ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2025, том 89, № 1, с. 79–89

УДК 539.3

УДАЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В РЕШЕНИИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© 2025 г. М. А. Гузев[1,*], Е. В. Черныш[1]

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

[*]e-mail: guzev@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 07.10.2024 г.
После доработки 15.01.2025 г.
Принята к публикации 15.01.2025 г.

Используя функцию напряжений Эйри для плоско-деформированного состояния сплошной среды, было получено представление для сингулярностей классического поля упругих напряжений. Для неевклидовой модели сплошной среды показано, что структура поля внутренних напряжений плоско-деформированного состояния складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, определяемого через функцию несовместности деформаций. Требование отсутствия особенностей в поле внутренних напряжений позволило скомпенсировать сингулярность в решении теории упругости для нулевой гармоники за счет выбора сингулярности неклассического поля напряжений.

Ключевые слова: функция напряжений Эйри, неевклидова модель сплошной среды, несовместность деформаций

DOI: 10.31857/S0032823525010069, **EDN:** BOAJVF

1. Введение. В механике сплошной среды для задач классической теории упругости хорошо известен факт существования сингулярных решений для полей напряжений. К их интерпретации можно подойти с разных точек зрения [1, 2]. Инженер обычно склонен утверждать, что никакие реальные материалы не способны выдерживать бесконечное напряжение и, следовательно, любая ситуация, в которой такое напряжение предсказывается теорией, противоречит здравому смыслу. Следует отметить, что разрывы в геометрии или граничных условиях, наличие острого угла или сосредоточенная (дельта-функция) нагрузка всегда приводит к появлению сингулярностей классической теории для напряжений.

С точки зрения физики появление сингулярных решений можно объяснить тем, что соответствующие модели недостаточно адекватно описывают исследуемые явления, в частности, на практике не существуют острых углов, и нагрузки никогда не могут быть идеально сконцентрированы. При этом реальные материалы не являются континуумами, поскольку в них можно выделить дискретные структуры на разных масштабах. Таким образом, не имеет практического смысла говорить о значении величин, находящихся к углу ближе, например, чем на одно атомное расстояние, поскольку теория все равно не применима.

Другой подход к анализу сингулярных решений связан с выбором класса функций, в рамках которого следует искать решение, и формулировкой утверждений о сингулярностях, допустимых в решении [3]. В этом контексте возражения инженера, изложенные выше, можно устранить, ограничив модельные предположения: если мы хотим придать какой-либо смысл сингулярным решениях, то их следует рассматривать как пределы, соответствующие практическим ситуациям. Тогда разница между реальной проблемой и предельным случаем наблюдается локально, а в областях сингулярного поведения используется критерий, согласно которому единственно приемлемыми особенностями являются те, для которых полная энергия деформации в небольшой области, окружающей особой точке, ограничена [3].

Обсуждение проблемы сингулярности решений для различных прикладных задач и необходимость расширения классической теории упругости представлено у многих исследователей. В [4–7] развивается нелокальная модель сплошной среды, что приводит к повышению порядка рассматриваемых уравнений, однако позволяет построить регулярное решение традиционно сингулярных задач математической физики. Разработка несингулярной модели описания поля упругих напряжений и деформаций в материалах с учетом микрохарактеристик (дислокаций и дисклинаций) на основе градиентной теории Миндлина выполнена в [8–11]. Несингулярные решения градиентной упругости для дислокаций и трещин сконструированы в [12–15]. Несингулярные решения теории упругости были использованы для описания остаточных напряжений для плоско-деформированного состояния сплошной среды [16]. Однако детальный вывод результатов не излагался, поэтому в данной работе этот пробел исследований восполнен.

Кратко опишем содержание работы. В разд. 1, используя функцию напряжений Эйри, представлены сингулярности классического поля упругих напряжений для плоско-деформированного состояния сплошной среды. В разд. 2 указано, что обобщение классической теории и переход к неевклидовой модели сплошной среды лежит на пути отказа от классических условий совместности. Раздел 3 посвящен изложению общей идеи удаления сингулярности в решениях теории упругости. В частности, показано, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, определяемого на основе неевклидовой модели сплошной среды. Требование отсутствия особенностей в поле внутренних напряжений означает, что сингулярные вклады классического поля должны быть скомпенсированы сингулярностями неклассического поля. Структура последних сингулярностей для поля с полярной симметрией – нулевая гармоника – анализируется в разд. 4. Сингулярные слагаемые поля внутренних напряжений представлены в разд. 5. При этом оказывается, что амплитуды сингулярностей классического и неклассического полей можно выбрать согласовано, обеспечив обращение в нуль сингулярного слагаемого поля внутренних напряжений.

