

УДК 539.4

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ МОДУЛЯ ЮНГА  
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА**© 2025 г. А. О. Ватульян<sup>1,\*</sup>, В. В. Дударев<sup>1,\*\*</sup>, Р. М. Мнухин<sup>1,\*\*\*</sup>*<sup>1</sup>Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,  
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия**\*e-mail: aovatulyan@sfnedu.ru,**\*\*e-mail: dudarev\_vv@mail.ru,**\*\*\*e-mail: romamnuhin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.10.2024 г.

После доработки 12.01.2025 г.

Принята к публикации 12.01.2025 г.

В работе рассмотрена задача о максимизации значения первой собственной частоты для функционально-градиентного материала в зависимости от закона изменения модуля Юнга. При этом предполагается, что имеется ограничение на среднее интегральное значение модуля Юнга. Используя метод конечных элементов для численного решения двумерной осесимметричной задачи о свободных колебаниях цилиндра, показано влияние переменных свойств материала на значение первой собственной частоты. С помощью методов вариационного исчисления на основе общей постановки задачи для неоднородного упругого изотропного тела получено условие оптимальности. Отмечено, что левая часть этого условия имеет квадратичную форму. В общем случае задача поиска оптимального закона изменения модуля Юнга является существенно нелинейной и для ее решения необходимо использовать специальные численные методы. Используя полученное условие оптимальности, рассмотрены три частные задачи: об изгибных колебаниях круглой сплошной пластины, продольных колебаниях стержня и радиальных колебаниях сплошного тонкого диска с учетом соответствующих гипотез. Для всех задач получены оптимальные законы изменения модуля Юнга и функции перемещения в аналитическом виде. В частности, в задаче для диска предложено представление для радиальной компоненты поля перемещения, которое описывается линейным законом. Показано, что в этом случае соответствующие радиальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений равны между собой. Из уравнения движения и граничного условия на внешней границе найдена искомая функция изменения модуля Юнга по радиальной координате в аналитическом виде. Получено аналитическое выражение для определения значения собственной частоты, соответствующее найденному решению. Проведена оценка точности этой формулы путем сравнения с численным решением, полученным с помощью метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Проведено сравнение значений собственной частоты для диска из однородного и неоднородного материала.

*Ключевые слова:* цилиндр, стержень, пластина, диск, функционально-градиентный материал, метод конечных элементов, модуль Юнга, оптимизация, собственная частота

**1. Введение.** Одними из современных материалов являются функционально-градиентные материалы (ФГМ). Главной особенностью ФГМ является изменение его свойств по пространственным координатам по определенным законам. Характер их изменения зависит от специфики конкретной практической задачи для ФГ объекта. Одним из преимуществ ФГМ по сравнению с обычными многослойными композициями является существенное снижение вероятности появления различных дефектов типа расслоения или трещин [1, 2]. В зависимости от составляющих ФГМ используются в машиностроении, электротехнике, акустике, биомеханике и т.п. [3–5]. Также находят применение многофазные материалы с переменными свойствами, которые изменяются по всему объему тела [6, 7]. Например, в биомедицине используются материалы с градиентной пористостью, которые позволяют уменьшать вес и плотность имплантата, сохраняя при этом оптимальные значения модуля упругости.

В связи со стремительным развитием аэрокосмической промышленности, судостроения и биомедицины количество работ, посвященных проблемам оптимизации конструкций, неуклонно растет в течение последних 50 лет. Переход от решения одномерных задач к рассмотрению более общих вопросов оптимального управления стал возможен во многом благодаря развитию аппарату математических методов оптимизации и ЭВМ. Тем не менее, большинство работ в области оптимального проектирования посвящено вопросам отыскания оптимальных и равнопрочных форм и структуры упругих тел, что, в свою очередь, приводит к рассмотрению задач минимизации веса и оптимизации их механических характеристик [8–10]. Представляют интерес не только прикладные приложения проблем оптимизации конструкций, но и теоретические вопросы. Исследование новых классов задач, учет различных механических характеристик, разработка эффективных методов оптимизации, а также решение возникающих нелинейных задач механики ставят перед современным исследователем серьезные вызовы.

В инженерных приложениях, связанных с проектированием неоднородных структур, оценка собственных частот играет важную роль. Основное внимание часто уделяется максимизации первой собственной частоты для снижения риска появления раннего резонанса. Так, в работах [11, 12] рассматривается задача максимизации первой собственной частоты для многослойных структур из ламинированного композита в зависимости от угла ориентации волокон на каждом слое. В статье [11] исследована прямоугольная пластина, расчеты проведены в КЭ-пакете Abaqus с помощью метода Байесовской оптимизации. В работе [12] рассмотрена цилиндрически изогнутая панель, для вывода частотного уравнения используется метод Ритца, авторами продемонстрирована точность и эффективность предложенной численной схемы. В отличие от [11, 12] в работе [13] вместо использования угла ориентации волокон на каждом слое в качестве проектных переменных используются так называемые параметры ламинирования. Для нахождения максимальной собственной частоты использовались градиентные методы, а для нахождения оптимальной последовательности укладки – генетические алгоритмы. Численные расчеты осуществлены для пластины и цилиндра при различных значениях геометрических характеристик. Проведено сравнение с аналитическими решениями из литературы. Авторами статьи [14] предложен новый подход к оптимизации поперечных сечений экструдированных балок с целью максимизации их первой собственной частоты колебаний с учетом ограничений на массу и статическую податливость. Задача оптимизации формулируется с использованием метода пенализации для твердого изотропного тела (Solid Isotropic Material with Penalisation method, SIMP). Для расчета собственных частот используется расширенный метод конечных элементов (eXtended Finite Element Method, XFEM). Одним из перспективных направлений задач оптимизации конструкций является многоцелевая оптимизация. В статье [15] представлена одновременная оптимизация геометрических и материальных характеристик ФГ оболочки двойной

кривизны под действием статической нагрузки, находящейся в режиме свободных колебаний. Оболочка состоит из металла и керамики, а ее свойства изменяются по толщине. Процесс оптимизации заключается в поиске оптимальных значений параметров геометрии оболочки (кривизны срединной поверхности в двух направлениях) и параметра градиентности свойств. При этом целевые функции минимизируют массу и нормализованное смещение и максимизируют первую собственную частоту.

