

УДК 536.2

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОИСКА ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СРЕД С НЕОДНОРОДНОЙ МАКРОСТРУКТУРОЙ

© 2025 г. А. В. Звягин^{1,*}, А. С. Удалов^{1,2,**}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²НИИ системных исследований РАН, Москва, Россия

*e-mail: zvsasha@rambler.ru,

**e-mail: udalets@inbox.ru

Поступила в редакцию 03.08.2024 г.

После доработки 20.12.2024 г.

Принята к публикации 20.12.2024 г.

При решении инженерных задач часто возникает необходимость знания физических свойств пористых сред со сложной внутренней структурой. В данной работе предложена методика численного моделирования теплопроводности подобного рода тел, включающих не проводящие тепло круглые включения. Данная методика позволяет вычислять поля температур и тепловые потоки, а также другие необходимые для приложений параметры. Одним из таких востребованных практикой параметров является эффективный коэффициент теплопроводности, который зависит от объемного содержания теплоизолированных ослаблений и их взаимного расположения. Основой приведенных исследований является предлагаемый в работе непрямой метод граничных элементов, базирующийся на предварительно вычисленных аналитических решениях, по которым производится разложение. Для верификации разработанных методов в работе приведено сравнение с результатами других авторов, которое показало достаточно хорошее совпадение.

Ключевые слова: пористые среды, эффективный коэффициент теплопроводности, методы граничных элементов

DOI: 10.31857/S0032823525010093, **EDN:** BNYXRT

1. Введение. Вопрос распространения тепла в неоднородных средах нередко возникает в прикладных задачах различных областей промышленности. К примеру, в химической отрасли для поддержания реакций может потребоваться рассчитать подвод тепла в тела со сложной внутренней структурой. Задачи теплопроводности пористых сред находят свое применение при моделировании теплоизоляционных материалов, при анализе поведения пород в горнодобывающем деле или при предсказательном моделировании разрушения конструкций с внутренними дефектами в аэрокосмической или атомной промышленности. Для решения подобных задач существуют разные подходы. Обзор некоторых из них можно найти, например, в [1–3]. Так как в инженерных расчетах чаще всего среда рассматривается гомогенной, встает вопрос о вычислении эффективных параметров гетерогенной среды, способных свести моделирование к привычным формулам. Для их аналитического вычисления обычно или пользуются методами осреднения, или сводят конфигурацию геометрии среды к некоторой периодической структуре [4–7]. Та-

кой подход возможен в ограниченном числе постановок задач и позволяет получить примерные зависимости эффективных параметров среды от конфигурации, но не дает возможности с высокой точностью рассматривать локальное поведение физических полей (например, поля температуры) в материале. Ввиду этого в настоящее время для подобных задач активно развиваются численные методы, самым популярным из которых можно считать метод конечных элементов [8]. Однако в случае пористых сред на численные методы помимо обычных требований точности накладываются дополнительные условия по скорости вычислений. Это приводит к необходимости рассматривать альтернативные высокопроизводительные методики.

В данной работе предложен численный метод моделирования сред с теплоизолированными областями. Он относится к непрямым методам граничных элементов. Метод использует предварительно найденные базовые аналитические решения модельных задач теплопроводности. Данный метод позволяет получить решение в форме конечного ряда разложения по базовым функциям. Это позволяет провести полное исследование поля температур, в том числе вычислить эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды. Точность метода проверена сравнением с результатами других авторов. Разработанные авторами методы, имеющие аналогичную математическую основу и примененные для анализа сред с большими системами трещин, подробно описаны в [9–11].

2. Постановка задачи. Рассмотрим стационарную плоскую задачу теплопроводности бесконечной теплопроводящей среды, ослабленной теплоизолированными отверстиями под действием теплового потока на бесконечности (рис. 1).

