ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 1, с. 3–18

УДК 531.38; 531.39

ОДИН КЛАСС РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

© 2023 г. Г. В. Горр[1,*]

[1]Государственное бюджетное учреждение “Институт прикладной математики и механики”, Донецк, Россия

**e-mail: gvgorr@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.09.2022 г.
После доработки 22.11.2022 г.
Принята к публикации 22.11.2022 г.

В статье рассмотрена задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных силовых полей. Исследованы условия существования прецессионных движений, характеризующихся свойством: скорость прецессии тела в два раза больше скорости собственного вращения. Показано, что тело имеет динамическую симметрию относительно оси, образующей постоянный угол с неподвижным в пространстве вектором. В случае сферического распределения масс тела он равен $\arccos\frac{1}{4}$. Решение уравнений движения тела описывается эллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: прецессии тела, резонансные движения, однородные силовые поля

DOI: 10.31857/S0032823523010071, **EDN:** HVLUQK

1. Введение. Прецессионные движения тела, имея достаточно широкий диапазон применения в приложениях (например, в теории гироскопических систем [1]), большой интерес представляют в теоретических исследованиях, поскольку они дают возможность моделировать эти движения под действием различного класса сил. В динамике тяжелого твердого тела существуют регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали [2], регулярные прецессии тела относительно наклонной оси [3], полурегулярные прецессии [4] и прецессии общего вида в решении В. Гесса [5] и прецессии общего вида [6]. Но, как показано в [4], тяжелое твердое тело не может совершать полурегулярную прецессию второго типа. В обобщенных задачах динамики твердого тела (задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с постоянным и переменным гиростатическим моментом, задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона) получены многочисленные классы прецессий [7–9]. Определенный интерес представляют и исследования прецессий системы связанных твердых тел [10], состоящей из гироскопа Лагранжа и Гесса, а также в задаче о движении твердого тела с жидким заполнением [11–14].

В задаче о движении твердого тела в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных силовых полей, известны результаты, посвященные рассмотрению только регулярных прецессий [15–17]. В данной статье изучается класс прецессий общего вида при дополнительном предположении о том, что скорость прецессии тела в два раза больше скорости собственного вращения (он может быть отнесен к резонансным прецессиям тела). Из трех направлений, которые характеризуют результирующие силы однородных полей, выделено приоритетное направление с единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$. Поскольку движение тела является прецессией, то постоянен угол между вектором $\boldsymbol{\gamma}$ и вектором $\mathbf{a}$, неизменно связанным с твердым телом. В результате проведенных исследований по нахождению условий существования резонансных прецессионных движений установлено, что векторы, определяющие центры приложения сил других направлений γ_1, γ_2 ортогональны. Получено алгебраическое уравнение второго порядка на угол нутации, коэффициенты которого зависят от главных моментов инерции тела. Если тело имеет сферическое распределение масс, то этот угол равен $\arccos\frac{1}{4}$. Нахождение основных переменных уравнений движения сведено к обращению эллиптических интегралов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ единичные векторы, характеризующие направления сил $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ каждого из полей; C, C_1, C_2 — центры приведения сил; $\mathbf{s} = P\,\mathbf{OC}$, $\mathbf{r} = P_1\,\mathbf{OC}_1$, $\mathbf{p} = P_2\,\mathbf{OC}_2$; $Oxyz$ — подвижная система координат, O — неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе $Oxyz$ имеет значение $A = (A_{ij})$ $(i, j = \overline{1,3})$. Тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3)$ $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — единичные векторы системы $Oxyz)$. Для векторов $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$ запишем соотношения

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{p} = p_1\mathbf{i}_1 + p_2\mathbf{i}_2 + p_3\mathbf{i}_3 \tag{2.1}$$

Тогда уравнения движения тела представим в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \mathrm{s}\times\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p}\times\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \tag{2.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2.3}$$

где точка над переменными $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ обозначает дифференцирование по времени t. В формулах (2.2), (2.3) полагаем

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \quad |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad \left|\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\right| = 1, \tag{2.4}$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Тогда очевидны равенства $\mathbf{P} = P\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{P}_i = P_i\,\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$.

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$. Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС)

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0), \tag{2.5}$$

где θ_0 — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ ($\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 1$). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma} \tag{2.6}$$

Переменные φ, ψ и постоянную θ_0 можно трактовать, как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = b_0[a_0\boldsymbol{\gamma}\sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a}\sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma})\cos(\psi + \psi_0)], \tag{2.7}$$

где $b_0 = \frac{1}{a_0'}$ $(a_0' = \sin\theta_0)$, ψ_0 — постоянная.

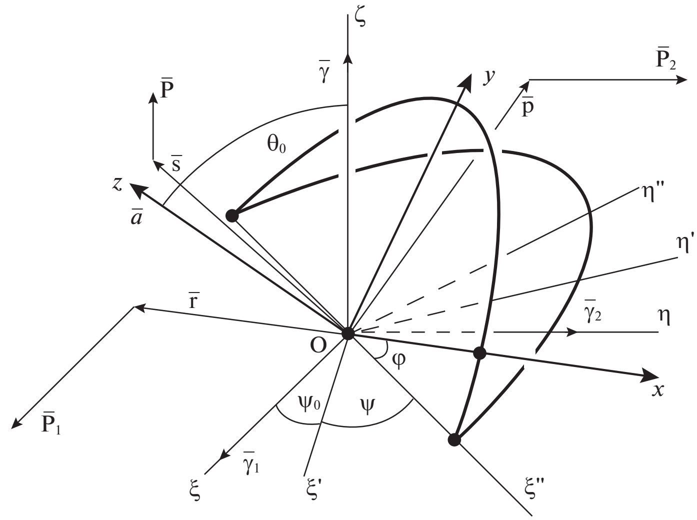

Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

Значение вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ найдем по второй формуле системы (2.4):

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = b_0 \left[\mathbf{a}\cos(\psi + \psi_0) - a_0\boldsymbol{\gamma}\cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma})\sin(\psi + \psi_0)\right] \tag{2.8}$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что $\mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$, то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор $\mathbf{i}_3$ по вектору $\mathbf{a}$. Тогда на основании ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [6, 7]

$$\boldsymbol{\gamma} = a_0' \sin\varphi \cdot \mathbf{i}_1 + a_0' \cos\varphi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}) \tag{2.9}$$

На основании (2.6), (2.9) запишем компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_1 = a_0'\dot\psi \sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot\psi\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + a_0\dot\psi \tag{2.10}$$

На рис. 1 приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$ ($O\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат).