Как было указано выше, одной из важных задач вибрационного контроля объектов ответственного назначения является проектирование конструкций таким образом, чтобы собственные частоты находились как можно дальше от частот возбуждения. В работах [16–20] рассматривается другой подход, целью которого является исследование возможности использования метода оптимизации топологии для максимального разделения двух соседних собственных частот. Так, в работе [16] рассмотрен одномерный и двумерный случай продольных гармонических колебаний упругого стержня из периодического двукомпонентного материала (полиметилметакрилат (ПММА) и алюминий). Процедура оптимизации основана на КЭ-анализе. Для разнесения значений собственных частот используются две разные формулировки: в первой максимизируется разница в частотах, во второй максимизируется отношение двух соседних собственных частот. В статьях [18, 19] решаются задачи максимизации собственной частоты или разницы значений двух собственных частот для конкретных объектов. В работе [18] представлено несколько примеров решений, демонстрирующих эффективность разработанного итерационного метода. В частности, показано, что благодаря найденной оптимальной геометрии элемента конструкции можно смещать значение собственной частоты вдаль от заданной частоты внешнего возбуждения. Для задачи о максимизации разницы значений между второй и третьей собственными частотами метод позволяет получить решение для малого числа итераций. В работе [19] представлено исследование нелинейной задачи оптимизации о свободных колебаниях объекта из вязкоупругого материала. При этом в определяющем соотношении для напряжений и деформаций используется частотно-зависимый комплексный модуль. Для решения задачи предложен итерационный подход, основанный на асимптотическом и численном методах. Представлены результаты расчетов продольного сечения вязкоупругой балки на шарнирах и консольной вязкоупругой пластины. Численные примеры показывают, что разработанный метод обеспечивает устойчивую сходимость итерационного процесса оптимизации, также отмечена важность учета частотно-зависимых членов.

Одним из эффективных способов, позволяющих не допускать проявление резонанса в рабочем частотном диапазоне, является изменение значений собственных частот конструкции. Авторами [20] предложена модель оптимизации собственных значений, учитывающая влияние свойств материала и геометрические размеры объекта. Для уменьшения вычислительных затрат использован метод смещения ограниченной полосы частот (*frequency-band constraint shifting method, FBCSM*). Представлены результаты численных экспериментов для пластин с различной геометрией и граничными условиями.

Одними из широко используемых конструктивных элементов являются цилиндрические структуры. Обычно они встречаются в задачах акустики, гидравлики, термоупругости и механики деформируемого твердого тела. При этом для каждой конкретной задачи важное значение имеет выбор направления изменения свойств материала цилиндра. Современное высокотехнологичное производство позволяет изготавливать цилиндры с радиальной, продольной или радиально-продольной неоднородностью. При этом важной задачей является исследование влияния определенного закона изменения свойств цилиндра на его характеристики, например, акустические, температурные, прочностные и т.д. В свою очередь, появление и развитие ФГМ, свойства которых изменяются по определенным законам, привело

к исследованию нового класса задач оптимизации упругих свойств цилиндрических объектов из таких материалов [24–27]. Так, в работе [24] проведен анализ гармонических колебаний неоднородных по толщине дисков в осесимметричной постановке. Рассмотрена задача оптимизации формы, а в случае неосесимметричной постановки задача решена численно с помощью итерационного метода. Статьи [25, 26] посвящены исследованию колебаний оболочек из армированного волокнами композита. В работе [25] рассмотрена коническая оболочка переменной жесткости, построено оптимальное распределение, доставляющее максимум первой собственной частоте, проведено сравнение полученного решения с оболочками с постоянной жесткостью. В статье [26] исследована цилиндрическая оболочка, для которой осуществлена оптимизация несущей способности при изгибе. Ограничения на глобальную жесткость накладываются путем сравнения с квазиизотропной оболочкой. Результаты численных расчетов показывают улучшение несущей способности цилиндра до 17%, которое достигается за счет изменения направления приложения нагрузки. В работе [26] рассмотрена задача об установившихся колебаниях предварительно напряженной неоднородной круглой упругой пластины в осесимметричной постановке. Решена задача поиска оптимального распределения упругого модуля пластины и соответствующей формы колебаний. Определен диапазон изменения значений начального напряжения, для которого построены оптимальные законы неоднородности функции жесткости.

В настоящей работе рассматривается новая задача о максимизации значения первой собственной частоты в зависимости от закона изменения модуля Юнга. С помощью методов вариационного исчисления на основе общей постановки задачи для неоднородного упругого изотропного тела получено условие оптимальности, характеризующее квадратичной формой компонент тензора деформаций. На его основе рассмотрена одномерная задача для сплошного круглого диска. Из уравнения движения и граничного условия на внешней границе аналитически найдена искомая функция изменения модуля Юнга, зависящая от радиальной координаты. Получена формула для определения максимального значения первой собственной частоты при заданном ограничении на среднее интегральное значение модуля Юнга. Проведена оценка точности этой формулы путем сравнения с численным решением, полученным с помощью метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Осуществлено сравнение с однородным случаем.

**2. Прямая задача.** Общая постановка задачи о свободных колебаниях упругого изотропного неоднородного тела может быть записана в тензорном виде [28–30]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma} &= E(M\boldsymbol{\theta}\mathbf{E} + N\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \theta = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \odot \mathbf{E} \\ \mathbf{u}|_{S_u} &= 0, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\rho$  – постоянная плотность,  $\omega$  – круговая частота колебаний,  $\mathbf{u}$  – вектор смещений,  $E$  – переменный модуль Юнга,  $\nu$  – постоянный коэффициент Пуассона,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор,  $M = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $N = \frac{1}{1+\nu}$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела  $S = S_u \cup S_\sigma$ .

