

УДК 539.3

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ,  
СОПРЯЖЕННОЙ ПО КОНТУРУ С ОСНОВАНИЕМ**© 2025 г. Д. В. Гандилян<sup>1\*</sup>, К. Б. Устинов<sup>1\*\*</sup><sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*\**e-mail: david.ghandilyan@mail.ru,*\*\**e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 26.06.2024 г.

После доработки 30.10.2024 г.

Принята к публикации 10.12.2024 г.

В приближении модели Феппля—фон Кармана решена задача о деформировании круговой пластины сцепленной с массивным основанием по контуру, совпадающего с границей отверстия в основании, под действием поперечной нагрузки. Рассматривались граничные условия двух типов: жесткой и обобщенной упругой заделки. Решение получено двумя способами: при помощи разложения в степенные ряды поперечных смещений и продольных усилий, представленных в цилиндрической системе координат, а также численным интегрированием уравнений Феппля—фон Кармана, с последовательным уточнением граничных условий, аналогично “методу стрельбы”. Получены выражения для компонент смещения круговой пластины. Выявлена роль, вносимая податливостью подложки в изменение формы профиля круговой пластины, действующих продольных усилий и изгибающих моментов. Проведено сравнение с другими решениями. Исследованы области применимости методов.

*Ключевые слова:* тонкая пластина, уравнения Феппля—фон Кармана, граничные условия типа обобщенной упругой заделки

**DOI:** 10.31857/S0032823525010089, **EDN:** BNZLXM

**1. Введение.** В области микро- и наноэлектроники возникают задачи, связанные с производством и эксплуатацией сверхтонких элементов. Одной из подобных задач является определение параметров деформирования элементов конструкций, используемых в проекционной фотолитографии [1–4]. Возникает необходимость в исследовании механических деформаций и напряжений в пластинах различной формы, в том числе круговые пластины. Отдельную трудность представляет корректное исследование деформирования тонких пластин, изгиб которых сильно зависит от напряжений в срединной поверхности, из-за чего уравнения, описывающие процесс деформирования, становятся нелинейными. При исследовании деформирования пластин в качестве граничных условий обычно используют условие жесткой заделки, не учитывающие свойства основания, с которым рассматриваемое тонкостенное покрытие соединено, оправдывая такое приближение “массивностью” последнего. Однако условие жесткой заделки выполняется лишь приближенно. Одним из способов более корректного описания является использование граничных условий типа обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности компонент смещения и угла

поворота в точке заделки действующим в этой точке продольной и поперечной силам и изгибающему моменту [5–20].

Среди работ, в которых учитывается влияние податливости заделки, отметим работы, посвященные спектральным задачам колебаний прямоугольных пластин [21–25], в том числе с учетом трансверсальной податливости на основе модели Миндлина [21], работы, посвященные задачам о потере устойчивости плоской формы равновесия пластин при нагружении в ее плоскости [26–28]. Отметим также решения задач о колебаниях для оболочек с реперной поверхностью канонической формы при учете податливости закрепления контура [29]. В работе [30] получено численное решение задачи об изгибе круговой пластины переменной толщины с учетом трансверсальной податливости на сдвиг методом коллокаций.

В данной работе рассмотрена задача о деформировании круговой пластины под действием постоянной поперечной нагрузки, сопряженной с основанием, где условие сопряжения моделируется с помощью граничных условий типа обобщенной упругой заделки. Целью работы является исследование влияния заделки на параметры деформирования пластины. Получено полуаналитическое решение задачи с помощью разложения в ряд нормальной компоненты смещения и продольной компоненты усилия. Также рассмотрен численный метод, аналогичный “методу стрельбы”, позволяющий получить решения для больших значений прогиба. Результаты расчетов соответствуют случаю алюминиевой пластины на кремниевом основании.

**2. Постановка задачи.** Геометрия задачи представляет собой пластину толщины  $h$ , соединенную с основанием, имеющим отверстие радиуса  $R$ . Часть пластины, не имеющую сцепления с основанием, можно рассматривать как круговую пластину. Воспользуемся цилиндрической системой координат  $(r, \alpha, z)$  (рис. 1), компоненты смещения в срединной поверхности покрытия обозначим:  $v(r, \alpha)$ ,  $u(r, \alpha)$ ,  $w(r, \alpha)$ .

К пластине со стороны отверстия в основании приложена поперечная нагрузка с постоянной интенсивностью  $q = \text{const}$ . В силу осевой симметрии компонента смещений  $v(r, \alpha) = 0$  отсутствует, а остальные компоненты зависят только от одной переменной:  $u = u(r)$ ,  $w = w(r)$ . В дальнейшем анализе также используется параметр:  $\theta = -w'(r)|_{r=R}$  – угол поворота пластины на контуре заделки.

Для учета влияния основания будут использоваться граничные условия типа обобщенной упругой заделки, т.е. условия пропорциональности угла поворота и продоль-

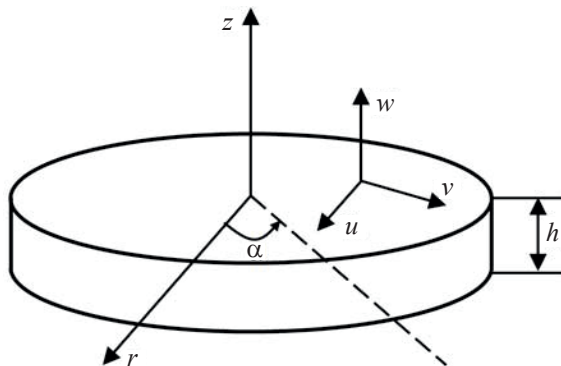


Рис. 1. Рассматриваемая система координат

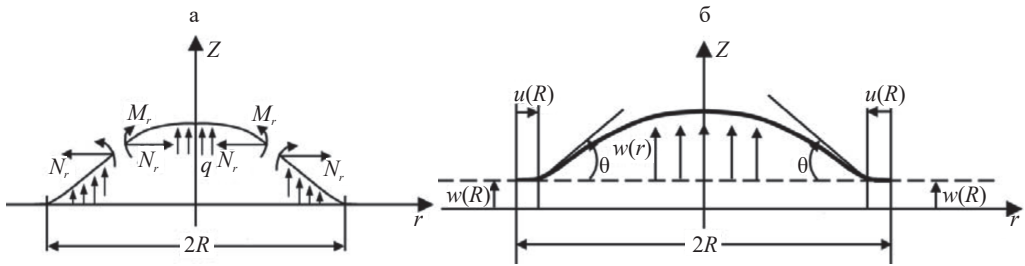


Рис. 2. Конфигурация деформирования круговой пластины:  
а) распределение усилий и момента, б) распределение компонент смещений

ного и нормального смещения в точке заделки действующим в этой точке изгибающему моменту и продольным и поперечным усилиям [5–20].

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(R) \\ -hw'(R) \\ w(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N_r \\ h^{-1}M_r \\ Q_{rz} \end{pmatrix}; \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad (2.1)$$

где  $a_{ij}$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) – матрица податливости,  $N_r$  – продольное усилие,  $M_r$  – изгибающий момент (рис. 2),  $Q_{rz}$  – поперечное усилие, которое в силу симметрии и равномерности распределения приложенной нагрузки имеет вид:

$$Q_{rz} = \frac{qr}{2}$$

**3. Модель Феппля–фон Кармана. Основные уравнения.** Для исследования деформирования тонких пластин в качестве модели будет использована модель Феппля–фон Кармана (напр. [31]), позволяющая учитывать достаточно большие прогибы. Согласно данной модели для рассматриваемого случая осевой симметрии используем уравнения, разрешающие задачу относительно прогиба  $w$ , тангенциальной и радиальной компонент усилий  $N_r$ ,  $N_t$ :

$$\begin{aligned} D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \frac{qr}{2} + N_r \frac{dw}{dr} \\ \frac{d}{dr} (rN_r) - N_t &= 0 \\ r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\bar{E}h^3}{12}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где первые два выражения являются уравнениями равновесия, а третье соотношение следует из условия совместности деформаций,  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины.

Выражения компонент усилий  $N_r$ ,  $N_t$  и момента  $M_r$  через компоненты перемещения есть

$$\begin{aligned} N_r &= \bar{E}h \left[ \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right], \quad N_t = \bar{E}h \left[ \frac{u}{r} + \nu \left( \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \right] \\ M_r &= D \left[ \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в (3.1) дает

$$\begin{aligned} D \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] &= \frac{qr}{2} + N_r \frac{dw}{dr} \\ r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t &= 0 \\ r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{R}, \quad \text{при} \quad r = 0 \Rightarrow \rho = 0 \\ & \quad \quad \quad r = R \Rightarrow \rho = 1 \\ \tilde{u}(\rho) &= \frac{u(r)}{R}, \quad \tilde{w}(\rho) = \frac{w(r)}{R} \\ \frac{du}{dr} &= \frac{d\tilde{u}}{d\rho}, \quad \frac{dw}{dr} = \frac{d\tilde{w}}{d\rho}, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2}, \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{1}{R^2} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} \\ \tilde{N}_r &= \frac{N_r}{Eh}, \quad \tilde{N}_t = \frac{N_t}{Eh}, \quad p = \frac{q}{E} \end{aligned} \quad (3.4)$$

С помощью введенных безразмерных величин можно получить более информативные и удобные результаты для анализа поведения круговой пластины, в частности прогиб пластины относительно радиуса его основания (процент “выпучивания”). Также введенный безразмерный параметр  $\rho = r / R$  будет способствовать быстрому решению задачи в рядах, где для граничного условия вместо  $r = R$  используется значение  $\rho = 1$ .