Замечание 1. При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7, 8], который отличается от методов, применяемых в [11, 14–17].

Замечание 2. Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2\left(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right) = 2E, \tag{2.11}$$

где E – постоянная. Как было показано [6, 7], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5). Внесем в уравнение (2.2) значение $\boldsymbol{\omega}$ из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе $\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma}$ с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{gathered}\ddot\varphi(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + \ddot\psi(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - \dot\psi^2[\mathbf{a}\cdot(A\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma})] - [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}\times\boldsymbol{\gamma})] - \\ - b_0\sin(\psi+\psi_0)\cdot\{a_0[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}] + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}\} - \\ - b_0\cos(\psi+\psi_0)\cdot\{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma} - a_0[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{p}\times\boldsymbol{\gamma})]\} = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a}\cdot\gamma)+\ddot{\psi}(A\gamma\cdot\gamma)+2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a}\cdot(A\gamma\times\gamma)]+\dot{\varphi}^2[\gamma\cdot(\mathbf{a}\times A\mathbf{a})]-$$
$$-\,b_0\sin(\psi+\psi_0)\cdot\{a_0(\mathbf{p}\cdot\gamma)+[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}\times\gamma)-$$
$$-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})\}-b_0\cos(\psi+\psi_0)\cdot\{a_0(\mathbf{r}\cdot\gamma)-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})+[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times\mathbf{p})]\}=0 \tag{3.2}$$

$$\ddot{\varphi}[A\mathbf{a}\cdot(\gamma\times\mathbf{a})]+\ddot{\psi}[A\gamma\cdot(\mathbf{a}\times\gamma)]+\dot{\varphi}\dot{\psi}\Big[2(A\gamma\cdot\gamma)-a_0'^2\mathrm{Sp}(A)-2a_0(A\mathbf{a}\cdot\gamma)\Big]+$$
$$+\,\dot{\varphi}^2\left[(A\mathbf{a}\cdot\gamma)-a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\right]+\dot{\psi}^2\left[a_0(A\gamma\cdot\gamma)-(A\mathbf{a}\cdot\gamma)\right]-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s})+a_0(\mathbf{s}\cdot\gamma)- \tag{3.3}$$
$$-\,a_0'\left[(\mathbf{p}\cdot\gamma)\cos(\psi+\psi_0)-(\mathbf{r}\cdot\gamma)\sin(\psi+\psi_0)\right]=0,$$

где $\mathrm{Sp}(A)=A_{11}+A_{22}+A_{33}$ – след матрицы A.

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.11) на ИС (2.5), (2.6):

$$(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\dot{\varphi}^2+2(A\mathbf{a}\cdot\gamma)\dot{\varphi}\dot{\psi}+(A\gamma\cdot\gamma)\dot{\psi}^2-2\{(\mathbf{s}\cdot\gamma)+b_0\left[\sin(\psi+\psi_0)\cdot(a_0(\mathbf{r}\cdot\gamma)-\right.$$
$$\left.-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{p}\cdot(\gamma\times\mathbf{a}))+\cos(\psi+\psi_0)\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}-a_0(\mathbf{p}\cdot\gamma)+\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}\times\gamma))\right]\}=2E \tag{3.4}$$

Введем обозначения

$$f_0(\varphi)=a_0'(s_1\sin\varphi+s_2\cos\varphi)+a_0s_3$$
$$\tilde{f}_0(\varphi)=a_0'(s_2\sin\varphi-s_1\cos\varphi)$$
$$f_1(\varphi)=a_0'\Big[(a_0r_1+p_2)\sin\varphi+(a_0r_2-p_1)\cos\varphi-a_0'r_3\Big]$$
$$f_2(\varphi)=a_0'\Big[(r_2-a_0p_1)\sin\varphi-(a_0p_2+r_1)\cos\varphi+a_0'p_3\Big]$$
$$f_3(\varphi)=a_0'\left[(p_1-a_0r_2)\sin\varphi+(p_2+a_0r_1)\cos\varphi\right] \tag{3.5}$$
$$f_4(\varphi)=a_0'\left[(r_1+a_0p_2)\sin\varphi+(r_2-a_0p_1)\cos\varphi\right]$$
$$f_5(\varphi)=a_0'\Big[a_0(s_1\sin\varphi+s_2\cos\varphi)-a_0's_3\Big]$$
$$f_6(\varphi)=-a_0'\Big[a_0'(r_1\sin\varphi+r_2\cos\varphi)+a_0r_3\Big]$$
$$f_7(\varphi)=a_0'\Big[a_0'(p_1\sin\varphi+p_2\cos\varphi)+a_0p_3\Big]$$

Сначала запишем интеграл (3.4) в силу (3.5):

$$(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\dot{\varphi}^2+2(A\mathbf{a}\cdot\gamma)\dot{\varphi}\dot{\psi}+(A\gamma\cdot\gamma)\dot{\psi}^2-$$
$$-\,2\left[f_0(\varphi)+b_0\left(f_1(\varphi)\sin(\psi+\psi_0)+f_2(\varphi)\cos(\psi+\psi_0)\right)\right]=2E \tag{3.6}$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+\ddot{\psi}(A\mathbf{a}\cdot\gamma)-\dot{\psi}^2[\mathbf{a}\cdot(A\gamma\times\gamma)]+\tilde{f}_0(\varphi)-$$
$$-\,b_0\left(f_3(\varphi)\sin(\psi+\psi_0)+f_4(\varphi)\cos(\psi+\psi_0)\right)=0 \tag{3.7}$$

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a}\cdot\gamma)+\ddot{\psi}(A\gamma\cdot\gamma)-2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\gamma)]-\dot{\varphi}^2[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\mathbf{a})]-$$
$$-\,b_0\left[f_1(\varphi)\cos(\psi+\psi_0)-f_2(\varphi)\sin(\psi+\psi_0)\right]=0 \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\varphi}[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\mathbf{a})]+\ddot{\psi}[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\gamma)]+\dot{\varphi}\dot{\psi}[2(A\gamma\cdot\gamma)-\\
-a_0'^2\,\mathrm{Sp}(A)-2a_0(A\mathbf{a}\cdot\gamma)]+\dot{\varphi}^2\left[(A\mathbf{a}\cdot\gamma)-a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\right]+\\
+\dot{\psi}^2\left[a_0(A\gamma\cdot\gamma)-(A\mathbf{a}\cdot\gamma)\right]+f_5(\varphi)+f_6(\varphi)\sin(\psi+\psi_0)+\\
+f_7(\varphi)\cos(\psi+\psi_0)=0
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Представление соотношений (3.1)–(3.4) в виде (3.6)–(3.9) связано с решением задачи о замене одного из уравнений (3.7)–(3.9) интегралом (3.6). Вычислим производную по времени от левой части уравнения (3.6), используя соотношения

$$\dot{\gamma}=\dot{\varphi}(\gamma\times\mathbf{a}),\quad \dot{f}_0=-\dot{\varphi}\tilde{f}_0(\varphi),\quad \dot{f}_1(\varphi)=\dot{\varphi}f_3(\varphi),\quad \dot{f}_2(\varphi)=\dot{\varphi}f_4(\varphi)$$