Все отверстия имеют одинаковый радиус. На бесконечности действует тепловой поток с плотностью q^∞ . Выбором величины теплового потока на окружностях q^0 можно дополнительно моделировать стоки и источники тепла. В случае теплоизолированных пор полагаем $q^0 = 0$. Запишем уравнение теплопроводности для стационарного поля температур без источников тепла и граничные условия, используя закон теплопроводности Фурье:

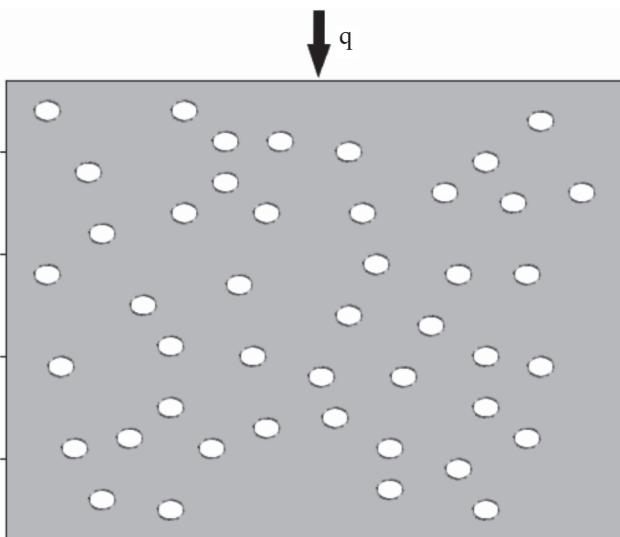


Рис. 1. Рассматриваемая конфигурация среды

$$\Delta T(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty : k \frac{\partial T}{\partial y} = -q^\infty \quad (2.1)$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q^0$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности материала, Γ – граница рассматриваемой многосвязной области. Базовыми размерными величинами задачи являются: R [м] – радиус разреза; k [Вт/м·К] – коэффициент теплопроводности; q^∞ [Вт/м²] – плотность теплового потока на бесконечности. Далее для верификации с аналитическими решениями для построения графиков будут использоваться безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{T k}{q^\infty R} \\ \tilde{q} &= \frac{q}{q^\infty} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее для упрощения записи знак тильды, означающий безразмерное значение величины, не пишется. Все величины, связанные с расстоянием, будут отнесены к радиусу одного отверстия. Решение задачи представимо в виде суммы двух решений. Первое является решением задачи о распределении температуры в бездефектном материале под действием теплового потока, приложенного на бесконечности. Поле температуры в этом случае может быть определено следующим образом:

$$T(x, y) = -\frac{q^\infty y}{k} \quad (2.3)$$

Вторая краевая задача рассматривается при наличии пор. В ней тепловой поток на бесконечности равен нулю. Взяв исходный вектор плотности теплового потока с обратным знаком и рассмотрев в каждой точке границы его нормальную к границе составляющую, получим граничные условия для второй задачи. Сумма решений двух задач будет являться решением исходной задачи. Решение второй задачи ищем в виде конечного функционального ряда по некоторым точным аналитическим решениям модельных краевых задач теории теплопроводности. Данний метод и его усовершенствование для решения задач теплопроводности и линейной упругости тел с трещинами были использованы авторами в работах [9–11]. Для построения модельного решения рассмотрим задачу элементарного разрыва температуры величины $D(x)$ на отрезке длины $2h$, который в дальнейшем будем называть граничным элементом. Перейдя к функции комплексного переменного и воспользовавшись свойствами интегралов типа Коши, получим следующее:

$$T = \operatorname{Re}(F(z)), F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D(t)dt}{t - z} \quad (2.4)$$

Для определенных видов функциональной зависимости $D(x)$ интеграл может быть взят аналитически [11]. В данной работе плотность интеграла берется в виде константы $D(x) = c$. В этом случае модельное решение берется в виде:

$$F(z) = \frac{c}{2\pi i} \ln \left(\frac{z - h}{z + h} \right) \quad (2.5)$$

Далее граница области приближается набором прямолинейных отрезков одинаковой длины. Решение задачи представляется в виде суммы элементарных скачков на каждом из разрезов с неизвестными постоянными коэффициентами функций $D(x)$, своими для каждого скачка. Заметим, что имея аналитическое решение модельной задачи, можно для любой точки среды найти значение температуры и плотности теплового потока, создаваемое одним элементом в своей локальной системе координат. Для того чтобы отыскать коэффициенты, получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Для нахождения коэффициента c^j каждого элементарного разрыва температуры потребуем выполнение граничных условий в центрах всех элементов, на которые разбита граница. Приравняв к заданному значению плотность теплового потока, созданного всеми элементарными разрывами температур в центре какого-то выбранного граничного элемента, получим одно алгебраическое уравнение на величины скачков. В случае рассмотрения величин скачков константами, проделав данную операцию для центров каждого отрезка, на которые мы разбили разрезы, получим замкнутую систему уравнений.