Соответственно уравнения (3.2), (3.3) в безразмерных величинах примут вид

$$\begin{aligned} D \left[ \frac{1}{R^2} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{R^2 \rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{R^2 \rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right] &= \frac{p \bar{E} R \rho}{2} + \tilde{N}_r \bar{E} h \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \\ \rho \frac{d(\tilde{N}_r \bar{E} h)}{d\rho} + \tilde{N}_r \bar{E} h - \tilde{N}_t \bar{E} h &= 0 \\ \rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r \bar{E} h + \tilde{N}_t \bar{E} h) + \frac{hE}{2} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r &= \frac{N_r}{Eh} = \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 + v \frac{\tilde{u}}{\rho} \\ \tilde{N}_t &= \frac{N_t}{Eh} = \frac{\tilde{u}}{\rho} + v \left( \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right) \\ \tilde{M}_r &= \frac{M_r}{Eh^2} = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right) \left[ \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{v}{\rho} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

После некоторых упрощений, данные уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} &= \frac{12p\rho}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 + 12\tilde{N}_r \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \\ \rho \frac{d\tilde{N}_r}{d\rho} + \tilde{N}_r - \tilde{N}_t &= 0 \\ \rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r + \tilde{N}_t) + \frac{1}{2}(1 - \nu^2) \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу допущения равномерности нагрузки, а также симметрии относительно оси  $z$ , можно считать, что усилие  $\tilde{N}_r$  является симметричной функцией, а  $d\tilde{w}/d\rho$  – антисимметричной функцией от  $\rho$ . Следовательно, можно представить данные функции в виде следующих степенных рядов [31]:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r &= \frac{1}{12\rho} \left(\frac{h}{R}\right)^2 (B_1\rho + B_3\rho^3 + B_5\rho^5 + B_7\rho^7 + \dots) \\ \frac{d\tilde{w}}{d\rho} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right) (C_1\rho + C_3\rho^3 + C_5\rho^5 + C_7\rho^7 + \dots), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $C_i, B_i$  – постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Нормальная компонента смещения получается путем интегрирования:

$$\tilde{w}(\rho) = \int \frac{d\tilde{w}}{d\rho} d\rho = C_0 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right) \left( \frac{1}{2}C_1\rho^2 + \frac{1}{4}C_3\rho^4 + \frac{1}{6}C_5\rho^6 + \frac{1}{8}C_7\rho^8 + \dots \right)$$

Из второго уравнения (3.7) получаем:

$$\tilde{N}_t = \frac{1}{12\rho} \left(\frac{h}{R}\right)^2 (B_1\rho + 3B_3\rho^3 + 5B_5\rho^5 + 7B_7\rho^7 + \dots) \quad (3.9)$$

Подстановка (3.8) в первое и третье уравнения (3.7), дает систему уравнений, решение которой есть:

$$\begin{aligned} B_k &= -\frac{(1 - \nu^2)}{2(k^2 - 1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i C_{k-i-1}; \quad k = 3, 5, 7, \dots \\ C_3 &= \frac{1}{8} \left( B_1 C_1 - 12\sqrt{3}p \left(\frac{R}{h}\right)^4 \right) \\ C_k &= \frac{1}{(k^2 - 1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i B_{k-i-1}; \quad k = 5, 7, 9, \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

где коэффициенты  $B_k, C_k$   $k = 3, 5, 7, \dots$  выражаются через пока еще неизвестные коэффициенты  $B_1, C_1$ .

Радиальная компонента смещения, с использованием (3.6) и полученного решения (3.10), приобретает вид

$$\frac{1}{(1 - \nu^2)} (\tilde{N}_t - \nu\tilde{N}_r) = \frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} \Rightarrow \frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} = \frac{1}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i (i - \nu)\rho^{i-1} \quad (3.11)$$

Рассмотрим два типа граничных условий:

А) Граничные условия типа жесткой заделки:

$$\begin{aligned} u(R) = 0 & \qquad \qquad \qquad \tilde{u}(\rho = 1) = 0 \\ w(R) = 0, \frac{dw(r)}{dr}\Big|_{r=R} = 0 & \Rightarrow \tilde{w}(\rho = 1) = 0, \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=1} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Б) Граничные условия в случае обобщенной упругой заделки (2.1), в безразмерных величинах приобретающие вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R}\right) \left[ -a_{11}\tilde{N}_r + a_{12}\tilde{M}_r + a_{13}\tilde{Q}_{rz} \right] \\ \tilde{w}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R}\right) \left[ -a_{31}\tilde{N}_r + a_{32}\tilde{M}_r + a_{33}\tilde{Q}_{rz} \right] \\ -\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=1} &= -a_{21}\tilde{N}_r + a_{22}\tilde{M}_r + a_{23}\tilde{Q}_{rz}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $\tilde{M}_r = \frac{M_r}{Eh^2}$ ,  $\tilde{Q}_{rz} = \frac{Q_{rz}}{Eh}$ .

Константы  $B_i, C_i$ , а следовательно, и смещения  $\tilde{u}(\rho), \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}$  находятся из решения системы первого и третьего граничных условий (3.13):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho = 1) &= \frac{1}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i (i - \nu) = \left(\frac{h}{R}\right) \left[ -\frac{a_{11}}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{12}}{24\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,7,\dots} \left(i + \frac{\nu}{R}\right) C_i + \frac{p}{2} a_{13} \left(\frac{R}{h}\right) \right] \\ -\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right) \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = -\frac{a_{21}}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i + \\ &\quad + \frac{a_{22}}{24\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,7,\dots} \left(i + \frac{\nu}{R}\right) C_i + \frac{p}{2} a_{23} \left(\frac{R}{h}\right) \end{aligned}$$

Нормальная компонента перемещений  $\tilde{w}(\rho)$  (точнее неизвестная константа  $C_0$ ) находится из второго граничного условия (3.13):

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\rho = 1) &= C_0 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right) \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = \left(\frac{h}{R}\right) \left[ -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 a_{31} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{24\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 a_{32} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} \left(i + \frac{\nu}{R}\right) C_i + \frac{p}{2} a_{33} \left(\frac{R}{h}\right) \right] \end{aligned}$$

**4. Альтернативные методы решения.** В работах [20,33] рассматривались другие методы решения. Кратко приведем их решения для дальнейшего сравнения.

*4.1. Модель пластины без учета продольных усилий (Модель С. Жермен).* В данной модели не учитываются продольные усилия, т.е. система уравнений (3.3) редуцируется к одному уравнению (первому из уравнений (3.3) без последнего члена в правой части), решение которого с учетом граничных условий упругой заделки (3.13) безразмерных величинах есть

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\rho) = & \frac{3p}{16} \left( \frac{R}{h} \right)^3 (\rho^4 - 1) - \frac{3p}{8} \left( \frac{R}{h} \right)^3 (\rho^2 - 1) \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{(3 + \nu)}{12} a_{22} \frac{h}{R} + a_{23} \frac{2}{3} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{h}{12R} a_{22} (1 + \nu) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

**4.1. Мембранная модель.** Данная модель предполагает, что влияние продольных усилий намного больше, чем влияние усилий, отвечающих за изгиб и последними можно пренебречь. При этом в уравнениях для прогиба из уравнений (3.5) отбрасываются слагаемые, связанные с изгибом. Аналитическое решение получается в предположении постоянства усилий  $N_r = \text{const}$ . Решение с учетом граничных условий (3.13) имеет вид [20]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho) = & \frac{\tilde{N}_r \rho}{(1 + \nu)} - \frac{1}{48} \rho^3 \left( \frac{p}{\tilde{N}_r} \frac{R}{h} \right)^2 \\ \tilde{w}(\rho) = & \frac{p}{4\tilde{N}_r} \frac{R}{h} (1 - \rho^2) \\ \tilde{N}_r = & \sqrt[3]{\frac{1}{48} p^2 \left( \frac{R}{h} \right)^3 \left( \frac{R}{h} \frac{1}{(1 + \nu)} + a_{11} \right)^{-1}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

**4.2. Модель Фепля–фон Кармана в приближении постоянства продольных усилий.** В отличие от основной модели Фепля–фон Кармана, в данной модели предполагается постоянство продольных усилий  $N_r = \text{const}$ , что приводит к упрощению уравнений (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} = & \frac{12p\rho}{2} \left( \frac{R}{h} \right)^3 + 12\tilde{N}_r \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \\ \rho \frac{d\tilde{N}_r}{d\rho} + \tilde{N}_r - \tilde{N}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad & \tilde{N}_r = \tilde{N}_t = \tilde{N} = \text{const} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналитическое общее решение для компонент смещений  $\tilde{w}(\rho)$ ,  $\tilde{u}(\rho)$  в безразмерных величинах имеет вид [20]

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\rho) = & \frac{p}{4\tilde{N}_r} \frac{R}{h} (1 - \rho^2) + C \left[ I_0 \left( \rho \frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}_r} \right) - I_0 \left( \frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}_r} \right) \right] \\ \tilde{u}(\rho) = & \frac{\tilde{N}_r}{(1 + \nu)} - \frac{\rho^3}{48\tilde{N}_r^2} \frac{R}{h} \left[ p^2 - 24p \frac{R}{h} C \tilde{N}_r^2 {}_1F_2 \left( \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; 3 \left( \frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 \tilde{N}_r \right) + \right. \\ & \left. + 144 \left( \frac{R}{h} \right)^2 C^2 \tilde{N}_r^4 {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; 12 \left( \frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 \tilde{N}_r \right) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  ${}_nF_m$  – гипергеометрическая функция, а параметр  $C$  и величина усилий  $\tilde{N}_r$  находятся из граничных условий (3.13).