Если учесть в полученном уравнении соотношения (3.7), (3.8), то имеем тождество. Данное свойство выполняется в случае, когда одно из уравнений (3.7), (3.8) не вырождается в тождество (см. разд. 6, уравнения (6.2)). Исключая этот вариант, можно рассматривать интеграл (3.6) совместно с одним из указанных уравнений, но уравнение (3.9) необходимо учитывать всегда.

4. Исследование уравнений (3.6)–(3.9) в случае $\psi=2\varphi$. В динамике твердого тела известны решения, описывающие прецессии при условии

$$\psi=2\varphi \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что $\dot{\psi}=2\dot{\varphi}$, то есть скорость прецессии в два раза больше скорости собственного вращения. Введем обозначения

$$\begin{gathered}
b_1=a_0'(a_0r_1+p_2),\quad b_2=a_0'(a_0r_2-p_1),\quad c_1=a_0'(r_2-a_0p_1)\\
c_2=-a_0'(a_0p_2+r_1),\quad b_0'=-(a_0')^2r_3,\quad c_0=(a_0')^2p_3
\end{gathered} \tag{4.2}$$

В силу (4.2) функции $f_i(\varphi)$ $(i=\overline{1,3})$ преобразуем к виду

$$\begin{gathered}
f_1(\varphi)=b_1\sin\varphi+b_2\cos\varphi+b_0',\quad f_1(\varphi)=c_1\sin\varphi+c_2\cos\varphi+c_0\\
f_3(\varphi)=-b_2\sin\varphi+b_1\cos\varphi,\quad f_4(\varphi)=-c_2\sin\varphi+c_1\cos\varphi
\end{gathered} \tag{4.3}$$

На основании (4.1)–(4.3) найдем функции

$$\begin{gathered}
\Phi_1(\varphi)=f_1(\varphi)\cos(2\varphi+\psi_0)-f_2(\varphi)\sin(2\varphi+\psi_0)=H_3\sin3\varphi+\\
+G_3\cos3\varphi+H_2\sin2\varphi+G_2\cos2\varphi+H_1\sin\varphi+G_1\cos\varphi
\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}
\Phi_2(\varphi)=f_1(\varphi)\sin(2\varphi+\psi_0)+f_2(\varphi)\cos(2\varphi+\psi_0)=G_3\sin3\varphi-\\
-H_3\cos3\varphi+G_2\sin2\varphi-H_2\cos2\varphi+G_1\sin\varphi-H_1\cos\varphi
\end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}
\Phi_3(\varphi)=f_3(\varphi)\sin(2\varphi+\psi_0)+f_4(\varphi)\cos(2\varphi+\psi_0)=\\
=H_3\sin3\varphi+G_3\cos3\varphi-H_1\sin\varphi-G_1\cos\varphi,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{gathered}
H_3=r_{12}\cos\psi_0-r_{21}\sin\psi_0,\quad G_3=r_{21}\cos\psi_0+r_{12}\sin\psi_0\\
H_2=a_0'^2(r_3\sin\psi_0-p_3\cos\psi_0),\quad G_2=-a_0'^2(r_3\cos\psi_0+p_3\sin\psi_0)\\
H_1=p_{12}\sin\psi_0-p_{21}\cos\psi_0,\quad G_1=-p_{21}\sin\psi_0-p_{12}\cos\psi_0
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь

$$r_{12} = \frac{a_0'(a_0+1)}{2}(r_1+p_2), \quad r_{21} = \frac{a_0'(a_0+1)}{2}(r_2-p_1)$$
$$p_{12} = \frac{a_0'(1-a_0)}{2}(r_2+p_1), \quad p_{21} = \frac{a_0'(1-a_0)}{2}(p_2-r_1) \tag{4.8}$$

Рассмотрим уравнения (3.6)–(3.9) при условиях (4.1) и $A=(A_{ij})$. Тогда на первом этапе распишем уравнение (3.6). Положим

$$F_1(\varphi) = (A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + 4(A\mathbf{a}\cdot\gamma) + 4(A\gamma\cdot\gamma) =$$
$$= Q_2\sin 2\varphi + L_2\cos 2\varphi + Q_1\sin\varphi + L_1\cos\varphi + L_0, \tag{4.9}$$

где

$$Q_2 = 4a_0'^2A_{12}, \quad L_2 = 2a_0'^2(A_{22}-A_{11}), \quad Q_1 = 4a_0'(1+2a_0)A_{13}$$
$$L_1 = 4a_0'(1+2a_0)A_{23}, \quad L_0 = A_{33}(1+2a_0)^2 + 2a_0'^2(A_{11}+A_{22}) \tag{4.10}$$

Уравнение (3.6), в силу условия (4.1) и обозначений (4.7), (4.9), таково:

$$\dot\varphi^2\left(Q_2\sin 2\varphi + L_2\cos 2\varphi + Q_1\sin\varphi + L_1\cos\varphi + L_0\right) =$$
$$= 2\left[b_0\left(G_3\sin 3\varphi - H_3\cos 3\varphi + G_2\sin 2\varphi - H_2\cos 2\varphi\right) + S_1\sin\varphi + S_2\cos\varphi + S_0\right], \tag{4.11}$$

где

$$S_1 = a_0's_1 + \frac{G_1}{a_0'}, \quad S_2 = a_0's_2 - \frac{H_1}{a_0'}, \quad S_0 = a_0s_3 + E \tag{4.12}$$

На основании (4.1), (4.4), (4.10) уравнение (3.8) представим в развернутом виде. Для этой цели введем обозначения

$$F_2(\varphi) = (A\mathbf{a}\cdot\gamma) + 2(A\gamma\cdot\gamma) = \frac{1}{2}Q_2\sin 2\varphi + \frac{1}{2}L_2\cos 2\varphi +$$
$$+ \tilde{Q}_1\sin\varphi + \tilde{L}_1\cos\varphi + Q_0$$
$$F_3(\varphi) = 4[\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\gamma)] + [\mathbf{a}\cdot(\gamma\times A\mathbf{a})] =$$
$$= L_2\sin 2\varphi - Q_2\cos 2\varphi + \tilde{L}_1\sin\varphi - \tilde{Q}_1\cos\varphi, \tag{4.13}$$