На основе этой постановки рассмотрим задачу об осесимметричных свободных колебаниях сплошного цилиндра высоты  $h$  и радиуса  $R$ . Цилиндр изготовлен из функционально-градиентного материала, модуль Юнга которого изменяется по ра-

диальной или продольной координатам. В этом случае уравнения колебаний и определяющие соотношения в цилиндрической системе координат примут вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_r &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho \omega^2 u_z &= 0 \\
 \sigma_{rr} = E(N\varepsilon_{rr} + M\theta), \sigma_{\varphi\varphi} = E(N\varepsilon_{\varphi\varphi} + M\theta) \\
 \sigma_{zz} = E(N\varepsilon_{zz} + M\theta), \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = EN\varepsilon_{zr} \\
 \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $u_r = u_r(r, z)$ ,  $u_z = u_z(r, z)$  – компоненты вектора смещений  $\mathbf{u}$  в радиальном и продольном направлениях соответственно ( $u_\varphi = 0$ ). Граничные условия, описывающие наличие скользящих заделок на торцах цилиндра и отсутствие нагрузок на боковой поверхности, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_z = 0, \sigma_{rz} = 0; \quad r \in [0, R], z = \pm h/2 \\
 \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0; \quad r = R, z \in [-h/2, h/2]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для определенности рассмотрим цилиндр радиуса  $R = 1$  м и высоты  $h = 4$  м, изготовленный из функционально-градиентного материала – алюминий – оксид алюминия ( $\text{Al}-\text{Al}_2\text{O}_3$ ). В случае радиально-неоднородного материала внутренняя часть цилиндра ( $r = 0$ ) изготовлена из алюминия: модуль Юнга  $E_{\text{Al}} = 0.68 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{Al}} = 0.36$ , плотность  $\rho_{\text{Al}} = 0.893 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>. Внешняя часть ( $r = R$ ) изготовлена из оксида алюминия: модуль Юнга  $E_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 3.7 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 0.22$ , плотность  $\rho_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 0.396 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>. Значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности  $\rho$  взяты из открытых данных, размещенных на сайте <http://www.matweb.com>.

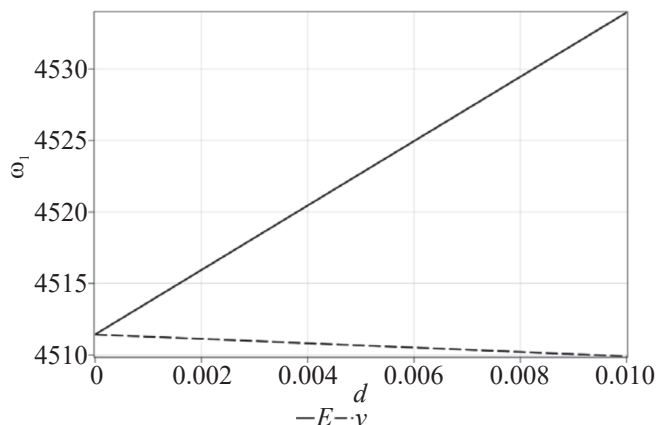
В качестве законов изменения переменных параметров рассмотрены экспоненциальные законы

$$E(r) = 6.8 \cdot 10^{10} e^{1.694r}, \nu(r) = 0.36e^{-0.492r}, \rho(r) = 8.93 \cdot 10^3 e^{-0.813r} \tag{2.4}$$

Значения коэффициентов этих функций с точностью до третьего знака после запятой определялись из условий равенства значений модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности на границах области соответствующим параметрам алюминия ( $E_{\text{Al}}, \nu_{\text{Al}}, \rho_{\text{Al}}$ ) и оксида алюминия ( $E_{\text{Al}_2\text{O}_3}, \nu_{\text{Al}_2\text{O}_3}, \rho_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ ).

При исследовании задачи об определении характеристики материала в рамках акустического подхода важной частью исследования является анализ ее влияния на акустические свойства (анализ чувствительности) [31, 32]. По аналогии с работой [33] проведем анализ влияния переменных параметров, входящих в закон Гука. Для этого введем в рассмотрение формальный параметр  $d$ , величина которого характеризует амплитудное значение модуля Юнга и коэффициента Пуассона:

$$E_d(r) = (1 + d)E(r), \nu_d(r) = (1 + d)\nu(r), \tag{2.5}$$



**Рис. 1.** Графики изменения первой собственной частоты  $\omega_1$  при изменении амплитудных значений законов изменения модуля Юнга  $E$  (сплошная линия) и коэффициента Пуассона  $\nu$  (пунктирная линия)

где параметр  $d$  принимает значения 0; 0.001; 0.004; 0.007; 0.01. Плотность принята постоянной средней величиной  $\rho = (\rho_{Al} + \rho_{Al_2O_3})/2$ . В численных экспериментах фиксируется закон изменения модуля Юнга или коэффициента Пуассона (2.4), а незафиксированный параметр изменяется по правилу (2.5). Для наглядности значения первой собственной частоты  $\omega_1$ , полученные при различных значениях параметра  $d$ , представлены в виде графика на рис. 1.

Из представленных данных видно, что из двух параметров  $E$  и  $\nu$ , входящих в закон Гука, законы изменения модуля Юнга оказывают значительно большее влияние на значения первой собственной частоты рассматриваемого объекта, чем законы изменения коэффициента Пуассона. Поэтому с практической точки зрения в первую очередь интерес вызывают задачи об отыскании закона изменения  $E$ .