2. Сингулярности нулевой гармоники классического поля напряжений. Рассмотрим плоско-деформированное состояние сплошной среды, для которой уравнения механического равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}=0,\ \ \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^2}=0 \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) тождественно удовлетворяются, если ввести функцию напряжений Эри Ф согласно формулам:

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2\partial x^2},\ \sigma_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^1\partial x^1},\ \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^1\partial x^2} \tag{2.2}$$

В классической теории упругости справедлив закон Гука:

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{2.3}$$

где λ,μ – феноменологические параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. При этом шесть компонент тензора деформаций ε_{ij} определяются через три компоненты u_i вектора перемещений: $\varepsilon_{ij} = \left(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i\right) / 2$. Поэтому функции ε_{ij} не могут быть произвольными и должны удовлетворять дополнительным ограничениям, которые в механике сплошной среды называются условиями сплошности или совместности, сформулированными Сен-Венаном [17]. Для плоского случая они редуцируются к одному соотношению:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{\ 12}}{\partial x^1 \partial x^2} = 0 \tag{2.4}$$

Определив деформации ε_{ij} из (2.3), подставим их в (2.4), а затем воспользуемся (2.1), (2.2), в результате для функции напряжений $\Phi = \Phi_{\text{clas}}$ получаем однородное бигармоническое уравнение:

$$\Delta^2 \Phi_{\text{clas}} = 0 \tag{2.5}$$

Перейдем к полярной системе координат (r,φ) и рассмотрим зависящие только от r частное решение (2.5): $\Phi_{0,\text{clas}} = \Phi_{0,\text{clas}}(r)$, которое совпадает с нулевой гармоникой соответствующего ряда Фурье полного решения. Тогда функция $\Phi_{0,\text{clas}}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)\Phi_{0,\text{clas}} = 0 \tag{2.6}$$

Выполняя последовательно интегрирование в (2.6), получаем следующее представление для $\Phi_{0,\text{clas}}$:

$$\Phi_{0,\text{clas}} = A_0 + B_0 r^2 + \alpha_0 \ln r + \beta_0 r^2 \ln r$$

с некоторыми постоянными $A_0, B_0, \alpha_0, \beta_0$. В полярной системе координат не зависящие от угловой переменной компоненты классического поля напряжений $\tau_{rr}^{(0)}, \tau_{\varphi\varphi}^{(0)}, \tau_{r\varphi}^{(0)}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{(0)} &= \frac{1}{r}\frac{d\Phi_0}{dr} = 2B_0 + \beta_0 + 2\beta_0 \ln r + \frac{\alpha_0}{r^2} \\ \tau_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} = 2B_0 + 3\beta_0 + 2\beta_0 \ln r - \frac{\alpha_0}{r^2};\ \tau_{r\varphi}^{(0)} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Соотношения (2.7) показывают, что поля $\tau_{rr}^{(0)}, \tau_{\varphi\varphi}^{(0)}$ имеют сингулярное поведение при $r \to 0$. Обозначая сингулярные вклады в эти поля через $T_{rr}^{(0)}, T_{\varphi\varphi}^{(0)}$ соответственно, получаем:

$$T_{rr}^{(0)} = 2\beta_0 \ln r + \frac{\alpha_0}{r^2},\quad T_{\varphi\varphi}^{(0)} = 2\beta_0 \ln r - \frac{\alpha_0}{r^2} \tag{2.8}$$

3. Переход к неевклидовой модели. Следует заметить, что поля, определяемые соотношением (2.2), принадлежат к более широкому классу напряжений: они являются самоуравновешенными. Это означает [18, 19], что сила, действующая на выбранную область среды, равна нулю и суммарный момент сил внутренних напряжений обращается в нуль. Математически сформулированные условия записываются соответственно в виде

$$\int_{\partial S} \sigma_{ij} n_j dl = 0, \; M_{ik} = \int_{\partial S} (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) n_j dl = 0,$$