**5. Численное решение дифференциальных уравнений.** Приведем численный метод решения данной задачи, аналогичный “методу стрельбы”. Сведем первые два урав-

нения модели Феппля–фон Кармана (3.1) с учетом (3.2) к системе дифференциальных уравнений с двумя неизвестными (компонентами смещений  $\tilde{u}(\rho)$ ,  $\tilde{w}(\rho)$ ):

$$\frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} + \frac{12p\rho}{2} \left( \frac{R}{h} \right)^3 + 12 \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \left( \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \nu \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{\tilde{u}}{\rho^2} - \frac{(1-\nu)}{2\rho} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 - \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2}$$

Данную систему можно решить с помощью процедуры численного интегрирования, начиная от центра пластины и “двигаясь” малыми приращениями (“шагами”) в радиальном направлении к границе пластины. Для кругового элемента малого радиуса равного  $\Delta\rho$  задаются (обычно случайным образом) параметры радиальной деформации и кривизны

$$\left( \frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right)_{\rho=\Delta\rho} = u'_1, \quad \left( \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} \right)_{\rho=\Delta\rho} = w''_1 \quad (5.2)$$

В силу симметрии круговой пластины, очевидно

$$\tilde{u}(\rho = 0) = u_0 = 0, \quad \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)_{\rho=0} = w'_0 = 0 \quad (5.3)$$

Используя формулу конечных разностей для производных, получаем

$$\tilde{u}(\rho = \Delta\rho) = u_1 = u_0 + u'_1\Delta\rho, \quad \left( \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)_{\rho=\Delta\rho} = w'_1 = w'_0 + w''_1\Delta\rho \quad (5.4)$$

Подстановка значений  $u_1, u'_1, w'_1, w''_1$  в систему уравнений (5.1) дает

$$\left( \frac{d^2\tilde{u}}{d\rho^2} \right)_{\rho=\Delta\rho} = u''_1, \quad \left( \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} \right)_{\rho=\Delta\rho} = w'''_1 \quad (5.5)$$

Далее, для следующей точки  $\rho = 2\Delta\rho$

$$u''_1 = \frac{u'_2 - u'_1}{\Delta\rho} \Rightarrow u'_2 = u'_1 + \Delta\rho u''_1, \quad (5.6)$$

используя численное интегрирование, получим

$$u_2 = u_1 + \frac{(u'_1 + u'_2)}{2} \Delta\rho \quad (5.7)$$

Аналогично для компоненты  $w$ :

$$w'''_1 = \frac{w''_2 - w''_1}{\Delta\rho} \Rightarrow w''_2 = w''_1 + \Delta\rho w'''_1, \quad w'_2 = w'_1 + \frac{(w''_1 + w''_2)}{2} \Delta\rho \quad (5.8)$$

Подстановка полученных значений  $u_2, u'_2, w'_2, w''_2$  в систему уравнений (4.1) дает, соответственно, значения  $u''_2, w'''_2$ . Используя полученные значения, можно уточнить решения, пересчитав компоненты

$$\begin{aligned} u'_2 &= u'_1 + \frac{(u''_1 + u''_2)}{2} \Delta\rho, \quad u_2 = u_1 + \frac{(u'_1 + u'_2)}{2} \Delta\rho \\ w''_2 &= w''_1 + \frac{(w'''_1 + w'''_2)}{2} \Delta\rho, \quad w'_2 = w'_1 + \frac{(w''_1 + w''_2)}{2} \Delta\rho \end{aligned} \quad (5.9)$$



Подстановка данных значений в систему уравнений (5.1) дает более точные значения  $u_2'', w_2'''$ . Далее аналогичным образом находим значения  $u_i, u_i', w_i', w_i''$   $i = 3, \dots, n$ , где  $\rho_i = i \cdot \Delta\rho$ , а  $\rho_{i=n} = 1$  соответствует граничному условию. Для выбора приемлемого шага  $\Delta\rho$  воспользуемся следующим алгоритмом: определим значение  $w_n'$  при двух заданных шагах  $\Delta\rho, \Delta\rho/2$ , и если их разница меньше заданной точности  $\varepsilon$ , т.е.  $|w'_{n,\Delta\rho} - w'_{n,\Delta\rho/2}| < \varepsilon$ , то в качестве приемлемого шага будем принимать  $\Delta\rho/2$ .

Также можно применить известные методы для решения систем дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для этого приведем уравнения (5.1) к такой системе с помощью следующей замены:

$$y_1 = \tilde{w}', \quad y_2 = \tilde{w}'', \quad y_3 = \tilde{u}, \quad y_4 = \tilde{u}'$$

Полученная система дифференциальных уравнений 1-го порядка примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\rho} &= y_2 = f_1(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \frac{dy_2}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho}y_2 + \frac{1}{\rho^2}y_1 + \frac{12p}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \rho + \\ &+ 12 \left(\frac{R}{h}\right)^2 y_1 \left(y_4 + \frac{\nu}{\rho}y_3 + \frac{1}{2}y_1^2\right) = f_2(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \frac{dy_3}{d\rho} &= y_4 = f_3(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \frac{dy_4}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho}y_4 + \frac{1}{\rho^2}y_3 - \frac{(1-\nu)}{2\rho}y_1^2 - y_1y_2 = f_4(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(\rho = \Delta\rho) &= y_1^0 = \tilde{w}'(\rho = \Delta\rho) \approx \tilde{w}'(\rho = 0) + \Delta\rho\tilde{w}''(\rho = \Delta\rho) = \Delta\rho\tilde{w}''(\rho = \Delta\rho) \\ y_2(\rho = \Delta\rho) &= y_2^0 = \tilde{w}''(\rho = \Delta\rho) \\ y_3(\rho = \Delta\rho) &= y_3^0 = \tilde{u}(\rho = \Delta\rho) \approx \tilde{u}(\rho = 0) + \Delta\rho\tilde{u}'(\rho = \Delta\rho) = \Delta\rho\tilde{u}'(\rho = \Delta\rho) \\ y_4(\rho = \Delta\rho) &= y_4^0 = \tilde{u}'(\rho = \Delta\rho) \end{aligned}$$

Классический метод Рунге–Кутты 4-го порядка для полученной системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} k_1^i &= f_i(\rho_j, y_1^j, y_2^j, y_3^j, y_4^j) \\ k_2^i &= f_i\left(\rho_j + \frac{\Delta\rho}{2}, y_1^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_2^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_3^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_4^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i\right) \\ k_3^i &= f_i\left(\rho_j + \frac{\Delta\rho}{2}, y_1^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_2^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_3^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_4^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i\right) \\ k_4^i &= f_i\left(\rho_j + \Delta\rho, y_1^j + \Delta\rho k_3^i, y_2^j + \Delta\rho k_3^i, y_3^j + \Delta\rho k_3^i, y_4^j + \Delta\rho k_3^i\right) \\ y_i^{j+1} &= y_i^j + \frac{\Delta\rho}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i); \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где при  $\rho_{j=n} = \rho_{n-1} + \Delta\rho = 1$ .