где Q_2, L_2 имеют значения (4.10), а $\tilde{L}_1, \tilde{Q}_1, Q_0$ зависят от параметров следующим образом:

$$\tilde{Q}_1 = a_0'(1+4a_0)A_{13}, \quad \tilde{L}_1 = a_0'(1+4a_0)A_{23}$$
$$Q_0 = a_0(1+2a_0)A_{33} + a_0'^2(A_{11}+A_{22}) \tag{4.14}$$

В силу соотношений (4.4), (4.13) и учете (4.1), из уравнения (3.8) получим

$$\ddot\varphi\left(Q_2\sin 2\varphi + L_2\cos 2\varphi + 2\tilde{Q}_1\sin\varphi + 2\tilde{L}_1\cos\varphi + 2Q_0\right) =$$
$$= 2\left[\dot\varphi^2\left(L_2\sin 2\varphi - Q_2\cos 2\varphi + \tilde{L}_1\sin\varphi - \tilde{Q}_1\cos\varphi\right) +\right.$$
$$\left. + b_0\left(H_3\sin 3\varphi + G_3\cos 3\varphi + H_2\sin 2\varphi + G_2\cos 2\varphi + H_1\sin\varphi + G_1\cos\varphi\right)\right] \tag{4.15}$$

Уравнения (4.11), (4.15) записаны в полном представлении, что связано с необходимостью использовать их в дальнейших преобразованиях. Но для исследования конкретных условий на параметры задачи, при которых уравнения совместны, целесообразно представить их в компактном виде. Обозначим правую часть уравнения (4.11) через $2R_1$, где

$$R_1(\varphi) = b_0\left(G_3\sin 3\varphi - H_3\cos 3\varphi + G_2\sin 2\varphi - H_2\cos 2\varphi\right) + \\ + \left(S_1\sin\varphi + S_2\cos\varphi + S_0\right) \quad (4.16)$$

Тогда, на основании (4.11), (4.16) имеем

$$\dot\varphi^2 F_1(\varphi) = 2R_1(\varphi) \quad (4.17)$$

Аналогично запишем (4.15), учтя формулы (4.4), (4.15):

$$\ddot\varphi F_2(\varphi) = \dot\varphi F_3(\varphi) + b_0\Phi_1(\varphi) \quad (4.18)$$

Продифференцируем обе части уравнения (4.17) по t и внесем в него $\ddot\varphi$ из (4.18). В результате получим уравнение, содержащее $\dot\varphi^2$. Поэтому в нем необходимо избавиться от $\dot\varphi^2$ с помощью уравнения (4.17). Тогда найдем алгебраическое уравнение

$$R_1(\varphi)[2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi)] + F_1(\varphi)[b_0F_1(\varphi)\Phi_1(\varphi) - R_1'(\varphi)F_2(\varphi)] = 0 \quad (4.19)$$

Если учесть в (4.19) функции (4.6), (4.9), (4.13), то имеем тригонометрический многочлен пятого порядка

$$M_5\sin 5\varphi + N_5\cos 5\varphi + M_4\sin 4\varphi + N_4\cos 4\varphi + M_3\sin 3\varphi + N_3\cos 3\varphi + \\ + M_2\sin 2\varphi + N_2\cos 2\varphi + M_1\sin\varphi + N_1\cos\varphi + M_0, \quad (4.20)$$

где M_i $(i=\overline{0,5})$, N_i $(i=\overline{1,4})$ — постоянные, не зависящие от φ, должны быть равны нулю. Рассмотрим равенства $M_5 = 0$, $N_5 = 0$. Они приводят к условиям

$$Q_2G_3 + L_2H_3 = 0, \quad Q_2H_3 - L_2G_3 = 0 \quad (4.21)$$

Изучим вариант $G_3^2 + H_3^2 \neq 0$. Тогда из (4.21) получим

$$Q_2 = 0, \quad L_2 = 0 \quad (4.22)$$

Используя в равенствах (4.22) обозначения (4.10), находим условия на тензор инерции A:

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = A_{11} \quad (4.23)$$

Запишем функции $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$, $F_3(\varphi)$, $R_1(\varphi)$, $R_1'(\varphi)$, сохраняя члены, имеющие максимальные аргументы тригонометрических функций

$$F_3(\varphi) = Q_1\sin\varphi - L_1\cos\varphi, \quad F_2(\varphi) = \tilde Q_1\sin\varphi + \tilde L_1\cos\varphi + \ldots \\ F_1(\varphi) = \tilde L_1\sin\varphi + \tilde Q_1\cos\varphi + \ldots, \quad R_1(\varphi) = b_0\left(G_3\sin 3\varphi - H_3\cos 3\varphi + \ldots\right) \quad (4.24) \\ R_1'(\varphi) = 3b_0\left(G_3\cos 3\varphi + H_3\sin 3\varphi + \ldots\right), \quad \Phi_1(\varphi) = H_3\sin 3\varphi + G_3\cos 3\varphi + \ldots$$

Обратимся к уравнению (4.19). Для его представления в наглядном виде вычислим $2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi)$. Используя (4.24), а также (4.10), (4.14), имеем

$$2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi) = \\ = 2a_0'^2(1+2a_0)(1+4a_0)\left[\left(A_{23}^2 - A_{13}^2\right)\sin 2\varphi - 2A_{13}A_{23}\cos 2\varphi\right] + \ldots \quad (4.25)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках во втором слагаемом уравнения (4.19). На основании принятых ранее обозначений имеем

$$b_0 F_1(\varphi)\Phi_1(\varphi) - R_1'(\varphi)F_2(\varphi) =$$
$$= (1-4a_0)\left(A_{13}^2 \sin\varphi + A_{23}\cos\varphi\right)\left(G_3\cos 3\varphi + H_3 \sin 3\varphi\right) + \ldots \tag{4.26}$$

Запишем уравнение (4.19), в силу (4.16), (4.24)–(4.26)

$$\begin{gathered}(1+2a_0)(1+4a_0)(G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \ldots)\times \\ \times[(A_{23}^2 - A_{13}^2)\sin 2\varphi - 2A_{13}A_{23}\cos 2\varphi + \ldots] + \\ +(1+2a_0)(1-4a_0)(G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \ldots)\times \\ \times[(A_{23}^2 - A_{13}^2)\cos 2\varphi + 2A_{13}A_{23}\sin 2\varphi + \ldots] = 0\end{gathered} \tag{4.27}$$