где S – площадь, занимаемая телом; ∂S – граница этой области n_j – направляющие косинусы внешней нормали к границе области. Самоуравновешенные поля напряжений в инженерной литературе также называются остаточными напряжениями – это напряжения, которые существуют внутри материала или тела, когда на него не действуют внешние силы. Следует указать, что это состояние внутреннего напряжения материала связывают с наличием какого-то типа дефекта (дислокации, дисклинации и др.). В физических теориях прочности и пластичности рассмотрены различные модели дефектов кристаллической структуры материалов, приводящие к отличным от нуля значениям напряжений в условиях равновесия. Анализ таких физических моделей еще в пятидесятые годы привел исследователей [20, 21] к выводу о необходимости использовать при их описании неевклидовы геометрические объекты, запрещенные в классической теории упругости.

Выше было указано, что при экспериментальном исследовании полей внутреннего напряженного состояния не наблюдается их сингулярного поведения. При этом описание полей на основе классической теории приводит к сингулярностям. Обобщение теории может быть выполнена на пути введения математических объектов, не укладывающихся в рамки Евклидова геометрического описания деформационных свойств упругой сплошной среды.

В наиболее четкой форме это было проанализировано С.К. Годуновым [17], указавшим, что отождествление изменение формы тела в евклидовой метрике $g_{ij} = \delta_{ij} - 2A_{ij}$ внешнего наблюдателя, где A_{ij} – тензор деформации Альманси, с изменениями внутренней метрики материала G_{ij}, определяющей изменение его внутренней энергии, является дополнительной гипотезой, постулируемой в классической теории. Пространство внешнего наблюдателя является евклидовым, поэтому тензор Римана, вычисленный для метрического тензора g_{ij}, равен нулю [17]. При малых деформациях $A_{ij} \approx \varepsilon_{ij}$, тогда равенство нулю тензора Римана сводится к условию совместности Сен-Венана.

Однако С.К. Годуновым было замечено, что классические компоненты деформаций ε_{ij} не совпадают в общем случае с деформациями E_{ij}, определяемыми через реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и деформаций даже для линейной связи между ними:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij}, \tag{3.1}$$

(в [17] поля E_{ij} называются эффективными). Поэтому тензор Римана, вычисленный для эффективного метрического тензора деформации $G_{ij} = \delta_{ij} - 2E_{ij}$, в общем случае, не равен нулю и, как следствие, не выполняются условия совместности Сен-Венана. Следовательно, пространство параметров для описания эффективных деформаций следует расширить. Тогда общая идея при обобщении классической теории состоит в отказе от классических условий совместности и переходе к неевклидовой модели сплошной среды. В этом случае компоненты тензора Римана становятся дополнительными параметрами модели, характеризующими внутреннюю геометрию материала, а с точки зрения механики сплошной среды их естественно называть функциями несовместности.

4. Общая идея удаления сингулярности в решениях теории упругости. В двумерном случае тензор Римана определяется единственной компонентой [22] – скалярной кривизной R. В дальнейшем мы рассматриваем малые деформации $\left|E_{ij}\right| \ll 1$, тогда нетрудно убедиться, что отличие ее от нуля задается через следующую функцию несовместности:

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} \tag{4.1}$$

В классической теории упругости $R = 0$, что соответствует выполнению условий совместности для деформаций (2.4) и соотношения $E_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Переход к неевклидовой модели сплошной среды связан с предположением, что R отличен от нуля. Выразим E_{ij} из (3.1) и подставим в (4.1) – это приводит к уравнению для $\sigma = \sigma_{jj}$:

$$\Delta\sigma = \frac{\mu}{1-\nu}R;\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Используя (2.2), получаем уравнение для функции напряжений Φ:

$$\Delta^2\Phi = \frac{\mu}{1-\nu}R \tag{4.2}$$

Таким образом, при расширении классической теории мы получили неоднородное бигармоническое уравнение для функции напряжения. Поскольку оно является линейным, то его решение Φ можно представить в виде суммы классической функции напряжений Φ_{clas} и дополнительного вклада $\Phi_{\text{non-clas}}$:

$$\Phi = \Phi_{\text{clas}} + \Phi_{\text{non-clas}}, \tag{4.3}$$

где $\Phi_{\text{non-clas}}$ – частное решение уравнения (4.2). Подставляя (4.3) в (2.2), получаем следующее представления для компоненты поля напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \tau_{11} + n_{11},\ \tau_{11} = \frac{\partial^2\Phi_{\text{clas}}}{\partial x^2\partial x^2},\ n_{11} = \frac{\partial^2\Phi_{\text{non-clas}}}{\partial x^2\partial x^2}\\
\sigma_{22} &= \tau_{22} + n_{22},\ \tau_{22} = \frac{\partial^2\Phi_{\text{clas}}}{\partial x^1\partial x^1},\ n_{22} = \frac{\partial^2\Phi_{\text{non-clas}}}{\partial x^1\partial x^1}\\
\sigma_{12} &= \tau_{12} + n_{12},\ \tau_{12} = -\frac{\partial^2\Phi_{\text{clas}}}{\partial x^1\partial x^2},\ n_{12} = -\frac{\partial^2\Phi_{\text{non-clas}}}{\partial x^1\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из (4.4) видно, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений τ_{ij} и неклассического поля напряжений n_{ij}, определяемого через функцию несовместности R.

Функция R использовалась при формулировке моделей сплошных сред с внутренней структурой [23] и в предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных было получено уравнение для R в следующем виде:

$$\Delta^2 R = \gamma R,\ \gamma \neq 0, \tag{4.5}$$

где параметр γ характеризует размер внутренней пространственной структуры. Перейдем к безразмерным переменным $x^i \to x^i / \sqrt[4]{\gamma}$ и выполним перенормировку для σ_{ij}, Φ, R, полагая $\sigma_{ij} \to \mu\sigma_{ij}$, $\Phi \to \Phi\mu / \sqrt{\gamma}\ R \to R\sqrt{\gamma}(1-\nu)$, тогда (4.2), (4.5) редуцируются к соотношениям

$$\Delta^2\Phi = R,\ \ddot{A}^2 R = R \tag{4.6}$$

Из (2.5), (4.3), (4.6) следует, что $\Phi_{\text{non-clas}}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta^2\Phi_{\text{non-clas}} = \Phi_{\text{non-clas}} \tag{4.7}$$

В полярной системе координат (r,φ) рассмотрим зависящие только от r решения $\Phi_{0,\text{non-clas}} = \Phi_{0,\text{non-clas}}(r)$. Тогда $\Phi_{0,\text{non-clas}}$, как следует из (4.7), удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)^2\Phi_{0,\text{non-clas}} = \Phi_{0,\text{non-clas}} \tag{4.8}$$

Если строить общее решение (4.7) в виде соответствующего ряда Фурье, то $\Phi_{0,\text{non-clas}}$ совпадает с его нулевой гармоникой. Соотношение (4.4) для нулевых гармоник записывается в виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \tau_{\varphi\varphi}^{(0)} + n_{\varphi\varphi}^{(0)},\ \tau_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{d^2\Phi_{\text{clas}}}{dr^2},\ n_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{d^2\Phi_{\text{non-clas}}}{dr^2}\\
&\sigma_{rr}^{(0)} = \tau_{rr}^{(0)} + n_{rr}^{(0)},\ \tau_{rr}^{(0)} = \frac{1}{r}\frac{d\Phi_{\text{clas}}}{dr},\ n_{rr}^{(0)} = \frac{1}{r}\frac{d\Phi_{\text{non-clas}}}{dr}\\
&\sigma_{r\varphi}^{(0)} = 0,\ n_{r\varphi}^{(0)} = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Компоненты упругого поля $\tau_{rr}^{(0)}$, $\tau_{\varphi\varphi}^{(0)}$ проявляют сингулярное поведение при $r \to 0$, которое определяется формулами (2.8). Ниже будет показано, что $\Phi_{0,\text{non-clas}}$ является линейной комбинацией цилиндрических функций нулевого порядка (5.1). Среди них, как известно, функция Неймана и функция Макдональда имеют сингулярность при $r \to 0$. Выше было указано, что полное поле (4.9) не должно проявлять сингулярного поведения при $r \to 0$. Поскольку сингулярности классического и неклассического полей входят в $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$ аддитивно, то требование регулярности $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$ при $r \to 0$ можно гарантировать при условии, что сингулярные вклады $T_{rr}^{(0)}$, $T_{\varphi\varphi}^{(0)}$ в поля $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$ должны быть скомпенсированы сингулярностями полей $n_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $n_{rr}^{(0)}$. Этого можно обеспечить за счет того, что полная комбинация амплитудных коэффициентов при $n_{ij}^{(0)}$, $\tau_{ij}^{(0)}$ при одинаковых сингулярностях должна обращаться в нуль.