Полученное численное решение будет считаться корректным, если оно достаточно точно соответствует первому и третьему граничному условию (3.13) (или в случае

жесткой заделки (3.12)), в противном случае, берем другие начальные условия (5.2) и повторяем те же процедуры. В качестве критерия точности возьмем евклидовую норму, т.е. для не нулевых граничных условий (3.13) наилучшим решением численного метода будет то, которое удовлетворяет условию

$$\min \left[ \sqrt{\left( \tilde{u}(\rho = 1) - \left( \frac{h}{R} \right) \left[ -a_{11} \tilde{N}_r + a_{12} \tilde{M}_r + a_{13} \tilde{Q}_{rz} \right] \right)^2 + \left( \left. \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=1} - a_{21} \tilde{N}_r + a_{22} \tilde{M}_r + a_{23} \tilde{Q}_{rz} \right)^2} \right] \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

Соответственно, для нулевых граничных условий (т.е. при  $a_{ij} = 0$ ):

$$\min \left[ \sqrt{(\tilde{u}(\rho = 1))^2 + \left( \left. \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=1} \right)^2} \right] \rightarrow 0 \quad (5.11)$$

Если для данного численного метода в качестве начальных условий (5.2) использовать значения, вычисленные с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах, то можно заметить, что даже для большого количества слагаемых ряда решения с помощью численного метода и метода в рядах могут отличаться на границе, особенно при достаточно большом значении интенсивности поперечной нагрузки  $p$ . На рис. 3, 4 изображены зависимости  $u(\rho), w'(\rho)$  с учетом и без коэффициентов податливости подложки при значении величины  $p = 2 \cdot 10^{-4}$ .

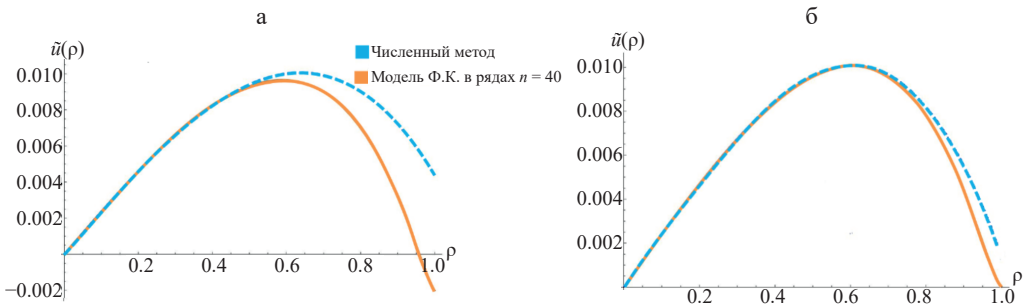


Рис. 3. Компонента смещения  $\tilde{u}(\rho)$  с учетом (а) и без учета (б) податливости

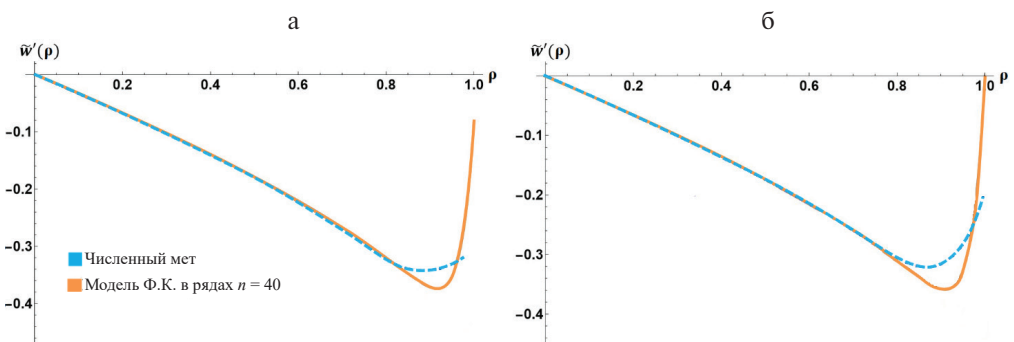


Рис. 4. Значения производной смещения  $\tilde{w}'(\rho)$  с учетом (а) и без учета (б) податливости

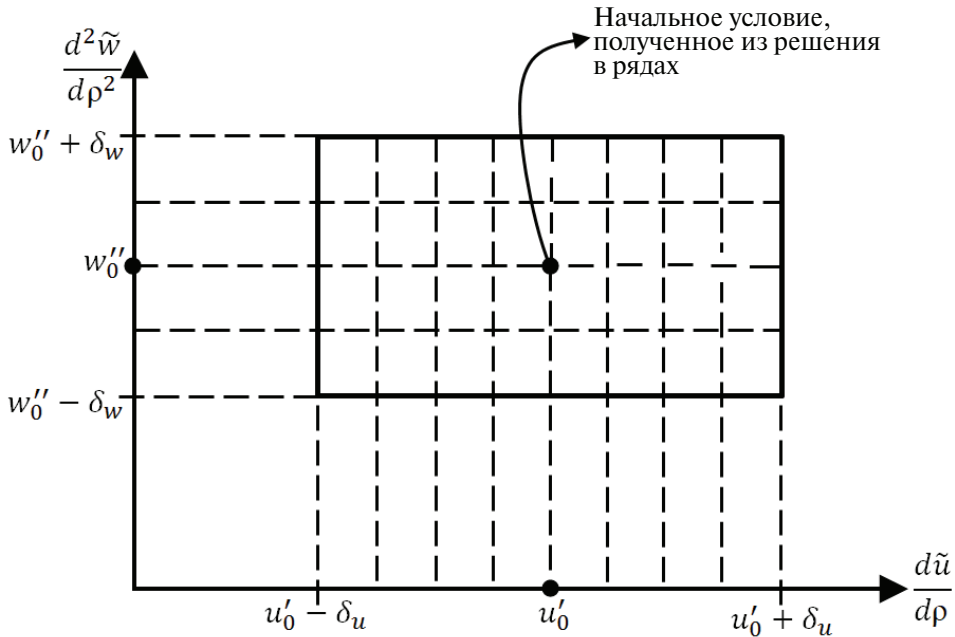


Рис. 5. Выделенная окрестность начальных условий для поиска оптимального решения задачи

Из рис. 3, 4 видно, что при решении с помощью численного метода, значения  $u(\rho)$ ,  $w'(\rho)$  в окрестности границы не совпадают со значениями решения, полученного с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах.

Для получения достаточно точного решения можно применить следующий алгоритм: в качестве начальных условий (5.2) возьмем значения, полученные с помощью решения в рядах, и, выполняя алгоритм численного метода в указанной окрестности начальных условий (рис. 5), получим решение задачи, с достаточной степенью точности удовлетворяющее условию (5.10) (или в случае жесткой заделки (5.11)). Данный алгоритм относится к алгоритмам типа “предиктор–корректор” (предсказание–исправление).

Также для поиска значения начальных условий при наличии некоторых решений задачи, можно построить интерполяционный полином из известных начальных данных, затем провести экстраполяцию (рис. 6) и, “двигаясь” вдоль экстраполированной кривой с использованием критерия (5.10) (или в случае жесткой заделки (5.11)), подобрать новое приближение начальных условий.

Однако представленный численный метод также не лишен недостатков. При больших значениях интенсивности поперечной нагрузки  $p = q / \bar{E} > 2 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует прогибу  $\sim 19...20\%$  от радиуса круговой пластины, решение с помощью численного метода становится сильно “чувствительным” к начальным условиям (при этом шаг  $\Delta\rho$  должен быть  $< 10^{-4}$ ), и для нахождения оптимального решения необходимо достаточно большое количество вычислительных мощностей, а следовательно, и больше времени на поиск соответствующего начального условия и расчет.

На рис. 7 построены графики компоненты смещения  $\tilde{w}(\rho)$  с учетом и без податливости подложки при значении величины  $p = q / \bar{E} = 2 \cdot 10^{-4}$  для разных методов, в том числе приведенного численного метода.

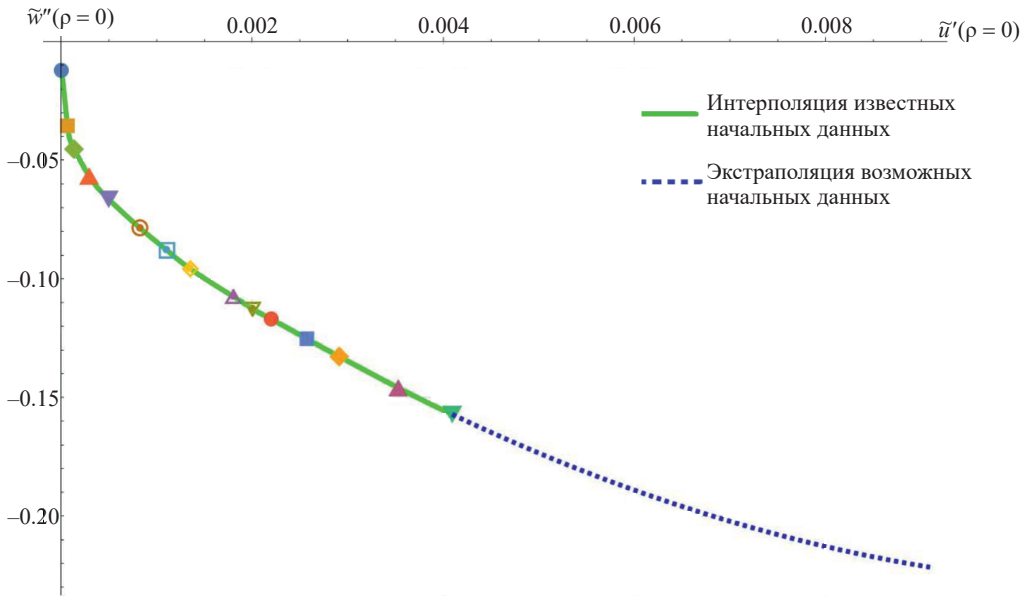


Рис. 6. Интерполяция и экстраполяция по известным начальным данным при различных значениях интенсивности поперечной нагрузки  $\rho$