$$q_n(x^i, y^i) = \sum_{j=1}^N c^j \left(-k \operatorname{Re} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{(x^i, y^i)} \sin \alpha^j + k \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{(x^i, y^i)} \cos \alpha^j \right) \quad (2.6)$$

Здесь N – количество граничных элементов, (x^i, y^i) – координаты центра элемента, для которого моделируется суммарная величина плотности теплового потока, созданного всеми элементами, α^j – угол, зависящий от взаимного расположения рассматриваемой пары элементов. Для верификации описанного метода рассмотрим задачу об одном теплоизолированном отверстии. Для этой задачи имеется точное решение, которое можно найти, например, в [12]. Будем сравнивать аналитические и численные результаты поля температуры, вычисленные в точках, находящихся на расстоянии 1.01 радиуса от центра отверстия, в зависимости от полярного угла.

Сравнение аналитических и численных результатов поля температуры для задачи об одиночном теплоизолированном отверстии при его разбиении на 20 элементов на расстоянии 1.01 радиуса дает следующие результаты (рис. 2). Относительная ошибка для посчитанных численно значений не превышает 1%. Такой подход позволяет на-

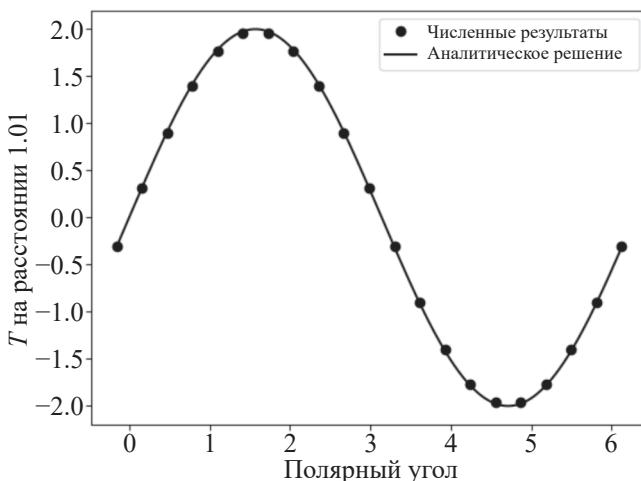


Рис. 2. Аналитические и численные результаты поля температуры верификационной задачи

ходить распределение искомых полей в любой точке среды с малыми вычислительными затратами и достаточной для приложений точностью.

Далее рассмотрим исходную задачу о теплопроводности пористого материала, считая все включения теплоизолированными (рис. 1). Получив описанным методом решение и выделив в бесконечной среде некоторую репрезентативную область в виде прямоугольника, можем вычислить эффективный коэффициент теплопроводности, полагая:

$$k_{\text{eff}} = \frac{q^{\infty} l}{T_2 - T_1} \quad (2.7)$$

Здесь l – расстояние по вертикали между двумя точками, в которых вычисляется разница температур. Для анализа рассмотренных конфигураций введем пористость, аналогично работе [7].

$$p = \frac{M 2\pi R^2}{3A} \quad (2.8)$$

Здесь p – это пористость, A – площадь репрезентативной области, M – количество круглых включений. Разными авторами получены приближенные зависимости эффективного коэффициента теплопроводности от пористости материала. Подробный обзор формул для плоских задач можно найти в [1]. Для верификации методики и анализа результатов воспользуемся некоторыми из них. Рассмотрим соотношение, представленное в [7]:

$$k_{\text{eff}} = k \left(1 - \frac{3p}{2} \right) \quad (2.9)$$

Эта формула может быть использована только для случая малой пористости, как и соотношение, полученное в работе [5]:

$$k_{\text{eff}} = k \left(1 - \frac{4p}{3} \right) \quad (2.10)$$

Дополнительно используем хорошо известное решение Maxwella для пространственной задачи о среде со сферическими включениями:

$$k_{\text{eff}} = k \frac{1-p}{1+\frac{p}{2}} \quad (2.11)$$

Представленный в данной работе алгоритм позволяет рассматривать конфигурации с большей пористостью. Полученные результаты представлены на рис. 3.