5. Сингулярности неклассического поля напряжений. Для вычисления компонент $n_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $n_{rr}^{(0)}$ необходимо знать решение уравнения (4.7). Из него следует, что функция $\Phi_{0,\text{non-clas}}$ является линейной комбинацией цилиндрических функций нулевого порядка:

$$\Phi_{0,\text{non-clas}} = a_0J_0(r) + b_0N_0(r) + c_0K_0(r) + d_0I_0(r), \tag{5.1}$$

где $J_0(r)$ и $N_0(r)$ – функции Бесселя и Неймана соответственно, $K_0(r)$ – функция Макдональда и $I_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя, a_0, b_0, c_0, d_0 – произвольные постоянные. Тогда

$$n_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{d^2\Phi_{0,\text{non-clas}}}{dr^2} = a_0J_0''(r) + b_0N_0''(r) + c_0K_0''(r) + d_0I_0''(r), \tag{5.2}$$

где верхний штрих у цилиндрических функций обозначает дифференцирование по r. Воспользуемся соотношениями между цилиндрическими функциями [24]:

$$\begin{aligned}
&N_0'(r) = -N_1(r),\ K_0'(r) = -K_1(r)\\
&2N_1'(r) = N_0(r) - N_2(r),\ -2K_1'(r) = K_0(r) + K_2(r)\\
&J_0'(r) = -J_1(r),\ I_0'(r) = I_1(r),\ 2J_1'(r) = J_0(r) - J_2(r),\ 2I_1'(r) = I_0(r) + I_2(r)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Это позволяет записать (5.2) в следующем виде:

$$n_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\frac{a_0}{2}\big(J_0(r) - J_2(r)\big) - \frac{b_0}{2}\big(N_0(r) - N_2(r)\big) + \\ + \frac{c_0}{2}\big(K_0(r) + K_2(r)\big) + \frac{d_0}{2}\big(I_0(r) + I_2(r)\big) \tag{5.4}$$

Сингулярные вклады в правой части (5.3) при $r \to 0$ порождаются функциями Неймана $N_0(r)$, $N_2(r)$ и Макдональда $K_0(r)$, $K_2(r)$. Обозначим эти вклады через $S_{\varphi\varphi}^{(0)}$ и используем асимптотические формулы для них:

$$N_0(r) = \frac{2}{\pi}\ln r + \underline{O}(1),\ N_2(r) = -\frac{4}{\pi r^2} + \underline{O}(1) \\ K_0(r) = -\ln r + \underline{O}(1),\ K_2(r) = \frac{2}{r^2} + \underline{O}(1) \tag{5.5}$$

Тогда получаем

$$S_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\frac{b_0}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln r + \frac{4}{\pi r^2}\right) + \frac{c_0}{2}\left(-\ln r + \frac{2}{r^2}\right) + \underline{O}(1) \tag{5.6}$$

Для поля $n_{rr}^{(0)}$ справедливо представление в виде

$$n_{rr}^{(0)} = \frac{1}{r}\frac{d\Phi_{0,\text{non-clas}}}{dr} = \frac{a_0}{r}J_0'(r) + \frac{b_0}{r}N_0'(r) + \frac{c_0}{r}K_0'(r) + \frac{d_0}{r}I_0'(r)$$