**3. Задача оптимизации.** Рассмотрим задачу оптимизации об определении оптимального закона распределения модуля  $E$ , при котором достигается максимальное значение первой собственной частоты. При этом считается, что есть ограничение на среднее интегральное значение, которое записывается в виде

$$\frac{1}{V} \int_V E dV = \tilde{E}, \tag{3.1}$$

величина  $\tilde{E}$  предполагается заданной.

Составим соотношение Рэлея в общем тензорном виде, представляющее собой отношение потенциальной энергии к кинетической:

$$\omega^2 = \frac{\int_V \boldsymbol{\sigma} \odot \boldsymbol{\varepsilon} dV}{\int_V \rho \mathbf{u}^2 dV} = \frac{\int_V E (M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}) dV}{\int_V \rho \mathbf{u}^2 dV} \tag{3.2}$$

Для оптимизации значения собственной частоты с учетом изопериметрического условия (3.1) составим расширенный функционал Лагранжа

$$J = \frac{\int_V E (M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}) dV}{\int_V \rho \mathbf{u}^2 dV} + \lambda \left( \frac{1}{V} \int_V E dV - \tilde{E} \right) \tag{3.3}$$

Варьируем функционал (3.3)

$$\delta J = \frac{\left( \int_V \delta E (M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}) dV + \int_V E (M2\theta\delta\theta + 2N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV \right) \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV}{\left( \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV \right)^2} - \frac{\int_V E (M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}) dV 2 \int_V \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} dV}{\left( \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV \right)^2} + \lambda^* \int_V \delta E dV,$$

где  $\lambda^* = \lambda / V$ .

Откуда выражение с вариацией  $\delta E$

$$\int_V \left( \frac{M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}}{\int_V \rho \mathbf{u}^2 dV} + \lambda^* \right) \delta E dV = 0 \quad (3.4)$$

Из соотношения (3.4) следует, что

$$M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon} = \text{const} \quad (3.5)$$

Или в покомпонентном виде:

$$M \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + N \left( \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right) = \text{const}$$

Следует отметить, что левая часть полученного условия оптимальности (3.5) представляет собой квадратичную форму компонент тензора деформации. На основе (3.4) и (3.5) можно получить соответствующие условия для задач оптимизации для стержня и круглой пластины, что будет продемонстрировано далее.

Упрощая оставшиеся слагаемые в выражении (3.3)

$$\frac{\int_V E (M2\theta\delta\theta + 2N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV - \int_V E (M\theta^2 + N\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon}) dV 2 \int_V \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} dV}{\left( \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV \right)^2} = 0,$$

используя технику, описанную в работе [34], граничные условия и основную лемму вариационного исчисления, можно получить уравнение колебаний (2.1).

Следует отметить, что в общем случае сформулированная задача является существенно нелинейной и для ее решения необходимо использовать специальные численные методы. С другой стороны, для некоторых частных случаев можно получить аналитические решения. В качестве демонстрации ниже рассмотрены три примера для тонкой круглой пластины, стержня и тонкого сплошного диска.

*Пример 1.* В цилиндрической системе координат отличные от нуля компоненты вектора перемещения для задачи о свободных осесимметричных изгибных колебаниях тонкой упругой изотропной круглой пластины ( $h / R \ll 1$ ) имеют вид [8, 27]

$$u_r = -zw'(r), u_z = w(r) \quad (3.6)$$

Выпишем определяющие соотношения, используя представления (3.6),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= -zw'', \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -zw' / r, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \\ \theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = -z(w'' + w' / r), \quad \theta^2 = z^2(w'' + w' / r)^2 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 = z^2\left((w'')^2 + (w' / r)^2\right) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2}\mathbf{E}\theta + \frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\varepsilon} = E(\tilde{M}\mathbf{E}\theta + N\boldsymbol{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\tilde{M} = \frac{\nu}{1-\nu^2}$ .

Рассмотрим (3.4) с учетом соотношений (3.6)–(3.7) для пластины

$$\frac{\nu}{1-\nu^2}\left(w'' + \frac{w'}{r}\right)^2 + \frac{1}{1+\nu}\left((w'')^2 + \left(\frac{w'}{r}\right)^2\right) = \text{const}$$

После упрощений получаем условие оптимальности для круглой пластины в виде [27]

$$(w'')^2 + 2\nu w'' \frac{w'}{r} + \left(\frac{w'}{r}\right)^2 = a^2, \quad (3.8)$$

где  $a$  – некоторая константа. С учетом главных граничных условий  $w'(0) = 0$ ,  $w(R) = 0$  можно получить решение для оптимальной формы колебаний

$$w_{\text{opt}}(r) = -\frac{a\sqrt{2}(R^2 - r^2)}{2\sqrt{\nu + 1}}$$

Соответствующее оптимальное изменение цилиндрической жесткости, прямо пропорциональной модулю Юнга  $E(r)$ , на основе уравнения колебаний и граничных условий, описывающих шарнирное опирание, получено в работе [27] в виде

$$D_{\text{opt}}(r) = \frac{3}{4}D_0 \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^4 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 3 \right],$$

где  $D_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R D(r)r dr$  – заданное среднее интегральное значение величины  $D$ . При этом значение первой собственной частоты определяется по формуле

$$\omega_{\text{opt}}^2 = \frac{24(1+\nu)D_0}{\rho R^4 h}$$

*Пример 2.* Рассмотрим задачу о свободных продольных колебаниях стержня ( $h/R \gg 1$ ), левый край которого жестко зашпелен. Используя закон Гука для стержня и формулу (3.5), получим условие оптимальности в виде

$$(w')^2 = \text{const}, \quad (3.9)$$

где  $u_z = w(z)$  – функция продольного смещения. В качестве решения можно рассмотреть линейный закон

$$w_{\text{opt}}(z) = Cz,$$



где  $C$  – константа. При этом удовлетворяется граничное условие на левом конце  $w(0) = 0$ . На основе найденного решения, уравнения продольных колебаний, граничного условия на правом конце и заданного среднего интегрального значения модуля Юнга  $E_0 = \frac{1}{h} \int_0^h E(z) dz$ , следуя технике [35], можно получить соответствующий оптимальный закон изменения модуля Юнга и формулу для вычисления первой собственной частоты

$$E_{\text{opt}}(z) = \frac{3}{2} E_0 \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \omega_{\text{opt}}^2 = \frac{3E_0}{\rho h^2}$$