Можно заметить, что при малой пористости величина эффективного коэффициента теплопроводности для рассмотренных структур количественно приближается с достаточной точностью всеми методами. Однако при увеличении пористости линейная зависимость от нее не сохраняется. Отсюда следует несколько выводов. Во-первых, при моделировании поведения сред со сложной внутренней структурой для учета особенностей геометрии ослаблений и их взаимного влияния требуется использовать методы, способные давать решение исходной задачи с высокой точностью. Во-вторых, моделирование эффективного коэффициента теплопроводности подобного рода сред линейными зависимостями оправдано для малых значений пористости и нарушается с ее ростом из-за существенно нелинейной зависимости коэффициента от объемного содержания пор. В расчетах использовалась как периодическая структура пор, так и случайно распределенная. Оказалось, что случайность распределения пор круглой формы влияет на характер зависимости эффективного коэффициента несущественно.

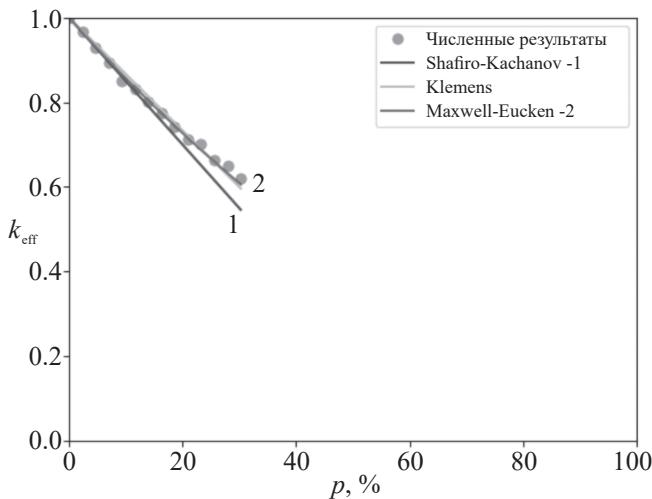


Рис. 3. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности от пористости

Заключение. Разработан непрямой метод граничных элементов, позволяющий достаточно эффективно решать стационарные задачи теплопроводности для пористых материалов с произвольной геометрией и структурой пор. Работа метода продемонстрирована на примере решения плоских задач стационарной теплопроводности сред с непроводящими тепло круглыми включениями. Проведенная верификация предложенного численного метода позволяет сделать вывод о достаточно хорошей точности (менее одного процента) при малых вычислительных затратах. Представление решения в форме конечного ряда по базовым функциям (то есть фактически в аналитической форме) позволяет существенно облегчить анализ результатов. Это продемонстрировано на примере вычисления эффективных коэффициентов теплопроводности пористых сред.

Работа поддержана Междисциплинарной НОШ МГУ им. М.В. Ломоносова “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”, проект 23-Ш01-01.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Braginsky L., Shklover V., Witz G., Bossmann H.-P. Thermal conductivity of porous structures // Phys. Rev. B. 2007. V. 75(9).
2. Smith D., Alzina A., Bourret J. et al. Thermal conductivity of porous materials // J. of Mater. Res. 2013. V. 28(17).
3. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Appl. Mech. Rev. 1994. V. 47.
4. Kiradjiev K.B., Halvorsen S.A., Van Gorder R.A., Howison S.D. Maxwell-type models for the effective thermal conductivity of a porous material with radiative transfer in the voids // Int. J. of Thermal Sci. 2019. V. 145.
5. Klemens P.G. Thermal conductivity of inhomogeneous materials // Int. J. Thermophys. 1989. V. 10. P. 1213–1219.
6. Sevostianov I., Kachanov M. Elastic and conductive properties of plasma-sprayed ceramic coatings in relation to their microstructure: An overview // J. of Thermal Spray Technol. 2009. V. 18. P. 822–834.
7. Shafiro B., Kachanov M. Anisotropic effective conductivity of materials with nonrandomly oriented inclusions of diverse ellipsoidal shapes // J. Appl. Phys. 2000. V. 87(12). P. 8561–8569.