Отсюда и из (5.3) следует, что

$$n_{rr}^{(0)} = \frac{1}{r}\frac{d\Phi_{0,\text{non-clas}}}{dr} = -\frac{a_0}{r}J_1(r) - \frac{b_0}{r}N_1(r) - \frac{c_0}{r}K_1(r) + \frac{d_0}{r}I_1(r) \tag{5.7}$$

Поскольку [24]

$$\frac{2}{r}J_1(r) = J_0(r) + J_2(r),\quad \frac{2}{r}I_1(r) = I_0(r) - I_2(r)$$

и функции $J_0(r)$, $J_2(r)$, $I_0(r)$, $I_2(r)$ не имеют особенностей при $r \to 0$, то сингулярный вклад в $n_{rr}^{(0)}$ дается функциями Неймана $N_1(r)$ и Макдональда $K_1(r)$. Учитывая [24], что

$$\frac{2}{r}N_1(r) = N_0(r) + N_2(r),\ -\frac{2}{r}K_1(r) = K_0(r) - K_2(r)$$

и принимая во внимание формулы (5.5), то сингулярный вклад $S_{rr}^{(0)}$ в $n_{rr}^{(0)}$ равен:

$$S_{rr}^{(0)} = -\frac{b_0}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln r - \frac{4}{\pi r^2}\right) - \frac{c_0}{2}\left(\ln r + \frac{2}{r^2}\right) + \underline{O}(1) \tag{5.8}$$

6. Удаление сингулярностей. Используя (2.8), (5.6), (5.7), запишем сингулярные вклады $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}, \Sigma_{rr}^{(0)}$ полного поля напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$ (4.9):

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = 2\beta_0\ln r - \frac{\alpha_0}{r^2} - \frac{b_0}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln r + \frac{4}{\pi r^2}\right) + \frac{c_0}{2}\left(-\ln r + \frac{2}{r^2}\right) + \underline{O}(1) \\ \Sigma_{rr}^{(0)} = 2\beta_0\ln r + \frac{\alpha_0}{r^2} - \frac{b_0}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln r - \frac{4}{\pi r^2}\right) - \frac{c_0}{2}\left(\ln r + \frac{2}{r^2}\right) + \underline{O}(1) \tag{6.1}$$

Сгруппируем в (6.1) вклады, имеющие одинаковое сингулярное поведение:

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \left(2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2}\right)\ln r - \left(\alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0\right)\frac{1}{r^2} + \underline{O}(1)$$

$$\Sigma_{rr}^{(0)} = \left(2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2}\right)\ln r + \left(\alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0\right)\frac{1}{r^2} + \underline{O}(1)$$

Заметим, что в $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\Sigma_{rr}^{(0)}$ соответствующие коэффициенты при $\ln r$, $1/r$ одинаковы. Выше было сформулировано требование, чтобы функции $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\Sigma_{rr}^{(0)}$ не имели особенностей при $r \to 0$ – это можно гарантировать при обращении в нуль коэффициентов при сингулярностях. В результате получаем два условия:

$$2\beta_0 - \frac{b_0}{\pi} - \frac{c_0}{2} = 0,\ \alpha_0 + \frac{2b_0}{\pi} - c_0 = 0$$

Отсюда следует, что

$$c_0 = \frac{\alpha_0}{2} + 2\beta_0,\ b_0 = \pi\beta_0 - \frac{\pi\alpha_0}{4} \tag{6.2}$$

В заключение выпишем представление для полей напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$, учитывая (2.7), (4.9), (5.4), (5.7) и (6.2):

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = 2B_0 + 3\beta_0 + 2\beta_0\ln r - \frac{\alpha_0}{r^2} - \frac{a_0}{2}\big(J_0(r) - J_2(r)\big) -$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{4}\right)\big(N_0(r) - N_2(r)\big) + \left(\frac{\alpha_0}{4} + \beta_0\right)\big(K_0(r) + K_2(r)\big) + \frac{d_0}{2}\big(I_0(r) + I_2(r)\big)$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} = 2B_0 + \beta_0 + 2\beta_0\ln r + \frac{\alpha_0}{r^2} - \frac{a_0}{2}[J_0(r) - J_2(r)] -$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{4}\right)\big(N_0(r) + N_2(r)\big) + \left(\frac{\alpha_0}{4} + \beta_0\right)\big(K_0(r) - K_2(r)\big) + \frac{d_0}{2}\big(I_0(r) + I_2(r)\big)$$

Функции $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(0)}$ не содержат особенностей при $r \to 0$.