*Пример 3.* Рассмотрим одномерную задачу о радиальных колебаниях сплошного тонкого диска ( $h / R \ll 1$ ). Ненулевую радиальную компоненту вектора перемещений обозначим следующим образом  $u_r = u(r)$ . Выпишем уравнение колебаний и определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_r &= 0 \\ \sigma_{rr} &= E(N\varepsilon_{rr} + M\theta), \sigma_{\varphi\varphi} = E(N\varepsilon_{\varphi\varphi} + M\theta) \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя соотношение (3.5), получаем условие оптимальности в виде

$$M \left( u' + \frac{u}{r} \right)^2 + N \left( (u')^2 + \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right) = a^2 = \text{const} \quad (3.11)$$

Если рассмотрение задачи проводить в рамках обобщенного плоского напряженного состояния, то следует заменить  $M$  на  $\tilde{M}$ .

Решение уравнения (3.11) с учетом граничного условия  $u(0) = 0$  можно найти в виде линейной функции

$$u_{\text{opt}}(r) = C_1 r \quad (3.12)$$

Получим выражения для компонент напряжений из (3.10) с учетом решения для функции смещения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= E(r) \left( (M + N)u' + M \frac{u}{r} \right) = E(r) \left( (M + N)C_1 + MC_1 \right) = C_1 (2M + N) E(r) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= E(r) \left( (M + N) \frac{u}{r} + Mu' \right) = E(r) \left( (M + N)C_1 + MC_1 \right) = C_1 (2M + N) E(r) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Видно, что для рассматриваемого решения  $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$ . Уравнение движения представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно модуля Юнга  $E(r)$

$$C_1 (2M + N) E'(r) + \rho \omega^2 C_1 r = 0$$

Откуда можно сначала получить выражение для  $E'$ , а затем, путем интегрирования, и для функции  $E$

$$E(r) = -\frac{\rho \omega^2}{2M + N} \frac{r^2}{2} + \tilde{B} = \tilde{A} r^2 + \tilde{B},$$

где  $\tilde{A} = -\frac{\rho\omega^2}{2(2M + N)} < 0$ , а  $\tilde{B}$  – константа интегрирования.

Следует отметить, что граничное условие на внутренней границе выполняется за счет выбора искомого решения в виде (3.12), в свою очередь, выполнение граничного условия для напряжения на внешней границе можно формально обеспечить за счет выбора закона изменения модуля Юнга на внешней границе.

Тогда можно найти константу  $\tilde{B}$

$$\tilde{B} = -\tilde{A}R^2$$

С учетом этого выражения закон изменения  $E(r)$  примет вид

$$E(r) = \tilde{A}(r^2 - R^2) \geq 0 \tag{3.14}$$

Чтобы найти искомую максимальную первую собственную частоту необходимо воспользоваться изопериметрическим условием для модуля Юнга (3.1), которое в рассматриваемом случае записывается в виде  $\tilde{E} = \frac{2}{R^2} \int_0^R E(r)r dr$ . Подставляя полученное решение (3.14) в (3.1), с учетом представления для константы  $\tilde{A}$  получим

$$\omega_{\text{opt}}^2 = \frac{4\tilde{E} 2M + N}{R^2 \rho} = \frac{4\tilde{E}}{R^2} \frac{1}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \tag{3.15}$$

При этом соответствующий оптимальный закон изменения модуля Юнга примет вид

$$E_{\text{opt}}(r) = 2\tilde{E} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \tag{3.16}$$

Полученное соотношение (3.15) позволяет аналитически определять максимальную первую собственную частоту по заданному среднему интегральному значению модуля Юнга, радиусу диска, плотности и коэффициенту Пуассона.

Ниже представлены примеры расчетов для диска.

Радиус диска принят равным  $R = 1$  м, коэффициент Пуассона и плотность определялись как соответствующие средние значения  $\nu = (\nu_{\text{Al}} + \nu_{\text{Al}_2\text{O}_3})/2 = 0.29$  и  $\rho = (\rho_{\text{Al}} + \rho_{\text{Al}_2\text{O}_3})/2 = 6.445 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Для определенности при проведении расчетов среднее интегральное значение модуля Юнга было выбрано в виде  $\tilde{E} = (E_{\text{Al}} + E_{\text{Al}_2\text{O}_3})/2 = 2.19E_*$ , где  $E_* = 10^{11}$  Па. Для сравнения также были рассмотрены пять неоднородных законов изменения модуля Юнга  $E_i(r) = f_i(r)E_*$ , удовлетворяющих условию (3.1):

$$\begin{aligned} f_1(r) &= 1 + 1.785r, f_2(r) = 1 + 2.38r^2, f_3(r) = 3 - 2.025r^3 \\ f_4(r) &= 1 + 2.572\cos\left(\frac{\pi r}{2}\right), f_5(r) = 5 - 1.405\exp(r) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Стоит отметить, что аналитическое значение (3.15) с точностью до погрешности вычислений совпало со значением  $\omega_1$ , полученным в пакете FlexPDE и представленным во второй строке табл. 1, что подтверждает точность расчетов с помощью МКЭ. Эффективность оптимального решения в процентном соотношении, вычисленная по формуле

**Таблица 1.** Значения первой собственной частоты для различных законов изменения модуля Юнга

Закон изменения модуля Юнга	$\omega_1$ , Гц	$\Delta_\omega$ , %
$E_{opt}(r)$	15838.76	12.27
$\tilde{E}$	14107.57	—
$E_1(r)$	12948.26	8.22
$E_2(r)$	12232.93	13.29
$E_3(r)$	15183.98	7.63
$E_4(r)$	15381.14	9.03
$E_5(r)$	15213.40	7.84

$$\Delta_\omega = \left| \omega_1 - \tilde{\omega}_1 \right| / \tilde{\omega}_1 \cdot 100\%, \quad (3.18)$$

представлена в третьем столбце табл. 1. Здесь  $\tilde{\omega}_1$  – первая собственная частота для постоянного среднего значения модуля Юнга  $\tilde{E}$ . Из полученных результатов видно, что для оптимального закона  $E_{opt}(r)$  действительно достигается максимальная собственная частота.