Рассмотрим случай $1 + 2a_0 = 0$. Тогда из (4.27) следует, что коэффициенты при $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$ равны нулю. Для дальнейшего изучения уравнения (4.19) положим в (4.9), (4.13), (4.14) $a_0 = -\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{gathered}F_1(\varphi) = 4a_0'^2 A_{11}, \quad F_1'(\varphi) = 0 \\ F_2(\varphi) = 2a_0'\left[a_0\left(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos\varphi\right) + a_0' A_{11}\right] \\ F_3(\varphi) = 2a_0' a_0\left(A_{23}\sin\varphi - A_{13}\cos\varphi\right)\end{gathered} \tag{4.28}$$

Функции $R_1(\varphi)$, $R_1'(\varphi)$, $\Phi_1(\varphi)$, в силу предположения $H_3 \neq 0$, $G_3 \neq 0$ имеют прежний вид. На основании (4.28) формул для $R_1(\varphi)$ и $R_1'(\varphi)$ из (4.24) можно сделать заключение о том, что коэффициенты при $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$ в уравнении (4.19) обращаются в нуль при условии $a_0 = 0$, что невозможно, так как $a_0 = -\dfrac{1}{2}$, или при выполнении равенств $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$. Рассмотрение уравнения (4.19) в последнем случае приведет к заключению о том, что оно может быть тождеством по φ только при $H_3 = 0$, $G_3 = 0$.

Распишем уравнение (4.27) при $1 + 2a_0 \neq 0$, приняв во внимание только коэффициенты при $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$:

$$a_0\left(K_1 \cos 5\varphi - K_2 \sin 5\varphi\right) + \ldots, \tag{4.29}$$

где

$$K_1 = 2H_3 A_{13}A_{23} - G_3\left(A_{23}^2 - A_{13}^2\right), \quad K_2 = H_3\left(A_{23}^2 - A_{13}^2\right) + 2G_3 A_{13}A_{23} \tag{4.30}$$

Если в (4.29) полагать $a_0 \neq 0$, то в силу предположения $H_3 \neq 0$, $G_3 \neq 0$, из (4.25), (4.30) получим

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \tag{4.31}$$

Пусть в (4.29) $a_0 = 0$. Тогда, на основании (4.10), (4.13), (4.24), из уравнения (4.19) установим его вид, указанный в (4.20):

$$\left(A_{13}H_3 - A_{23}G_3\right)\cos 4\varphi - \left(A_{23}H_3 + A_{13}G_3\right)\sin 4\varphi + \ldots \tag{4.32}$$

Из (4.32) следуют равенства $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Тогда $F_1 = L_0$, $F_2 = Q_0$, $F_3 = 0$. Уравнение (4.19) упрощается:

$$L_0\left(H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + \ldots\right) - 3Q_0\left(G_3 \cos 3\varphi + H_3 \sin 3\varphi + \ldots\right) = 0, \tag{4.33}$$

где

$$L_0 = (1 + 2a_0)^2 A_{33} + 4a_0'^2 A_{11}, \quad Q_0 = a_0(1 + 2a_0) A_{33} + 2a_0'^2 A_{11} \tag{4.34}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ в уравнении (4.33), в силу (4.34) получим уравнение

$$2a_0(A_{33} - A_{11}) = 2A_{11} - A_{33} \tag{4.35}$$

Других условий из (4.33) не следует. Поэтому обратимся к уравнению (3.9), полагая в нем $A_{12} = 0$, $A_{22} = A_{11}$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Очевидно, что коэффициент при производной $\ddot{\varphi}$ равен нулю. Для того, чтобы расписать (3.9), запишем основные формулы. В силу (3.5), (4.5), (4.24), имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_4(\varphi) &= f_6(\varphi)\sin(2\varphi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(2\varphi + \psi_0) = \\
&= \frac{a_0'^2}{2}(D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi) + \ldots \\
R_1 &= -\frac{1}{2}(1 + a_0)(D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi) + \ldots,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(p_1 - r_2\right)\cos\psi_0 - \left(p_2 + r_1\right)\sin\psi_0 \\
D_2 &= \left(p_1 - r_2\right)\sin\psi_0 + \left(p_2 + r_1\right)\cos\psi_0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Тогда, в силу (4.36), (4.37) и принятых ранее условий из (3.9), для слагаемых, содержащих $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$, имеем

$$\left\{-\frac{2}{L_0}\left[2a_0 A_{11} - \left(1 + 2a_0\right) A_{33}\right]\left(1 + a_0\right) + \frac{1}{2}\right\}\left(D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi\right) + \ldots$$

Из данного соотношения следует условие на параметры

$$4A_{11}\left(a_0 + 1\right)\left(3a_0 - 1\right) - A_{33}\left(1 + 2a_0\right)\left(5 + 6a_0\right) = 0 \tag{4.38}$$

Очевидно, что уравнения (4.35), (4.38) относительно параметра a_0 не совместны. Итак, в равенствах (4.29), (4.30) необходимо принять $H_3 = 0$, $G_3 = 0$. Тогда в равенствах (4.21) необходимо принять

$$H_3 = 0, \quad G_3 = 0 \tag{4.39}$$

5. Случай $H_3 = 0$, $G_3 = 0$. В дальнейшем, на основании результатов разд. 4 и формул (4.39), полагаем, что $Q_2^2 + L_2^2 \neq 0$. Из обозначений для H_3, G_3 из системы (4.7), в силу (4.8), получим

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1 \tag{5.1}$$

При условиях (5.1) значения $\Phi_i(\varphi)$ $(i = \overline{1,4})$ таковы:

$$\begin{gathered}\Phi_1(\varphi) = H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin\varphi + G_1 \cos\varphi \\ \Phi_2(\varphi) = G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi + G_1 \sin\varphi - H_1 \cos\varphi \\ \Phi_3(\varphi) = -\left(H_1 \sin\varphi + G_1 \cos\varphi\right) \\ \Phi_4(\varphi) = b_0 a_0 \left(G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi\right) + \tilde{H}_1 \sin\varphi + \tilde{G}_1 \cos\varphi,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где на основании (4.7), (5.1) коэффициенты многочленов (5.2) имеют вид

$$\begin{gathered}H_2 = a_0'^2\left(r_3 \sin\psi_0 - p_3 \cos\psi_0\right), \quad G_2 = -a_0'^2\left(r_3 \cos\psi_0 + p_3 \sin\psi_0\right) \\ H_1 = a_0'\left(1 - a_0\right)\left(r_2 \sin\psi_0 - r_1 \cos\psi_0\right), \quad G_1 = -a_0'\left(1 - a_0\right)\left(r_1 \sin\psi_0 + r_2 \cos\psi_0\right) \\ \tilde{H}_1 = a_0'^2\left(r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0\right), \quad \tilde{G}_2 = -a_0'^2\left(r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0\right)\end{gathered} \tag{5.3}$$

Если в (5.3) параметры $H_2 = 0$, $G_2 = 0$, то должны выполняться условия $p_3 = 0$, $r_3 = 0$. Тогда на основании равенств (5.1) векторы $\mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ ортогональны. Когда выполнены равенства $H_1 = 0$, $G_1 = 0$, то из (5.3) следует, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ направлены по оси, содержащей вектор $\mathbf{a}$.