Обсуждение. Предложенный в данной работе способ преодоления сингулярности был связан с использованием неевклидовой модели материала. Это позволило увеличить число степеней свободы и избежать трудностей классической модели. Хотя удаленные сингулярности определяются особенностью полярной системы координат, тем не менее, сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными показывает, что построенные регулярные поля напряжений подходящим образом аппроксимируют результаты лабораторных наблюдений. Реализованный подход для нулевой гармоники решения теории упругости естественно применить для анализа сингулярности других гармоник. Необходимость учета зависимости от угла для поля напряжений возникает, например, в задачах теории упругости о равновесии пластин с угловыми вырезами [25]. С другой стороны, введение зависимости от угла позволит выяснить также возможные ограничения подхода, реализованного для нулевой гармоники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity I: Removal, interpretation and analysis // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57(4). P. 251–297. https://doi.org/ 10.1115/1.1762503

2. *Sinclair G.B.* On ensuring structural integrity for configurations with stress singularities // A Review. Fatigue&Fracture of Engng. Mater.&Struct. 2016. V. 39(5). P. 523–535. https://doi.org/ 10.1111/ffe.12425
3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Васильев В.В.* Сингулярные решения в задачах механики и математической физики // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 48–65. https://doi.org/10.31857/S057232990000702-2
5. *Васильев В.В., Лурье С.А.* О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 40–49.
6. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 4. С. 459–471.
7. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 1. С. 114–127.
8. *Lazar M.* Non-singular dislocation loops in gradient elasticity // Phys. Lett. A. 2012. V. 376(21). P. 1757–1758.
9. *Lazar M.* The fundamentals of non-singular dislocations in the theory of gradient elasticity: Dislocation loops and straight dislocations // Int. J. of Solids&Struct. 2013. V. 50(2). P. 352–362. https://doi.org/ 10.1016/j.ijsolstr.2012.09.017
10. *Lazar M., Po G.* The non-singular Green tensor of Mindlin's anisotropic gradient elasticity with separable weak non-locality // Phys. Lett. A. 2015. V. 379(24–25). P. 1538–1543. https://doi.org/ 10.1016/j.physleta.2015.03.027
11. *Po G., Lazar M., Admal N.C., Ghoniem N.* A non-singular theory of dislocations in anisotropic crystals // Int. J. of Plasticity. 2018. V. 103. P. 1–22. https://doi.org/ 10.1016/j.ijplas.2017.10.003
12. *Kioseoglou J., Konstantopoulos I., Ribarik G. et al.* Nonsingular dislocation and crack fields: implications to small volumes // Microsyst. Technol. 2009. V. 15. P. 117–121. https://doi.org/ 10.1007/s00542-008-0700-6
13. *Aifantis E.C.* A note on gradient elasticity and nonsingular crack fields // J. Mech. Behav. Mater. 2011. V. 20. P. 103–105.
14. *Konstantopoulos I., Aifantis E.C.* Gradient elasticity applied to a crack // J. Mech. Behav. Mater. 2013. V. 22. P. 193–201.
15. *Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E.C.* Nonsingular solutions of GradEla models for dislocations: An extension to fractional GradEla // J. of Micromech.&Molec. Phys. 2018. V. 03. № 03n04. A. 1840013. https://doi.org/ 10.1142/s2424913018400131
16. *Guzev M., Liu W., Qi C.* Non-Euclidean model for description of residual stresses in planar deformations // Appl. Math. Model. 2021. V. 90. P. 615–623.
17. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды М.: Наука, 1978. 304 с.
18. *Gurtin M.E.* A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics // Arch. for Rat. Mech.&Anal. 1963. V. 13. № 1. P. 321–329. https://doi.org/ 10.1007/BSF01262700
19. *Мясников В.П., Гузев М.А., Ушаков А.А.* Структура поля самоуравновешенных напряжений в сплошной среде // Дальневост. матем. ж. 2002. № 2. С. 231–241.
20. *Kondo K.* On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding // Proc. Jap. Nat. Congr. Apll. Mech. 1952. V. 2. P. 41–47.
21. *Bilby B.A., Bullough R., Smith E.* Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry // Proc. Roy. Soc. 1955. V. 231(1185). P. 263–273. https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171
22. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
23. *Гузев М.А.* Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 5. С. 39–48.
24. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / 5-е изд. перераб. при участии *Геронимуса Ю.В.* и *Цейтлина М.Ю.* М.: Наука, 1971. 1108 с.
25. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. of Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.