Для верификации полученных данных, также были построены графики формы колебаний  $u(r)$  для закона  $E_{opt}(r)$ , соответствующие расчетам в пакете FlexPDE и аналитической формуле (3.12). Аналогично построены графики компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}(r)$ . В силу особенности на левой границе  $r = 0$  сравнение результатов осуществлялось на подобласти  $r \in [0.03, R]$ . Отмечено, что для всех графиков наблюдается совпадение с точностью до погрешности вычислений.

**Заключение.** На примере численного решения задачи о свободных осесимметричных колебаниях сплошного цилиндра показано, что закон изменения модуля Юнга существенно больше влияет на значение первой собственной частоты, чем закон изменения коэффициента Пуассона. Рассмотрена задача о максимизации значения первой собственной частоты в зависимости от закона изменения модуля Юнга при заданном ограничении на его среднее интегральное значение. Для построения решения составлен расширенный функционал Лагранжа. Используя методы вариационного исчисления, получено в общем виде условие оптимальности, характеризующее квадратичной формой компонент тензора деформаций. Отмечено, что в общем случае сформулированная задача оптимальности является существенно нелинейной и для ее решения необходимо использовать специальные методы. С другой стороны, на примере трех частных задач показано, что решение может быть получено в аналитическом виде. Представлены основные результаты для задач о продольных колебаниях стержня и изгибных колебаниях тонкой круглой пластины. Описано подробное решение задачи о радиальных колебаниях сплошного тонкого диска на основе полученного условия оптимальности. Предложено представление функции радиального смещения, которая описывается линейным законом. Искомая оптимальная функция изменения модуля Юнга и соответствующее ей выражение для нахождения максимального значения первой собственной частоты получены в аналитическом виде. Проведена оценка точности полученных формул путем сравнения с численными результатами, полученными с помощью метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Проведено сравнение значений первой собственной частоты для диска из однород-

ного и неоднородного материала, у которого законы изменения модуля Юнга удовлетворяют изопериметрическому условию.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. London: IOM Commun. Ltd., 1998. 165 p.
2. *Birman V., Byrd L.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* 2007. V. 60. № 5. P. 195–216.  
<https://www.doi.org/10.1115/1.2777164>
3. *Kieback B., Neubrand A., Riedel H.* Processing techniques for functionally graded materials // *Mater. Sci. Eng., A.* 2003. V. 362. № 1–2.  
[https://www.doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://www.doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
4. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // *Appl. Materials Today.* 2016. V. 5. P. 223–245.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
5. *Селяев В.П., Карташов В.А., Клементьев В.Д., Лазарев А.Л.* Функционально-градиентные композиционные строительные материалы и конструкции. Саранск: Мордовский государственный ун-т им. Н.П. Огарева, 2005. 160 с.
6. *Saleh B., Jiang J., Fathi R. et al.* 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, applications and future challenges // *Composites, Pt. B.* 2020. V. 201. Art. No. 108376.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
7. *Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S. et al.* State of the art in functionally graded materials // *Compos. Struct.* 2021. V. 262. Art. No. 113596.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
8. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций: Вопросы вибрации и потери устойчивости. Механика. Новое в зарубежной науке: Сб. статей. Вып. 27. М.: Мир, 1981. 277 с.
9. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
10. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 304 с.
11. *Yang S.T., Liang Y.J.* Stacking sequence optimization of composite laminates for maximum fundamental frequency using Bayesian optimization computational framework // *Results in Engng.* 2024. V. 23. Art. No. 102586.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.rineng.2024.102586>
12. *Narita Y., Robinson P.* Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization // *Int. J. of Mech. Sci.* 2006. V. 48. № 12. P. 1516–1524.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.06.008>
13. *Trias D., Maimí P., Blanco N.* Maximization of the fundamental frequency of plates and cylinders // *Compos. Struct.* 2016. V. 156. P. 375–384.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.034>
14. *Marzok A., Waisman H.* Topology optimization of extruded beams modeled with the XFEM for maximizing their natural frequencies // *Mech. Res. Commun.* 2024. V. 135. Art. No. 104234.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104234>
15. *Kamgar R., Rahmani F., Rahgozar R.* Geometrical and material optimization of the functionally graded doubly-curved shell by metaheuristic optimization algorithms // *Structures.* 2024. V. 62. Art. No. 106254.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106254>
16. *Jensen J.S., Pedersen N.L.* On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1D and 2D scalar cases // *J. of Sound&Vibr.* 2006. V. 289. № 4–5. P. 967–986.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.03.028>