8. Wang Z., Kulkarni A., Deshpande S., Nakamura T., Herman H. Effects of pores and interfaces on effective properties of plasma sprayed zirconia coatings // *Acta Mater.* 2003. V. 51. Iss. 18. P. 5319–5334.
9. Звягин А.В., Удалов А.С. Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Матем. Mex. 2020. № 6. С. 34–39.
10. Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A. Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // *Acta Astron.* 2022. V. 194. P. 480–487.
11. Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A. Numerical modeling of heat conduction in bodies with cracks // *Acta Astron.* 2023. V. 214. P. 196–201.
12. Florence A.L., Goodier J.N. Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole // *ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27(4). P. 635–639.

High-Performance Numerical Method for Searching the Effective Thermal Conductivity of Media with Inhomogeneous Macrostructure

A. V. Zvyagin^{a, #}, A. S. Udalov^{a,b, ##}

^a*M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Scientific Research Institute for System Analysis RAS, Moscow, Russia*

[#]e-mail: zvsasha@rambler.ru

^{##}e-mail: udalets@inbox.ru

When solving engineering problems, it is often necessary to know the physical properties of porous media with complex internal structure. In this paper we propose a technique for numerical modeling of heat conduction of this kind of bodies including non-conducting circular inclusions. This technique allows to calculate temperature fields and heat fluxes, as well as other parameters necessary for applications. One of such parameters demanded by practice is the effective thermal conductivity, which depends on the volume content of thermally insulated pores and their mutual location. The basis of the above studies is the indirect boundary element method proposed in this paper, based on pre-calculated analytical solutions, on which the decomposition is performed. In order to verify the developed methods, a comparison with the results of other authors is given in the paper. It showed a fairly good agreement.

Keywords: porous media, effective thermal conductivity, boundary element methods

REFERENCES

1. Braginsky L., Shklover V., Witz G., Bossmann H.-P. Thermal conductivity of porous structures // *Phys. Rev. B*, 2007, vol. 75(9).
2. Smith D., Alzina A., Bourret J. et al. Thermal conductivity of porous materials // *J. of Mater. Res.*, 2013, vol. 28(17).
3. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47.
4. Kiradjiev K.B., Halvorsen S.A., Van Gorder R.A., Howison S.D. Maxwell-type models for the effective thermal conductivity of a porous material with radiative transfer in the voids // *Int. J. of Thermal Sci.*, 2019, vol. 145.
5. Klemens P.G. Thermal conductivity of inhomogeneous materials // *Int. J. Thermophys.*, 1989, vol. 10, pp. 1213–1219.
6. Sevostianov I., Kachanov M. Elastic and conductive properties of plasma-sprayed ceramic coatings in relation to their microstructure: An overview // *J. of Thermal Spray Technol.*, 2009, vol. 18, pp. 822–834.
7. Shafiro B., Kachanov M. Anisotropic effective conductivity of materials with nonrandomly oriented inclusions of diverse ellipsoidal shapes // *J. Appl. Phys.*, 2000, vol. 87(12), pp. 8561–8569.
8. Wang Z., Kulkarni A., Deshpande S., Nakamura T., Herman H. Effects of pores and interfaces on effective properties of plasma sprayed zirconia coatings // *Acta Mater.*, 2003, vol. 51, iss. 18, pp. 5319–5334.

-
9. *Zvyagin A.V., Udalov A.S.* A displacement discontinuity method of high-order accuracy in fracture mechanics // Moscow Univ. Mech. Bull., 2020, V. 75, pp. 153–159.
<https://doi.org/10.3103/S0027133020060060>
 10. *Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A.* Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // Acta Astron., 2022, vol. 194, pp. 480–487.
 11. *Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A.* Numerical modeling of heat conduction in bodies with cracks // Acta Astron., 2023, vol. 214, pp. 196–201.
 12. *Florence A.L., Goodier J.N.* Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole // ASME. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27(4), pp. 635–639.