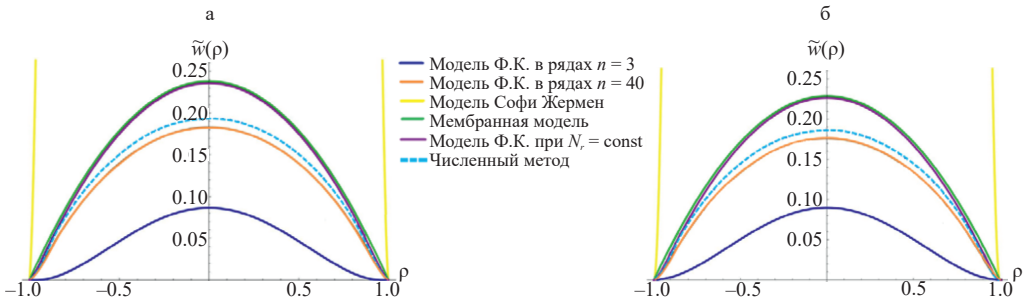


Рис. 7. Графики компоненты смещения  $\tilde{w}(\rho)$  с учетом (а) и без учета (б) коэффициентов податливости  $a_{ij}$  при  $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$

**6. Результаты расчетов; сравнение результатов, полученных различными методами.**

В расчетах отношение толщины пластины к радиусу принималось:  $h / R = 1 / 100$ . Значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для пластины принимались соответствующие свойствам алюминия  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.35$ . В качестве коэффициентов упругой заделки принимались значения, соответствующие пластине алюминия указанной геометрии, сопряженной с кремниевым основанием:

$$a_{11} = 10, a_{12} = a_{21} = 1.7, a_{22} = 12, a_{13} = 0, a_{23} = 0, a_{33} = 0$$

Данные значения коэффициентов податливости для рассматриваемого случая были получены в работе [20].

Для представления результатов введены следующие обозначения:

- $X_{S-Z}$  – решение, полученное с помощью модели С. Жермен;

- $X_{\text{Membran}}$  – решение, полученное с помощью мембранной модели;
- $X_{\text{Karman}}$  – решение, полученное с помощью модели Феппля–фон Кармана при постоянных продольных усилиях;
- $X_{\text{Series}}$  – решение, полученное с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах;
- $X_{\text{Num}}$  – решение, полученное с помощью модели Феппля–фон Кармана, с использованием численного метода;
- $\delta_{\text{Karman}}^X = \frac{(X_{\text{Karman}} - X_{\text{Karman}}^0)}{X_{\text{Karman}}} \cdot 100\%$  – относительная разность решений, полученных с помощью модели Феппля–фон Кармана при постоянных продольных усилиях с учетом и без учета податливости основания;

с помощью модели Феппля–фон Кармана при постоянных продольных усилиях с учетом и без учета податливости основания;

- $\delta_{\text{Series}}^X = \frac{(X_{\text{Series}} - X_{\text{Series}}^0)}{X_{\text{Series}}} \cdot 100\%$  – относительная разность решений, полученных с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах с учетом и без учета податливости основания.

Для значений безразмерной величины интенсивности поперечной нагрузки:  $p = \frac{q}{E} = \sqrt{3} \cdot 10^{-8}, \dots, \sqrt{3} \cdot 10^{-5}$  были вычислены значения безразмерных величин прогиба в центре пластины  $\tilde{w}(r=0)$  (табл. 1), момента на краю пластины  $\tilde{M}_r$  и величины растягивающего усилия  $\tilde{N}_r$  (табл. 2, 3) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, а также жесткой заделки ( $a_{ij} = 0$ ).

Из данных, представленных в таблицах, следует, что для достаточно малых значений интенсивности поперечной нагрузки  $p = q/E$  модели С. Жермен, Феппля–фон Кармана при  $\tilde{N}_r = \text{const}$ , а также модель Феппля–фон Кармана в рядах хорошо согласуются в отличие от мембранной модели. Также при сравнении методов решений задачи отметим, что при увеличении значения интенсивности поперечной нагрузки  $p$  решения методом Феппля–фон Кармана при  $\tilde{N}_r = \text{const}$ , Феппля–фон Кармана в рядах, а также мембранной модели качественно близки, в отличие от метода Софи Жермен, где при  $p > 10^{-7}$  данное приближение уже неприменимо.

Однако также стоит подчеркнуть, что при увеличении  $p$  решение в рамках модели Феппля–фон Кармана при  $\tilde{N}_r = \text{const}$  и полученное в рядах для  $\tilde{N}_r \neq \text{const}$  отличаются, причем при  $p = \sqrt{3} \cdot 10^{-5}$  разница значения прогиба в центре ( $\tilde{w}(r=0)$ ) уже достигает порядка 20%, из чего можно сделать вывод, что уже в данном случае влияния непостоянства продольных сил  $\tilde{N}_r$  существенен.

Один из главных вопросов при решении задачи с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах заключается в определении достаточного количества членов ряда для корректного решения задачи. В качестве критерия оптимального количества слагаемых ряда можно использовать нестрогий технический подход, заключающийся в том, что если разница значений нормальной компоненты смещения в центре прогиба  $\tilde{w}(r=0)$  при решении задачи с  $n$  числом слагаемых ряда и с  $n+1$  числом слагаемых меньше заданной точности  $\epsilon$ , т.е.  $|\tilde{w}_n - \tilde{w}_{n+1}| < \epsilon$ , то в качестве решения можно принять ряд с  $n+1$  слагаемыми.

Недостатком решения задачи с помощью модели Феппля–фон Кармана в рядах является увеличение необходимого числа членов ряда, а следовательно, увеличение времени расчета и накапливание ошибок с ростом  $p = q/E$ . Это становится существенным при числе слагаемых  $n > 50$ , особенно для случая обобщенной упругой заделки.

Таблица 1. Величины прогиба в центре пластины  $\check{w}(\rho = 0)$  при учете и без учета упругой заделки для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	$a_{ij}$	$\check{w}_{S-z}$	$\check{w}_{Membran}$	$\check{w}_{Kamman}$	$\check{w}_{Series}$	$\check{w}_{Num}$	$\delta_{Kamman}^w$	$\delta_{Series}^w$
$p_0 = \sqrt{5} \cdot 10^{-8}$	$a_{ij} = 0$	$3.248 \cdot 10^{-3}$	$9.873 \cdot 10^{-3}$	$3.141 \cdot 10^{-3}$	$3.085 \cdot 10^{-3}$	$3.085 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$3.376 \cdot 10^{-3}$	$1.030 \cdot 10^{-2}$	$3.255 \cdot 10^{-3}$	$3.193 \cdot 10^{-3}$	$3.193 \cdot 10^{-3}$	3.49%	3.39%
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	$6.495 \cdot 10^{-3}$	$1.244 \cdot 10^{-2}$	$5.819 \cdot 10^{-3}$	$5.544 \cdot 10^{-3}$	$5.544 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$6.752 \cdot 10^{-3}$	$1.297 \cdot 10^{-2}$	$6.028 \cdot 10^{-3}$	$5.728 \cdot 10^{-3}$	$5.728 \cdot 10^{-3}$	3.47%	3.2%
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	$3.248 \cdot 10^{-2}$	$2.127 \cdot 10^{-2}$	$1.661 \cdot 10^{-2}$	$1.457 \cdot 10^{-2}$	$1.457 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$3.376 \cdot 10^{-2}$	$2.219 \cdot 10^{-2}$	$1.728 \cdot 10^{-2}$	$1.505 \cdot 10^{-2}$	$1.505 \cdot 10^{-2}$	3.89%	3.16%
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	$6.495 \cdot 10^{-2}$	$2.679 \cdot 10^{-2}$	$2.292 \cdot 10^{-2}$	$1.960 \cdot 10^{-2}$	$1.960 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$6.752 \cdot 10^{-2}$	$2.795 \cdot 10^{-2}$	$2.388 \cdot 10^{-2}$	$2.026 \cdot 10^{-2}$	$2.026 \cdot 10^{-2}$	4.04%	3.24%
$100p_0$	$a_{ij} = 0$	$3.248 \cdot 10^{-1}$	$4.582 \cdot 10^{-2}$	$4.297 \cdot 10^{-2}$	$3.578 \cdot 10^{-2}$	$3.578 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$3.376 \cdot 10^{-1}$	$4.780 \cdot 10^{-2}$	$4.485 \cdot 10^{-2}$	$3.703 \cdot 10^{-2}$	$3.702 \cdot 10^{-2}$	4.19%	3.36%
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	$6.495 \cdot 10^{-1}$	$5.774 \cdot 10^{-2}$	$5.508 \cdot 10^{-2}$	$4.558 \cdot 10^{-2}$	$4.558 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$6.752 \cdot 10^{-1}$	$6.022 \cdot 10^{-2}$	$5.750 \cdot 10^{-2}$	$4.719 \cdot 10^{-2}$	$4.718 \cdot 10^{-2}$	4.21%	3.41%
$300p_0$	$a_{ij} = 0$	$9.743 \cdot 10^{-1}$	$6.609 \cdot 10^{-2}$	$6.352 \cdot 10^{-2}$	$5.251 \cdot 10^{-2}$	$5.251 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	1.0127	$6.894 \cdot 10^{-2}$	$6.632 \cdot 10^{-2}$	$5.431 \cdot 10^{-2}$	$5.432 \cdot 10^{-2}$	4.21%	3.31%
$500p_0$	$a_{ij} = 0$	1.6238	$7.836 \cdot 10^{-2}$	$7.587 \cdot 10^{-2}$	$6.286 \cdot 10^{-2}$	$6.289 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	1.6879	$8.174 \cdot 10^{-2}$	$7.921 \cdot 10^{-2}$	$6.499 \cdot 10^{-2}$	$6.505 \cdot 10^{-2}$	4.21%	3.28%
$700p_0$	$a_{ij} = 0$	2.2733	$8.766 \cdot 10^{-2}$	$8.522 \cdot 10^{-2}$	$7.058 \cdot 10^{-2}$	$7.125 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	2.3630	$9.144 \cdot 10^{-2}$	$8.896 \cdot 10^{-2}$	$7.299 \cdot 10^{-2}$	$7.365 \cdot 10^{-2}$	4.21%	3.31%
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	3.2476	$9.873 \cdot 10^{-2}$	$9.632 \cdot 10^{-2}$	$8.086 \cdot 10^{-2}$	$8.164 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	3.3758	$1.030 \cdot 10^{-1}$	$1.006 \cdot 10^{-1}$	$8.363 \cdot 10^{-2}$	$8.415 \cdot 10^{-2}$	4.21%	3.32%