17. *Du J., Olhoff N.* Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps // *Struct.&Multidisc. Optimiz.* 2007. V. 34. P. 91–110.  
<https://www.doi.org/10.1007/s00158-007-0101-y>
18. *Sun J., Tian Q., Hu H., Pedersen N.L.* Topology optimization for eigenfrequencies of a rotating thin plate via moving morphable components // *J. of Sound&Vibr.* 2019. V. 448. P. 83–107.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.054>
19. *Li Q., Wu Q., Dou S. et al.* Nonlinear eigenvalue topology optimization for structures with frequency-dependent material properties // *Mech. Syst.&Signal Proc.* 2022. V. 170. Art. No. 108835.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.108835>
20. *Meng Z., Yang G., Wu Q. et al.* Reliability-based topology optimization for fundamental frequency maximization with frequency band constraints // *Mech. Syst.&Signal Proc.* 2023. V. 195. Art. No. 110295.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ymsp.2023.110295>
21. *Bachour R.S., Nicoletti R.* Natural frequencies and band gaps of periodically corrugated beams // *J. of Vibr.&Acoust.* 2021. V. 143. № 4. Art. No. 044502.  
<https://www.doi.org/10.1115/1.4048889>
22. *Shi J., Wang W., Fan Y. et al.* Creating absolute band gap based on frequency locking of three wave modes in a wavy plate // *J. of Sound&Vibr.* 2024. V. 592. Art. No. 118623.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118623>
23. *Zhou L., Han W., Wan S.* Low frequency band gap for box girder attached IDVAs // *Thin-Walled Struct.* 2022. V. 174. Art. No. 109088.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.tws.2022.109088>
24. *Niordson F.* Optimal disks in vibration // *Int. J. of Solids&Struct.* 1997. V. 34. № 23. P. 2957–2968.  
[https://www.doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00186-8](https://www.doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00186-8)
25. *Blom A.W., Setoodeh S., Hol J.M.A.M., Gurdal Z.* Design of variable-stiffness conical shells for maximum fundamental eigenfrequency // *Comput.&Struct.* 2008. V. 86. № 9. P. 870–878.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.04.020>
26. *Blom A.W., Stickler P.B., Gurdal Z.* Optimization of a composite cylinder under bending by tailoring stiffness properties in circumferential direction // *Compos. Pt. B: Engng.* 2010. V. 41. № 2. P. 157–165.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.10.004>
27. *Ватульян А.О., Недин Р.Д.* Об одной задаче оптимизации для преднапряженной пластины с переменной жесткостью // *Пробл. прочн. и пластич.* 2024. Т. 86. № 2. С. 202–214.  
<https://www.doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214>
28. *Lurie A.I., Belyaev A.* Theory of Elasticity. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 1050 p.  
<https://www.doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>
29. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Ленанд, 2014. 376 с.
30. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 316 с.
31. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
32. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Functionally graded cylinders: Vibration analysis // *ZAMM. J. of Appl. Math.&Mech.* 2023. V. 103. № 11. Art. No. e202200430.  
<https://www.doi.org/10.1002/zamm.202200430>
33. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *Int. J. of Mech.&Mater. in Design.* 2021. V. 17. № 2. P. 321–332.  
<https://www.doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
34. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
35. *Gupta V.K., Murthy P.N.* Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // *J. of Sound Vibr.* 1978. V. 59. № 4. P. 521–531.  
[https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)

## On the Optimal Choice of Young's Modulus for a Functionally Graded Material

A. O. Vatulyan<sup>a,‡</sup>, V. V. Dudarev<sup>a,‡,‡‡</sup>, R. M. Mnukhin<sup>a,‡‡‡</sup>

<sup>a</sup>*Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

<sup>‡</sup>*e-mail: aovatulyan@sfsedu.ru,*

<sup>‡‡</sup>*e-mail: dudarev\_vv@mail.ru,*

<sup>‡‡‡</sup>*e-mail: romamnuhin@yandex.ru*

The problem of maximizing the value of the first natural frequency for a functionally graded material depending on the variation law of Young's modulus is considered. It is assumed that there is a limitation on the average integral value of Young's modulus. The effect of variable material properties on the value of the first natural frequency is shown using the finite element method for the numerical solution of a two-dimensional axisymmetric problem of free oscillations of a cylinder. The optimality condition is obtained using the methods of variational calculus based on the general formulation of the problem for an inhomogeneous elastic isotropic body. It is noted that the left-hand side of this condition has a quadratic form. The problem of finding the optimal variation law of Young's modulus is essentially nonlinear in the general case and special numerical methods must be used to solve it. Three special cases are considered using the obtained optimality condition: bending vibrations of a circular solid plate, longitudinal vibrations of a rod and radial vibrations of a solid thin disk, taking into account the corresponding hypotheses. The optimal variation laws of Young's modulus and the displacement function are obtained in analytical form for all problems. Particularly, in the problem for the disk, a representation is proposed for the radial component of the displacement field, which is described by a linear law. It is shown that in this case the corresponding radial and tangential components of the stress tensor are equal. The sought-for function of the change in Young's modulus along the radial coordinate is found in analytical form from the equation of motion and the boundary condition on the outer boundary. An analytical expression is obtained for determining the value of the natural frequency, corresponding to the found solution. The accuracy of this formula is estimated by comparing it with the numerical solution obtained using the finite element method in the FlexPDE package. A comparison of the values of the natural frequency for homogeneous and inhomogeneous disks is made.

*Keywords:* cylinder, rod, plate, disk, functionally graded material, finite element method, Young's modulus, optimization, natural frequency

### REFERENCES

1. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. London: IOM Commun. Ltd., 1998. 165 p.
2. *Birman V., Byrd L.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, no. 5, pp. 195–216.  
<https://www.doi.org/10.1115/1.2777164>
3. *Kieback B., Neubrand A., Riedel H.* Processing techniques for functionally graded materials // *Mater. Sci. Eng. A.*, 2003, vol. 362, no. 1–2.  
[https://www.doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://www.doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
4. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // *Appl. Mater. Today*, 2016, vol. 5, pp. 223–245.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
5. *Selyaev V.P., Kartashov V.A., Klementyev V.D., Lazarev A.L.* Functionally Graded Composite Building Materials and Structures. Saransk: Ogarev Mordovia State Univ., 2005. 160 p. (in Russian)
6. *Saleh B., Jiang J., Fathi R. et al.* 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, applications and future challenges // *Compos. Pt. B*, 2020, vol. 201, art. no. 108376.