Рассмотрим уравнения (4.11), (4.15), полагая в них $A_{11} \neq A_{22}$, $A_{12} \neq 0$, то есть $Q_2 \neq 0$, $L_2 \neq 0$. В силу условий (4.38), функция $R_1(\varphi)$ из (4.16) упрощается, а функции $F_i(\varphi)$ $(i = \overline{1,3})$ сохраняют прежний вид. Запишем их так:

$$\begin{gathered}F_1(\varphi) = Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi + \ldots, \quad F_2(\varphi) = \frac{1}{2}\left(Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi\right) + \ldots \\ F_3(\varphi) = L_2 \sin 2\varphi - Q_2 \cos 2\varphi + \ldots\end{gathered} \tag{5.4}$$

Как показывают вычисления, в данном случае целесообразно рассматривать не уравнение (3.8), а уравнение (3.7) (совместно с уравнением (3.6)).

На основании соотношения (4.6) при условии $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$ уравнение (3.7) представим в виде

$$F_4(\varphi)\ddot{\varphi} = F_5(\varphi)\dot{\varphi}^2 - S_1 \cos\varphi + S_2 \sin\varphi, \tag{5.5}$$

где

$$\begin{gathered}F_4(\varphi) = 2a_0'\left(A_{13} \sin\varphi + A_{23} \cos 2\varphi\right) + \left(1 + 2a_0\right)A_{33} \\ F_5(\varphi) = N_2 \sin 2\varphi + K_2 \cos 2\varphi + N_1 \cos\varphi + K_1 \sin\varphi,\end{gathered} \tag{5.6}$$

где

$$N_2 = 2a_0'^2\left(A_{11} - A_{22}\right), \quad K_2 = 4a_0'^2 A_{12}, \quad N_1 = 4a_0 a_0' A_{13}, \quad K_1 = -4a_0 a_0' A_{23}$$

Запишем уравнение (4.11), полагая в нем $H_3 = 0$, $G_3 = 0$

$$F_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 = 2R_1(\varphi), \tag{5.7}$$

где

$$R_1(\varphi) = b_0\left(G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi\right) + S_1 \sin\varphi + S_2 \cos\varphi + S_0 \tag{5.8}$$

Если $F_4(\varphi) \neq 0$, то из (5.5), (5.7) следует

$$R_1(\varphi)\Big[2F_1(\varphi)F_5(\varphi) + F_4(\varphi)F_1'(\varphi)\Big] - \\ - F_1(\varphi)\Big[F_1(\varphi)\big(S_1\cos\varphi - S_2\sin\varphi\big) + R_1'(\varphi)F_4(\varphi)\Big] = 0 \qquad (5.9)$$

В особом случае $F_4(\varphi) \equiv 0$ из (5.5), (5.7) следует

$$2R_1(\varphi)F_5(\varphi) - F_1(\varphi)\big(S_1\cos\varphi - S_2\sin\varphi\big) = 0 \qquad (5.10)$$

Из уравнения (5.10) в силу $A_{12} \neq 0$, $A_{22} \neq A_{11}$ получим $H_2 = 0$, $G_2 = 0$. Таким образом, $F_4(\varphi) \equiv 0$ и справедливо уравнение (5.9), в котором $R_1(\varphi)$ при $H_2 = 0$, $G_2 = 0$ принимает вид

$$R_1(\varphi) = S_1\sin\varphi + S_2\cos\varphi + S_0 \qquad (5.11)$$

Подставляя в уравнение (5.9) $F_1(\varphi)$ из (5.4), $F_4(\varphi)$ и $F_5(\varphi)$ из (5.6), $R_1(\varphi)$ из (5.11), потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ. Тогда, приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$, найдем равенства

$$Q_2S_1 - L_2S_2 = 0, \quad Q_2S_2 + L_2S_1 = 0,$$

из которых, в силу предположения $Q_2 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, следуют условия $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Рассматривая уравнение (5.9) при данных равенствах, получим $S_0 = 0$, то есть $\dot\varphi^2$ из (5.7) обращается в нуль, что невозможно. Итак, установлено, что должны выполняться условия (4.22), (4.23), (5.1).

6. Случай $H_3 = 0$, $G_3 = 0$, $Q_2 = 0$, $L_2 = 0$. Запишем необходимые соотношения для дальнейших преобразований:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= 4a_0'\big(1 + 2a_0\big)\big(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos\varphi\big) + L_0 \\ F_4(\varphi) &= 2a_0'\big(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos 2\varphi\big) + \big(1 + 2a_0\big)A_{33} \\ F_5(\varphi) &= 4a_0a_0'\big(A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi\big) \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Функция $R_1(\varphi)$ из (5.8) не изменяет своего значения. В силу (5.5) случай $F_4(\varphi) = 0$, $F_5(\varphi) = 0$ является особым. Для него в (6.1) необходимо положить $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $a_0 = -\dfrac{1}{2}$, а в (5.10) – $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Уравнения (5.7), (4.15) примут вид

$$\begin{aligned} L_0\dot\varphi^2 &= 2\Big[b_0\big(G_2\sin 2\varphi - H_2\cos 2\varphi\big) + S_0\Big] \\ Q_0\ddot\varphi &= b_0\big(H_2\sin 2\varphi + G_2\cos 2\varphi + H_1\sin\varphi + G_1\cos\varphi\big) \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Из уравнений (6.2) на основании значений $L_0 = 4a_0'^2A_{11}$, $Q_0 = 2a_0'^2A_{11}$ положим, что $H_1 = 0$, $G_1 = 0$. Тогда из (5.3) следует $r_1 = 0$, $r_2 = 0$. В исследуемом случае уравнение (3.7) вырождается и поэтому необходимо обращаться к уравнению (3.9). На основании принятых условий и обозначений (3.5) получим

$$4a_0a_0'^2A_{11}\dot\varphi^2 = a_0'^2s_3 + a_0a_0'\big(H_2\cos 2\varphi - G_2\sin 2\varphi\big)$$

Если это уравнение рассматривать совместно с первым уравнением из (6.2) при условии $a_0 = -\frac{1}{2}$, то получим $H_2 = 0$, $G_2 = 0$. Следовательно, в силу первого уравнения из (6.2) установим для $\dot{\varphi}$ постоянное значение, что исключается в данной статье.