Таблица 2. Величины продольного усилия на краю пластины  $\tilde{N}_r$  при учете и без учета упругой заделки для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	$a_{ij}$	$\tilde{N}_r^{s-z}$	$\tilde{N}_r^{Membran}$	$\tilde{N}_r^{Kirman}$	$\tilde{N}_r^{Series}$	$\tilde{N}_r^{Num}$	$\delta_{Kirman}^{N_r}$	$\delta_{Series}^{N_r}$
$p_0 = \sqrt{5} \cdot 10^{-8}$	$a_{ij} = 0$	—	$4.390 \cdot 10^{-5}$	$4.060 \cdot 10^{-6}$	$4.309 \cdot 10^{-6}$	$4.309 \cdot 10^{-6}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$4.205 \cdot 10^{-5}$	$4.230 \cdot 10^{-6}$	$4.491 \cdot 10^{-6}$	$4.491 \cdot 10^{-6}$	4.02%	4.06%
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$6.96 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$6.675 \cdot 10^{-5}$	$1.387 \cdot 10^{-5}$	$1.407 \cdot 10^{-5}$	$1.407 \cdot 10^{-5}$	0%	0%
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$2.036 \cdot 10^{-4}$	$1.140 \cdot 10^{-4}$	$1.052 \cdot 10^{-4}$	$1.052 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$1.952 \cdot 10^{-4}$	$1.108 \cdot 10^{-4}$	$1.019 \cdot 10^{-4}$	$1.018 \cdot 10^{-4}$	-2.89%	-3.24%
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$3.232 \cdot 10^{-4}$	$2.187 \cdot 10^{-4}$	$2.049 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$3.098 \cdot 10^{-4}$	$2.124 \cdot 10^{-4}$	$1.981 \cdot 10^{-4}$	$1.981 \cdot 10^{-4}$	-2.97%	-3.4%
$100p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$9.449 \cdot 10^{-4}$	$7.891 \cdot 10^{-4}$	$7.705 \cdot 10^{-4}$	$7.706 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$9.059 \cdot 10^{-4}$	$7.664 \cdot 10^{-4}$	$7.452 \cdot 10^{-4}$	$7.453 \cdot 10^{-4}$	-2.96%	-3.40%
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.311 \cdot 10^{-3}$	$1.304 \cdot 10^{-3}$	$1.304 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$1.438 \cdot 10^{-3}$	$1.273 \cdot 10^{-3}$	$1.262 \cdot 10^{-3}$	$1.262 \cdot 10^{-3}$	-2.98%	-3.38%
$300p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$1.966 \cdot 10^{-3}$	$1.753 \cdot 10^{-3}$	$1.756 \cdot 10^{-3}$	$1.755 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$1.884 \cdot 10^{-3}$	$1.702 \cdot 10^{-3}$	$1.702 \cdot 10^{-3}$	$1.702 \cdot 10^{-3}$	-3%	-3.16%
$500p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$2.763 \cdot 10^{-3}$	$2.515 \cdot 10^{-3}$	$2.526 \cdot 10^{-3}$	$2.524 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$2.649 \cdot 10^{-3}$	$2.442 \cdot 10^{-3}$	$2.454 \cdot 10^{-3}$	$2.451 \cdot 10^{-3}$	-3.01%	-2.93%
$700p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$3.458 \cdot 10^{-3}$	$3.183 \cdot 10^{-3}$	$3.212 \cdot 10^{-3}$	$3.146 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$3.315 \cdot 10^{-3}$	$3.090 \cdot 10^{-3}$	$3.122 \cdot 10^{-3}$	$3.066 \cdot 10^{-3}$	-3.02%	-2.88%
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	—	$4.386 \cdot 10^{-3}$	$4.079 \cdot 10^{-3}$	$4.042 \cdot 10^{-3}$	$3.940 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	—	$4.205 \cdot 10^{-3}$	$3.959 \cdot 10^{-3}$	$3.915 \cdot 10^{-3}$	$3.879 \cdot 10^{-3}$	-3.04%	-3.25%

Таблица 3. Величины изгибающего момента на краю пластины  $\bar{M}_r$  при учете и без учета упругой заделки для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	$a_{ij}$	$\bar{M}_r^{s-z}$	$\bar{M}_r^{Membran}$	$\bar{M}_r^{Kármán}$	$\bar{M}_r^{Series}$	$\bar{M}_r^{Num}$	$\delta_{Kármán}^{M_r}$	$\delta_{Series}^{M_r}$
$p_0 = \sqrt{3} \cdot 10^{-8}$	$a_{ij} = 0$	$2.17 \cdot 10^{-5}$	—	$2.12 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$2.136 \cdot 10^{-5}$	—	$2.09 \cdot 10^{-5}$	$2.073 \cdot 10^{-5}$	$2.073 \cdot 10^{-5}$	$-1.44\%$	$-1.93\%$
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	$4.33 \cdot 10^{-5}$	—	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$4.272 \cdot 10^{-5}$	—	$3.992 \cdot 10^{-5}$	$3.910 \cdot 10^{-5}$	$3.910 \cdot 10^{-5}$	$-1.75\%$	$-1.79\%$
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	$2.165 \cdot 10^{-4}$	—	$1.486 \cdot 10^{-4}$	$1.438 \cdot 10^{-4}$	$1.440 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$2.136 \cdot 10^{-4}$	—	$1.449 \cdot 10^{-4}$	$1.398 \cdot 10^{-4}$	$1.400 \cdot 10^{-4}$	$-2.55\%$	$-2.86\%$
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	$4.330 \cdot 10^{-4}$	—	$2.453 \cdot 10^{-4}$	$2.378 \cdot 10^{-4}$	$2.379 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$4.272 \cdot 10^{-4}$	—	$2.373 \cdot 10^{-4}$	$2.292 \cdot 10^{-4}$	$2.294 \cdot 10^{-4}$	$-3.37\%$	$-3.75\%$
$100p_0$	$a_{ij} = 0$	$2.165 \cdot 10^{-3}$	—	$7.567 \cdot 10^{-4}$	$7.381 \cdot 10^{-4}$	$7.355 \cdot 10^{-4}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$2.136 \cdot 10^{-3}$	—	$7.089 \cdot 10^{-4}$	$6.898 \cdot 10^{-4}$	$6.874 \cdot 10^{-4}$	$-6.74\%$	$-7.00\%$
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	$4.330 \cdot 10^{-3}$	—	$1.219 \cdot 10^{-3}$	$1.187 \cdot 10^{-3}$	$1.184 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$4.272 \cdot 10^{-3}$	—	$1.120 \cdot 10^{-3}$	$1.087 \cdot 10^{-3}$	$1.085 \cdot 10^{-3}$	$-8.87\%$	$-9.13\%$
$300p_0$	$a_{ij} = 0$	$6.495 \cdot 10^{-3}$	—	$1.610 \cdot 10^{-3}$	$1.563 \cdot 10^{-3}$	$1.564 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$6.409 \cdot 10^{-3}$	—	$1.458 \cdot 10^{-3}$	$1.413 \cdot 10^{-3}$	$1.413 \cdot 10^{-3}$	$-10.37\%$	$-10.67\%$
$500p_0$	$a_{ij} = 0$	$1.083 \cdot 10^{-2}$	—	$2.281 \cdot 10^{-3}$	$2.217 \cdot 10^{-3}$	$2.221 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$1.068 \cdot 10^{-2}$	—	$2.026 \cdot 10^{-3}$	$1.964 \cdot 10^{-3}$	$1.971 \cdot 10^{-3}$	$-12.57\%$	$-12.92\%$
$700p_0$	$a_{ij} = 0$	$1.516 \cdot 10^{-2}$	—	$2.867 \cdot 10^{-3}$	$2.788 \cdot 10^{-3}$	$2.830 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$1.495 \cdot 10^{-2}$	—	$2.510 \cdot 10^{-3}$	$2.433 \cdot 10^{-3}$	$2.455 \cdot 10^{-3}$	$-14.21\%$	$-14.59\%$
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	$2.165 \cdot 10^{-2}$	—	$3.652 \cdot 10^{-3}$	$3.576 \cdot 10^{-3}$	$3.628 \cdot 10^{-3}$	—	—
	$a_{ij} \neq 0$	$2.136 \cdot 10^{-2}$	—	$3.144 \cdot 10^{-3}$	$3.085 \cdot 10^{-3}$	$3.099 \cdot 10^{-3}$	$-16.17\%$	$-15.91\%$