- <https://www.doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
7. *Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S. et al.* State of the art in functionally graded materials // *Compos. Struct.*, 2021, vol. 262, art. no. 113596.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
  8. *Olhoff N.* Optimal Design of Structures: Vibration and Stability Loss Issues. Mechanics. New in Foreign Science: Collection of Articles. Iss. 27. Moscow: Mir, 1981. 277 p. (in Russian)
  9. *Banichuk N.V.* Optimization of Elastic Body Shapes. Moscow: Nauka, 1980. 256 p. (in Russian)
  10. *Banichuk N.V.* Introduction to Structural Optimization. Moscow: Nauka, 1986. 304 p. (in Russian)
  11. *Yang S.T., Liang Y.J.* Stacking sequence optimization of composite laminates for maximum fundamental frequency using Bayesian optimization computational framework // *Results in Engng.*, 2024, vol. 23, art. no. 102586.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.rineng.2024.102586>
  12. *Narita Y., Robinson P.* Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization // *Int. J. of Mech. Sci.*, 2006, vol. 48, no. 12, pp. 1516–1524.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.06.008>
  13. *Trias D., Maimí P., Blanco N.* Maximization of the fundamental frequency of plates and cylinders // *Compos. Struct.*, 2016, vol. 156, pp. 375–384.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.034>
  14. *Marzok A., Waisman H.* Topology optimization of extruded beams modeled with the XFEM for maximizing their natural frequencies // *Mech. Res. Commun.*, 2024, vol. 135, art. no. 104234.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104234>
  15. *Kamgar R., Rahmani F., Rahgozar R.* Geometrical and material optimization of the functionally graded doubly-curved shell by metaheuristic optimization algorithms // *Structures*, 2024, vol. 62, art. no. 106254.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106254>
  16. *Jensen J.S., Pedersen N.L.* On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1D and 2D scalar cases // *J. of Sound&Vibr.*, 2006, vol. 289, no. 4–5, pp. 967–986.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.03.028>
  17. *Du J., Olhoff N.* Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps // *Struct.&Multidisc. Optimiz.*, 2007, vol. 34, pp. 91–110.  
<https://www.doi.org/10.1007/s00158-007-0101-y>
  18. *Sun J., Tian Q., Hu H., Pedersen N.L.* Topology optimization for eigenfrequencies of a rotating thin plate via moving morphable components // *J. of Sound&Vibr.*, 2019, vol. 448, pp. 83–107.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.054>
  19. *Li Q., Wu Q., Dou S. et al.* Nonlinear eigenvalue topology optimization for structures with frequency-dependent material properties // *Mech. Syst.&Signal Proc.*, 2022, vol. 170, art. no. 108835.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.108835>
  20. *Meng Z., Yang G., Wu Q. et al.* Reliability-based topology optimization for fundamental frequency maximization with frequency band constraints // *Mech. Syst.&Signal Proc.*, 2023, vol. 195, art. no. 110295.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.ymsp.2023.110295>
  21. *Bachour R.S., Nicoletti R.* Natural frequencies and band gaps of periodically corrugated beams // *J. of Vibr.&Acoust.*, 2021, vol. 143, no. 4, art. no. 044502.  
<https://www.doi.org/10.1115/1.4048889>
  22. *Shi J., Wang W., Fan Y. et al.* Creating absolute band gap based on frequency locking of three wave modes in a wavy plate // *J. of Sound&Vibr.*, 2024, vol. 592, art. no. 118623.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118623>
  23. *Zhou L., Han W., Wan S.* Low frequency band gap for box girder attached IDVAs // *Thin-Walled Struct.*, 2022, vol. 174, art. no. 109088.  
<https://www.doi.org/10.1016/j.tws.2022.109088>
  24. *Niordson F.* Optimal disks in vibration // *Int. J. of Solids&Struct.*, 1997, vol. 34, no. 23, pp. 2957–2968.  
[https://www.doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00186-8](https://www.doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00186-8)

25. *Blom A.W., Setoodeh S., Hol J.M.A.M., Gurdal Z.* Design of variable-stiffness conical shells for maximum fundamental eigenfrequency // *Comput.&Struct.*, 2008, vol. 86, no. 9, pp. 870–878. <https://www.doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.04.020>
26. *Blom A.W., Stickler P.B., Gürdal Z.* Optimization of a composite cylinder under bending by tailoring stiffness properties in circumferential direction // *Compos. Pt. B: Engng.*, 2010, vol. 41, no. 2, pp. 157–165. <https://www.doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.10.004>
27. *Vatulyan A.O., Nedin R.D.* On an optimization problem for a prestressed plate with variable stiffness // *Problems of Strength&Plasticity*, 2024, vol. 86, no. 2, pp. 202–214. (in Russian) <https://www.doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214>
28. *Lurie A.I., Belyaev A.* *Theory of Elasticity*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 1050 p. <https://www.doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>
29. *Lomakin V.A.* *Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies*. Moscow: Lenand, 2014. 376 p. (in Russian)
30. *Kalinchuk V.V., Belyankova T. I.* *Dynamics of the Surface of Inhomogeneous Media*. Moscow: Fizmatlit, 2009. 316 p. (in Russian)
31. *Vatulyan A.O.* *Coefficient Inverse Problems of Mechanics*. Moscow: Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian)
32. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Functionally graded cylinders: Vibration analysis // *ZAMM. J. of Appl. Math.&Mech.*, 2023, vol. 103, no. 11, art. no. e202200430. <https://www.doi.org/10.1002/zamm.202200430>
33. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *Int. J. of Mech.&Mater. in Design*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 321–332. <https://www.doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
34. *Abovskij N.P., Andreev N.P., Deruga A.P.* *Variational Principles of Elasticity Theory and Shell-theory*. Moscow: Nauka, 1978. 288 p. (in Russian)
35. *Gupta V.K., Murthy P.N.* Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // *J. of Sound&Vibr.*, 1978, vol. 59, no. 4, pp. 521–531. [https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)