Рассмотрим уравнение (5.9) в случае (6.1) и потребуем, чтобы при подстановке (6.1) в (5.9) последнее будет тождеством по φ. Тогда, исключая случай $a_0 = -\frac{1}{2}$, получим два независимых варианта условий на параметры:

$$H_2 = 0, \quad L_2 = 0 \left(A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0\right) \tag{6.3}$$

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \left(H_2^2 + L_2^2 \neq 0\right) \tag{6.4}$$

Изучим вариант (6.3). Рассмотрим уравнение (5.9) при $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$, тогда из (5.9) найдем $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Учитывая эти условия, а также равенства (6.3), из (5.8) установим $R_1(\varphi) = S_0$, то есть $R_1'(\varphi) = 0$. Покажем, что параметр $S_0 = 0$. Обратимся к уравнению (5.9), полагая в нем $R_1(\varphi) = S_0$ ($R_1'(\varphi) = 0$). Тогда указанное свойство следует из (5.9), если

$$F^*(\varphi) = 2F_1(\varphi)F_5(\varphi) + F_4(\varphi)F_1'(\varphi) \neq 0 \tag{6.5}$$

Функцию $F^*(\varphi)$ из (6.5) будем изучать при значениях (6.1). Поскольку $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$, то $F^*(\varphi) = 0$ в случае, когда параметр $a_0 = -\frac{1}{4}$ и выполняется следующее условие на a_0 и другие параметры $2L_0 = A_{33}$:

$$2\left[A_{33}(1 + 2a_0)^2 + 4a_0'^2 A_{33}\right] - A_{33} = 0 \tag{6.6}$$

Подставляя $a_0 = -\frac{1}{4}$ в уравнение (6.6), получим $A_{33} = 15A_{11}$. Так как в силу неравенств треугольника на главные моменты тела $A_{33} < 2A_{11}$, то условие $A_{33} = 15A_{11}$ выполняться не может. Следовательно, $S_0 = 0$ и из (6.2) следует $\dot{\varphi}^2 = 0$, что невозможно. Это свойство означает, что, наряду с равенствами $H_2 = 0$, $L_2 = 0$, необходимо полагать $Q_1 = 0$, $L_1 = 0$. Так как $H_2 = 0$, $L_2 = 0$, то из (5.3) следуют равенства $r_3 = 0$, $p_3 = 0$.

7. Случай динамической симметрии тела. Результаты, полученные ранее, показывают, что исследуемое решение имеет место при следующих условиях:

$$Q_2 = 0, \quad L_2 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad L_1 = 0, \quad H_3 = 0, \quad G_3 = 0, \quad H_2 = 0, \quad G_2 = 0, \tag{7.1}$$

которые, в силу обозначений, отвечают равенствам

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \tag{7.2}$$

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1, \quad p_3 = 0, \quad r_3 = 0 \tag{7.3}$$

Запишем (4.17) с учетом условий (7.2), (7.3):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0}\left(S_1 \sin\varphi + S_2 \cos\varphi + S_0\right), \tag{7.4}$$

где

$$L_0 = (1 + 2a_0)^2 A_{33} + 4a_0'^2 A_{11} \tag{7.5}$$

Обратимся к уравнению (4.19), в котором $F^*(\varphi) = 0$, $F_3(\varphi) = 0$:

$$b_0 L_0 \left(H_1 \sin\varphi + G_1 \cos\varphi\right) - Q_0 \left(S_1 \cos\varphi - S_2 \sin\varphi\right) = 0, \tag{7.6}$$

где

$$Q_0 = \left[a_0 (1 + 2a_0) A_{33} + 2a_0'^2 A_{11}\right] \tag{7.7}$$

Используя значения H_1, G_1, полученные из (4.7) в силу (7.3):

$$H_1 = a_0' (1 - a_0)\left(r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0\right), \quad G_1 = a_0' (1 - a_0)\left(r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0\right), \tag{7.8}$$

а также параметры (4.12), из (7.6) получим

$$s_1 = \frac{\left(1 - a_0\right) R_0 \left(r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0\right)}{a_0' Q_0}, \quad s_2 = -\frac{\left(1 - a_0\right) R_0 \left(r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0\right)}{a_0' Q_0}, \tag{7.9}$$

где

$$R_0 = L_0 - Q_0 = \left(1 + a_0\right)\left[A_{33}\left(1 + 2a_0\right) + 2A_{11}\left(1 - a_0\right)\right] \tag{7.10}$$

Рассмотрим уравнение (3.9) с учетом условий (7.2), (7.3). Потребуем, чтобы оно было тождеством по φ. Тогда, учитывая равенства (7.4), (7.5), (7.7)–(7.10), найдем функцию $E = E\left(a_0, \psi_0, A_{11}, A_{33}\right)$ (явное значение не выписываем в силу сложности формулы) и равенства

$$\left(r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0\right)\tilde{F}\left(a_0\right) = 0, \quad \left(r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0\right)\tilde{F}\left(a_0\right) = 0, \tag{7.11}$$

где

$$\tilde{F}\left(a_0\right) = \left(1 - a_0\right)\left(6a_0 + 1\right)A_{11} + \left(2a_0 + 1\right)\left(3a_0 - 2\right)A_{33} \tag{7.12}$$

Так как условия $r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0 = 0$, $r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0 = 0$ при $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ не выполняются, то в формулах (7.11), (7.12) $\tilde{F}(a_0) = 0$, то есть, в силу (7.12), параметр a_0 удовлетворяет уравнению

$$\tilde{F}\left(a_0\right) = 6a_0^2\left(A_{33} - A_{11}\right) + a_0\left(5A_{11} - A_{33}\right) + \left(A_{11} - 2A_{33}\right) = 0 \tag{7.13}$$

Представляет интерес случай $A_{33} = A_{11}$, для которого эллипсоид инерции тела является сферой. Тогда из (7.13) следует

$$a_0 = \frac{1}{4}, \tag{7.14}$$

то есть $\theta_0 = \arccos\frac{1}{4}$. В общем случае, в силу неравенств на главные моменты инерции, из уравнения (7.13) получим

$$-\frac{1}{6} < a_0 < \frac{1}{2}$$

Если в (7.13) положить обобщенные условия Ковалевской $A_{22} = A_{11} = 2A_{33}$, то из (7.13) следует, что $a_0 = 0$ ($\theta_0 = 90°$). При этом особенностей в выполненных преобразованиях не возникает. Можно в (7.13) принять и обобщенные условия Горячева–Чаплыгина: $A_{22} = A_{11} = 4A_{33}$, тогда значение параметра таково: $a_0 \approx 0.94$.

