = \lambda = 1$ ,  $\nu = 0.25$  область контакта заполняет  $S$ , а для аналогичных значений параметров в задачах А и Б имеются узлы вне контакта; контактное давление в точке первоначального касания  $q_0 \times 10^3 = 0.833$  для задачи  $A_1$  и  $q_0 \times 10^3 = 0.885$  для задачи А, аналогично  $q_0 \times 10^3 = 0.928$  для задачи  $B_1$  и  $q_0 \times 10^3 = 0.970$  для задачи Б.

В табл. 3 даны минимальные значения осадки и соответствующие значения силы, при которых начинается перколяция (сразу в двух направлениях), а также при наступлении полного контакта для двоякопериодической системы равноотстоящих друг от друга круговых параболоидов. В начале перколяции для обеих задач зависимость от  $\min \delta_0 \times 10^3$  от  $\lambda$  близка к линейной. Отметим, что значения номинальной силы в табл. 3 с ростом  $\lambda$  выходят на постоянный одинаковый для обеих задач уровень.

**Таблица 3.** Минимальные значения осадки и силы для начала перколяции и полного контакта при  $A_0 = B_0 = 0.001$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.25$

Задача	$\lambda$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Начало перколяции						
А	$\delta_0 \times 10^3$	1.41	2.14	2.87	3.61	4.33
А	$P \times 10^3$	1.97	1.91	1.90	1.91	1.90
Б	$\delta_0 \times 10^3$	1.33	1.97	2.62	3.27	3.91
Б	$P \times 10^3$	2.00	1.91	1.90	1.90	1.90
Полный контакт						
А	$\delta_0 \times 10^3$	2.82	4.49	6.34	8.22	10.09
А	$P \times 10^3$	5.67	4.93	4.88	4.88	4.88
Б	$\delta_0 \times 10^3$	2.67	4.09	5.71	7.37	9.03
Б	$P \times 10^3$	5.84	4.97	4.88	4.88	4.89

**Заклучение.** Согласование численного решения с точным подтверждает корректность ядра в форме (1.3). Метод Галанова эффективен и в предельном случае полного контакта, когда интегральное неравенство (3.1) исчезает. По сравнению с прямым численным методом [7] приемлемая точность достигается при небольшом числе узлов сетки. Жесткая заделка одной грани упругого слоя из несжимаемого материала препятствует полному двоякопериодическому контакту по другой грани. При двоякопериодическом контакте для слоя выявлены эффекты аналогичные обнаруженным ранее методом локализации для полупространства.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013) и посвящается столетию прикладного математика академика Е.В. Золотова (1922–1990 гг.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westergaard H.M.* Bearing pressure and cracks // ASME. J. Appl. Mech. E. 1939. V. 6. № 1. P. 43–53.
2. *Пожарский Д.А.* Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33.
3. *Горячева И.Г.* Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
4. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Berlin: Springer, 1998. 360 p.
5. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. № 6. P. 383–396.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183.
8. *Александров В.М.* Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 307–315.
9. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
10. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268. № 11–12. P. 1417–1422.
11. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 102–103. P. 66–76.



12. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*. 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.
13. *Солдатенков И.А.* Пространственная контактная задача для упругого слоя и волнистого штампа при наличии трения и износа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 145–155.
14. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.* 2021. V. 161. P. 107078.
15. *Золотов Н.Б., Пожарский Д.А.* Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // *ПММ*. 2022. Т. 86. № 3. С. 394–403.
16. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
17. *Яковенко А.А.* Моделирование дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. н. М.: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2022. 127 с.

### Doubly Periodic Contact Problems for a Layer with an Unknown Contact Zone

N. B. Zolotov<sup>a</sup> and D. A. Pozharskii<sup>a, #</sup>

<sup>a</sup>*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: pozharda@rambler.ru*

Doubly periodic contact problems are considered for a layer with an unknown contact domain. One face of the layer is subjected to sliding support or rigidly fixed. The problems are reduced to integral equations the kernels of which do not contain integrals. For full contact of the other layer face with a two-dimensional sinusoidal rigid surface, the problems have exact solutions used to verify computer programs realizing the numerical method of Galanov nonlinear integral equations which allows us to determine the contact domain and the contact pressure simultaneously. Mechanical characteristics are calculated for indentation of the system of elliptic paraboloids, the passage from discrete to continuous contact zones is investigated.

*Keywords:* doubly periodic contact, elastic layer, integral equations

### REFERENCES

1. *Westergaard H.M.* Bearing pressure and cracks // *ASME J. Appl. Mech. E.*, 1939, vol. 6, no. 1, pp. 43–53.
2. *Pozharskii D.A.* Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (review) // *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki*, 2021, no. 2, pp. 22–33. (in Russian)
3. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
4. *Goryacheva I.G.* *Contact Mechanics in Tribology*. Berlin: Springer, 1998. 360 p.
5. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // *Int. J. Mech. Sci.*, 1985, vol. 27, no. 6, pp. 383–396.
6. *Johnson K.L.* *Contact Mechanics*. Cambridge: Univ. Press, 1985. 468 p.
7. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // *Tribol. Lett.*, 2014, vol. 56, pp. 171–183.
8. *Aleksandrov V.M.* Doubly periodic contact problems for and elastic layer // *JAMM*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 297–305.
9. *Soldatenkov I.A.* The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 245–255.
10. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // *Wear*, 2010, vol. 268, no. 11–12, pp. 1417–1422.
11. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 102–103, pp. 66–76.

12. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350.
13. *Soldatenkov I.A.* The spatial contact problem for an elastic layer and wavy punch when there is friction and wear // *JAMM*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 99–106.
14. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.*, 2021, vol. 161, pp. 107078.
15. *Zolotov N.B., Pozharskii D.A.* Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1758–1765.
16. *Galanov B.A.* The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known // *JAMM*, 1985, vol. 49, no. 5, pp. 634–640.
17. *Yakovenko A.A.* Modeling of Discrete Contact of Elastic and Viscoelastic Bodies. Ph.D. Thesis. Moscow: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 2022. 127 p.