При  $p = q/\bar{E} > 10^{-5}$ , что соответствует прогибу  $\sim 8...10\%$  от радиуса пластины, необходимое число слагаемых составляет  $n > 40$ .

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что учет влияния коэффициентов податливости приводит к увеличению значений нормальной компоненты смещения и уменьшению изгибающего момента и продольных усилий на краю пластины вне зависимости от используемой модели. Для прогибов  $>3\%$  от радиуса пластины можно заметить, что значения изгибающего момента на краю пластины с учетом и без учета податливости основания отличаются более чем в  $10\%$ . Также можно заметить, что результаты, полученные с помощью модели Феппля—фон Кармана в рядах, начинают отличаться от результатов, полученных с помощью численной модели, при поперечных нагрузках, соответствующих прогибам  $\sim 7...8\%$  от радиуса пластины, что указывает на необходимость большего числа слагаемых для модели Феппля—фон Кармана в рядах для получения более точного результата.

**Заключение.** Рассмотрена задача о деформировании круговой пластины, сопряженной с подложкой, под действием равномерной поперечной нагрузки. Для моделирования сопряжения пластины с основанием используются граничные условия типа обобщенной упругой заделки, т.е. линейной связи усилий, изгибающего момента на краю пластины с компонентами смещений и углом поворота.

Решение задачи получено с помощью модели Феппля—фон Кармана, где используется метод разложения в степенные ряды компонентов нормального смещения и продольного усилия, представленных в цилиндрической системе координат. Проведено сравнение полученного решения с известными решениями [20, 31], с учетом и без влияния основания. Также предложен численный метод, соответствующий методу стрельбы.

Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании. Проведено сравнение величин прогиба в центре пластины, продольного усилия и изгибающего момента на краю пластины, с учетом и без граничных условий упругой заделки. Показано, что при поперечной нагрузке, соответствующей прогибам более  $5\%$  от радиуса пластины, разница в значениях изгибающего момента на ее краю, посчитанная с учетом и без учета податливости заделки, превышает  $10\%$ , что показывает необходимость учета податливости подложки.

При сравнении результатов, полученных с помощью указанных моделей получено, что при небольшой поперечной нагрузке, соответствующей прогибу до  $0.5\%$  от радиуса пластины, все величины, посчитанные с помощью указанных моделей, практически совпадают, за исключением мембранной модели. При увеличении нагрузки данные, полученные с помощью модели С. Жермен, начинают существенно отличаться от данных, посчитанных с помощью остальных моделей, которые в свою очередь качественным образом сходятся. Далее увеличивая нагрузку, соответствующей прогибу порядка  $3\%$  от радиуса пластины, значения прогиба в центре пластины при использовании модели Феппля—фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, а также модели Феппля—фон Кармана в рядах начинают существенно различаться, и чем больше поперечная нагрузка, тем больше будет различие. Определены ограничения использования модели Феппля—фон Кармана в рядах. Кроме того, показано, что с помощью совместного использования полуаналитического метода и предложенного численного метода можно получить более точное решение данной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-19-00866 (для КБУ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nanofabrication: Nanolithography Techniques and Their Applications / ed. by *De Teresa J.M.* Bristol, England: IOP Pub., 2020. 450 p.  
<https://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>
2. *Салащенко Н.Н., Чхало Н.И., Дюжнев Н.А.* Безмасочная рентгеновская литография на основе МОЭМС и микрофокусных рентгеновских трубок // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. № 10. С. 10–20.  
<https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>
3. *Silverman J.P.* Challenges and progress in X-ray lithography // J. of Vacuum Sci.&Technol. B. 1998. V. 16. Iss. 6. P. 31–37.  
<https://doi.org/10.1116/1.590452>
4. *Vladimirsky Y., Bourdillon A. et al.* Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction // J. of Physics D: Appl. Phys. 1999. V. 32. Iss. 22. P. 114–118.  
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>
5. *Cotterell B., Chen Z.* Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // Int. J. of Fracture. 2000. V. 104. Iss. 2. P. 169–179.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>
6. *Yu H.-H., Hutchinson J.W.* Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. of Fracture. 2002. V. 113. P. 39–55.  
<https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>
7. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // J. of the Mech.&Phys. of Solids. 2004. V. 52. Iss. 1. P. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
8. *Andrews M., Massabo R., Cox B.* Elastic interaction of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending // Int. J. of Solids&Struct. 2006. V. 43. Iss. 5. P. 855–886.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.025>
9. *Andrews M., Massabo R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Engng. Fracture Mech. 2007. V. 74. Iss. 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
10. *Ustinov K.B.* On shear separation of a thin strip from the half-plane // Mech. of Solids. 2014. V. 49. Iss. 6. P. 713–724.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654414060132>
11. *Ustinov K.B.* On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mech. of Solids. 2015. V. 50. Iss. 1. P. 62–80.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>
12. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings. Cambridge: Univ. Press, 2017. 288 p.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
13. *Thouless M.D.* Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // Engng. Fracture Mech. 2018. V. 191. P. 153–167.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>
14. *Barbieri L., Massabo R., Berggreen C.* The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams // Engng. Fracture Mech. 2018. V. 201. P. 298–321.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.06.039>
15. *Massabo R., Ustinov K.B., Barbieri L., Berggreen C.* Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates // Coatings. 2019. V. 9. Iss. 3. P. 152.  
<https://doi.org/10.3390/coatings9030152>
16. *Ustinov K.B.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // Europ. J. of Mech. A/Solids. 2019. V. 75. P. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
17. *Monetto I., Massabo R.* An analytical beam model for the evaluation of crack tip root rotations and displacements in orthotropic specimens // Frattura ed Integrita Strutt. 2020. V. 14. № 53. P. 372–393.  
<https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.29>

18. *Ustinov K., Massabo R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. of Solids&Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.  
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Engng. Failure Anal.* 2015. V. 47. P. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. *Устинов К.Б., Гандилян Д.В.* О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // *Вестн. Самар. ун-та. Естеств. сер.* 2024. Т. 30. № 1. С. 50–63.  
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
21. *Gorman D.J.* Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method // *J. of Sound&Vibr.* 1997. V. 207. P. 335–350.
22. *Du J.T., Li W.L., Jiu G.J., Yang T.J., Liu Z.G.* An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // *J. of Sound&Vibr.* 2009. V. 306. P. 908–927.
23. *Zhang H., Li W.L.* Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints // *J. of Sound&Vibr.* 2009. V. 326. P. 221–231.
24. *Dal H., Morque O.K.* Vibrations of elastically restrained rectangular plates // *Sci. Res.&Essays.* 2011. V. 6 (31). P. 6811–6816.
25. *Zhang H., Shi D., Wang Q.* An improved Fourier series solution for free vibration analysis of the moderately thick laminated composite rectangular plate with non-uniform boundary conditions // *Int. J. of Mech. Sci.* 2017. V. 121. P. 1–20.
26. *Gorman D.J.* Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational edge support // *J. of Sound&Vibr.* 2000. V. 225. P. 755–773.
27. *Miletić I., Miletić M.* The buckling analysis of a rectangular plate elastically clamped along the longitudinal edges // *Appl. Engng. Lett.* 2016. V. 1. № 1. P. 24–28.
28. *Miletić I., Miletić M., Milojević S., Ulewicz R., Nikolić R.* The buckling analysis of an elastically clamped rectangular plate // *Mobility&Vehicle Mech.* 2020. V. 48. № 1. P. 37–46.
29. *Chen J., Jin G., Liu Z.* Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary conditions // *Int. J. of Mech. Sci.* 2013. V. 74. P. 120–132.
30. *Karakosyan R.M., Stepanyan S.P.* Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support // *Proc. of the Yerevan State Univ.* 2017. V. 51. № 2. P. 168–176.
31. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
32. *Wau S.* Bending of circular plates with large deflection // *Trans. ASME.* 1934. V. 56. P. 627–633.
33. *Лычев С.А., Дигилов А.В., Ливоваров Н.А.* Изгиб кругового диска. От цилиндра к ультратонкой мембране // *Вестн. Самар. ун-та. Естеств. сер.* 2023. Т. 29. № 4. С. 77–105.  
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>  
<https://www.elibrary.ru/blerei>
34. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 590 с.
35. *Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Bespalov V.* Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment // *Symmetry MDPI.* 2024. V. 16(2). P. 137–163.  
<https://doi.org/10.3390/sym16020137>
36. *Lychev S., Digilov A.* Incompatible deformations in hyperelastic plates on influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Math. MDPI.* 2024. V. 12(4). P. 596–616.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
37. *Лычев С.А.* Несовместные деформации гибких пластин // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук.* 2023. Т. 165. № 4. С. 361–388.  
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>
38. *Дедкова А.А., Глаголев П.Ю., Гусев Е.Э., Дюжев Н.А., Киреев В.Ю., Лычев С.А., Товарнов Д.А.* Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных // *ЖТФ.* 2021. Т. 91. № 10. С. 1454–1465.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>