Покажем, что в формуле (7.4) $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$. Внесем значения s_1, s_2 из (7.9) в формулы из (4.12):

$$S_1 = \frac{(1-a_0)\,L_0}{Q_0}\left(r_1 \sin\psi_0 - r_2 \cos\psi_0\right), \quad S_2 = -\frac{(1-a_0)\,L_0}{Q_0}\left(r_1 \cos\psi_0 + r_2 \sin\psi_0\right) \quad (7.15)$$

В силу значения L_0 из (7.5) получим $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$, а из формулы (7.4) следует, что $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени $(\psi(t) = 2\varphi(t))$. Величина S_0 определяется из последней формулы системы (4.12): $S_0 = a_0 s_3 + E(a_0, \psi_0, A_{11}, A_{33})$. Запишем (7.4) в интегральной форме:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{S_1 \sin\varphi + S_2 \cos\varphi + S_0}} = \sqrt{\frac{2}{L_0}}(t - t_0) \quad (7.16)$$

Нахождение $\varphi(t)$ из (7.16) проводится стандартным образом.

Обсудим условия (7.2), (7.3). Равенства (7.2) означают, что прямая, содержащая вектор $\mathbf{a}$, является осью, относительно которой тело имеет динамически симметричное распределение. Но, в силу $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, центр масс тела не лежит на этой оси. На основании равенств (7.3) приходим к выводу о том, что векторы $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$, $\mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0)$ ортогональны и расположены в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{a}$. Из полученных в разд. 7 результатов следует, что условий на параметры r_1, r_2, ψ_0 нет.

Заключение. В статье рассмотрена задача об условиях существования прецессионных движений твердого тела под действием сил трех однородных силовых полей. Полагается, что скорость прецессии тела в два раза больше его скорости собственного вращения. Доказано, что необходимым условием таких движений является ортогональность векторов, задающих центры притяжения сил двух однородных силовых полей. Параметр в (7.13) $a_0 \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Если тело имеет распределение масс, для которого эллипсоид инерции является сферой, то угол нутации равен $\arccos\frac{1}{4}$. Угол собственного вращения находится путем обращения эллиптического интеграла (угол прецессии в два раза больше угла собственного вращения). Тело обладает свойством динамической симметрии относительно оси, образующей постоянный угол с одним из направлений действующих сил.

Представляет интерес привести примеры рациональных значений угла нутации в динамике твердого тела. В классической задаче о движении тела в решении Д. Гриоли [3] угол $\theta_0 = 90°$. В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил известно решение [18], в котором $\theta_0 = 120°$. Можно анонсировать и результат, который относится к анализу прецессионно-изоконических движений ($\dot\psi = \dot\varphi$) в рассматриваемой задаче. Он для сферического гиростата характеризуется значением $\theta_0 = 60°$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.

3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
8. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
9. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ "Институт прикладной математики и механики", 2017. 250 с.
10. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 50. Вып. 5. С. 707–712.
11. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Art. no. 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 9. Art. no. 46.
14. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
15. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
16. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
17. *Hessein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
18. *Мазнев А.В.* Прецессионно-изоконические движения в одном решении уравнений Кирхгофа // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. 2001. Вып. 2. С. 12–16.

One Class of Resonance Precession Motions of a Rigid Body under the Action of Three Homogeneous Force Fields

G. V. Gorr[a,#]

[a]*State Budgetary Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics", Donetsk, Russia*
[#]*e-mail: gvgorr@gmail.com*

The article is devoted to the problem on motion of a rigid body with a fixed point under the action of a force field, which is the superposition of three homogeneous force fields. Existence conditions are investigated for precession motions, which are characterized by the following property: the angular velocity of the precession of the body is two times more than the angular velocity of its proper rotation. It is established that the body has the dynamic symmetry with respect to an axis making a constant angle with a vector fixed in the immovable space. In the case of the body with the spherical mass distribution this angle equals to $\arccos\frac{1}{4}$. Solution of the equations of motion of the body is expressed through the elliptic functions of time.

Keywords: precessions of a rigid body, resonance motions, homogeneous force fields

REFERENCES

1. *Ishlinskii A.Yu.* Orientation, Gyroscopes and Inertial Navigation. Moscow: Nauka, 1976. 672 p. (in Russian)
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. N.Y.: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Math. Pura et Appl., 1947, ser. 4, vol. 26, fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Gorr G.V.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies systems // JAMM, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 573–587. (in Russian)
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1957, vol. 27, pp. 276–283.
6. *Dokshevich A.I.* Finite Form Solutions of Euler–Poisson Equations. Kiev: Nauk. Dumka, 1992. 168 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in the Rigid Body Dynamics and in the Dynamics of Coupled Rigid Bodies. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk National Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Motion of a Gyrostat with the Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Inst. of Appl. Math. Mech., 2017. 250 p. (in Russian)
10. *Gorr G.V., Rubanovskii V.N.* On one new class of motions of a system of rigid bodies coupled by hinges // JAMM, 1988, vol. 50, no. 5, pp. 707–712. (in Russian)
11. *Ol'shanskii V.Yu.* On regular precessions of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // JAMM, 2018, vol. 82, no. 5, pp. 559–571. (in Russian)
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2019, vol. 131, no. 12, art. no. 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol. 132, no. 9, art. no. 46.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // JAMM, 2021, vol. 85, no. 5, pp. 547–564. (in Russian)
15. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci., 2015, vol. 2, no. 3, pp. 200–205.
16. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc., 2017, vol. 25, no. 2, pp. 216–219.
17. *Hessein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, no. 3, pp. 285–292.
18. *Maznev A.V.* Precessional-isoconical motions in one solution of Kirchhoff equations // Bull. Donetsk Univ., Ser. A: Nature Sci., 2021, no. 2, pp. 12–16. (in Russian)