## Deformation of a Thin Circular Plate Fixed along the Contour to the Substrate

D. V. Gandilyan<sup>a, #</sup>, K. B. Ustinov<sup>a, ##</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: david.gandilyan@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

In the approximation of the Foppl–von Karman model, the problem of deformation of a circular plate coupled to a massive substrate along a contour coinciding with the boundary of a hole in the substrate under the action of a transverse load is solved. Boundary conditions of two types were considered: rigid and generalized elastic embedding. The solution is obtained in two ways: by decomposing into power series the transverse displacements and longitudinal forces represented in a cylindrical coordinate system, as well as by numerical integration of the Foppl–von Karman equations, with successive refinement of boundary conditions, similar to the “shooting method”. Expressions for the displacement components of a circular plate are obtained. The role played by the compliance of the substrate in changing the profile shape of the circular plate, the acting longitudinal forces and bending moments has been revealed. A comparison with other solutions has been made. The fields of applicability of the methods are investigated.

*Keywords:* thin plate, Foppl–von Karman equations, boundary conditions of the generalized elastic embedding type

### REFEENCES

1. Nanofabrication: Nanolithography Techniques and Their Applications / ed. by De Teresa J.-M. Bristol, England: IOP Pub. Ltd., 2020. 450 p.  
<https://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>
2. *Salashchenko N.N., Chkhalo N.I., Dyuzhev N.A.* Maskless X-ray lithography based on MOEMS and microfocus x-ray tubes // *Surface. X-ray, Synchrotron and Neutron Studies*, 2018, no. 10, pp. 10–20. (in Russian)  
<https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>
3. *Silverman J.P.* Challenges and progress in X-ray lithography // *J. of Vacuum Sci.&Technol. B*, 1998, vol. 16, iss. 6, pp. 31–37.  
<https://doi.org/10.1116/1.590452>
4. *Vladimirsky Y., Bourdillon A. et al.* Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction // *J. of Phys. D: Appl. Phys.*, 1999, vol. 32, iss. 22, pp. 114–118.  
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>
5. *Cotterell B., Chen Z.* Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // *Int. J. of Fracture*, 2000, vol. 104, iss. 2, pp. 169–179.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>
6. *Yu H.-H., Hutchinson J.W.* Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. of Fracture*, 2002, vol. 113, pp. 39–55.  
<https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>
7. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. of Mech.&Phys. of Solids*, 2004, vol. 52, iss. 1, pp. 193–214.  
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
8. *Andrews M., Massabo R., Cox B.* Elastic interaction of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending // *Int. J. of Solids&Struct.*, 2006, vol. 43, iss. 5, pp. 855–886.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.025>
9. *Andrews M., Massabo R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Engng. Fracture Mech.*, 2007, vol. 74, iss. 17, pp. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
10. *Ustinov K.B.* On shear separation of a thin strip from the half-plane // *Mech. of Solids*, 2014, vol. 49, iss. 6, pp. 713–724.

- <https://doi.org/10.3103/S0025654414060132>
11. *Ustinov K.B.* On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // *Mech. of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 1. pp. 62–80.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>
  12. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings*. Cambridge: Univ. Press, 2017. 288 p.  
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
  13. *Thouless M.D.* Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // *Engng. Fracture Mech.*, 2018, vol. 191, pp. 153–167.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>
  14. *Barbieri L., Massabo R., Berggreen C.* The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams // *Engng. Fracture Mech.*, 2018, vol. 201, pp. 298–321.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.06.039>
  15. *Massabo R., Ustinov K.B., Barbieri L., Berggreen C.* Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates // *Coatings*, 2019, vol. 9, iss. 3, pp. 152.  
<https://doi.org/10.3390/coatings9030152>
  16. *Ustinov K.B.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Europ. J. of Mech. A/Solids*, 2019, vol. 75, pp. 56–69.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
  17. *Monetto I., Massabo R.* An analytical beam model for the evaluation of crack tip root rotations and displacements in orthotropic specimens // *Frattura ed Integrita Strutt.*, 2020, vol. 14, no. 53, pp. 372–393.  
<https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.29>
  18. *Ustinov K., Massabo R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. of Solids&Struct.*, 2022, vol. 248, pp. 111600.  
<http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
  19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Engng. Failure Anal.*, 2015, vol. 47, pp. 338–344.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
  20. *Ustinov K.B., Gandilyan D.V.* On the boundary conditions for a thin circular plate conjugated to a massive body // *Vestn. of Samara Univ. Nat. Sci. Ser.*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 50–63. (in Russian)  
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
  21. *Gorman D.J.* Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method // *J. of Sound&Vibr.*, 1997, vol. 207, pp. 335–350.
  22. *Du J.T., Li W.L., Jiu G.J., Yang T.J., Liu Z.G.* An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // *J. of Sound&Vibr.*, 2009, vol. 306, pp. 908–927.
  23. *Zhang H., Li W.L.* Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints // *J. of Sound&Vibr.*, 2009, vol. 326, pp. 221–231.
  24. *Dal H., Morque O.K.* Vibrations of elastically restrained rectangular plates // *Sci. Re.&Essays*, 2011, vol. 6, no. 31, pp. 6811–6816.
  25. *Zhang H., Shi D., Wang Q.* An improved Fourier series solution for free vibration analysis of the moderately thick laminated composite rectangular plate with non-uniform boundary conditions // *Int. J. of Mech. Sci.*, 2017, vol. 121, pp. 1–20.
  26. *Gorman D.J.* Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational edge support // *J. of Sound&Vibr.*, 2000, vol. 225, pp. 755–773.
  27. *Miletić I., Miletić M.* The buckling analysis of a rectangular plate elastically clamped along the longitudinal edges // *Appl. Engng. Lett.*, 2016, vol. 1, no. 1, pp. 24–28.
  28. *Miletić I., Miletić M., Milojević S., Ulewicz R., Nikolić R.* The buckling analysis of an elastically clamped rectangular plate // *Mobil.&Vehicle Mech.*, 2020, vol. 48, no. 1, pp. 37–46.
  29. *Chen J., Jin G., Liu Z.* Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary conditions // *Int. J. of Mech. Sci.*, 2013, vol. 74, pp. 120–132.
  30. *Karakosyan R.M., Stepanyan S.P.* Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support // *Proc. of the Yerevan State Univ.*, 2017, vol. 51, no. 2, pp. 168–176.
  31. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959. 580 p.

32. *Way S.* Bending of circular plates with large deflection // *Trans. ASME*, 1934, vol. 56, pp. 627–633.
33. *Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A.* Bending of a circular disk: from cylinder to ultra-thin membrane // *Vestn. of Samara Univ. Natural Sci. Ser.*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 77–105. (in Russian)  
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>  
<https://www.elibrary.ru/blerei>
34. *Galanin M.P., Savenkov E.B.* *Methods of Numerical Analysis of Mathematical Models*. Moscow: BMSTU Pub., 2010. 590 p. (in Russian)
35. *Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Bespalov V.* Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment // *Symm. MDPI*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 137–163.  
<https://doi.org/10.3390/sym16020137>
36. *Lychev S., Digilov A.* Incompatible deformations in hyperelastic plates on influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Math. MDPI*, 2024, vol. 12, no. 4, pp. 596–616.  
<http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
37. *Lychev S.A.* Incompatible deformations of flexible plates // *Sci. Notes of Kazan Univ. Ser. Phys.&Math. Sci.*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 361–388. (in Russian)  
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>
38. *Dedkova A.A., Glagolev P.Yu., Gusev E.E., Dyuzhev N.A., Kireev V.Yu., Lychev S.A., Tovarnov D.A.* Features of deformation of round thin-film membranes and experimental determination of their effective // *J. of Tech. Phys.*, 2021, vol. 91, no. 10, pp. 1454–1465. (in Russian)  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>