Singularity Removal in the Elasticity Theory Solution Based on a Non-Euclidean Model of a Continuous Medium

M. A. Guzev[a,#], E. V. Chernysh[a]

[a] *Institute for Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia*

[#] *e-mail: guzev@iam.dvo.ru*

A representation for singularities of the classical elastic stress field was obtained using the Airy stress function for a plane-strained state of a continuous medium. For a non-Euclidean model of a continuous medium, the structure of the internal stress field of a plane-strained state was shown to consist of a classical elastic stress field and a non-classical stress field determined through the incompatibility function of deformations. The requirement for the absence of singularities in the internal stress field allowed to compensate for the singularity in the elasticity theory solution for the zero harmonic by choosing a singularity of the non-classical stress field.

Keywords: Airy stress function, non-Euclidean model of a continuous medium, deformation incompatibility

REFERENCES

1. *Sinclar G.B.* Stress singularities in classical elasticity I: Removal, interpretation and analysis // Appl. Mech. Rev., 2004, vol. 57(4), pp. 251–297. https://doi.org/10.1115/1.1762503
2. *Sinclair G.B.* On ensuring structural integrity for configurations with stress singularities // A Review. Fatigue&Fracture of Engng. Mater.&Struct., 2016, vol. 39(5), pp. 523–535. https://doi.org/ 10.1111/ffe.12425
3. *Cherepanov G.P.* Mechanics of Brittle Fracture. Moscow: Nauka, 1974. 640 p. (in Russian)
4. *Vasiliev V.V.* Singular solutions in problems of mechanics and mathematical physics // Izv. RAN. MTT, 2018, no. 4, pp. 48–65. https://doi.org/ 10.31857/S057232990000702-2
5. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip // Izv. RAN. MTT, 2013, no. 4, pp. 40–49.
6. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Nonlocal solutions to singular problems of mathematical physics and mechanics // JAMM, 2018, vol. 82, no. 4, pp. 459–471.
7. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Differential equations and the problem of singularity of solutions in applied mechanics and mathematics // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2023, vol. 64, no. 1, pp. 98–109.
8. *Lazar M.* Non-singular dislocation loops in gradient elasticity // Phys. Lett. A, 2012, vol. 376(21), pp. 1757–1758.
9. *Lazar M.* The fundamentals of non-singular dislocations in the theory of gradient elasticity: Dislocation loops and straight dislocations // Int. J. of Solids&Struct., 2013, vol. 50(2), pp. 352–362. https://doi.org/ 10.1016/j.ijsolstr.2012.09.017
10. *Lazar M., Po G.* The non-singular Green tensor of Mindlin's anisotropic gradient elasticity with separable weak non-locality // Phys. Lett. A, 2015, vol. 379(24–25), pp. 538–1543. https://doi.org/ 10.1016/j.physleta.2015.03.027
11. *Po G., Lazar M., Admal N.C., Ghoniem N.* A non-singular theory of dislocations in anisotropic crystals // Int. J. of Plasticity, 2018, vol. 103, pp. 1–22. https://doi.org/ 10.1016/j.ijplas.2017.10.003
12. *Kioseoglou J., Konstantopoulos I., Ribarik G. et al.* Nonsingular dislocation and crack fields: implications to small volumes // Microsyst. Technol., 2009, vol. 15, pp. 117–121. https://doi.org/ 10.1007/s00542-008-0700-6
13. *Aifantis E.C.* A note on gradient elasticity and nonsingular crack fields // J. Mech. Behav. Mater., 2011, vol. 20, pp. 103–105.
14. *Konstantopoulos I., Aifantis E.C.* Gradient elasticity applied to a crack // J. Mech. Behav. Mater., 2013, vol. 22, pp. 193–201.

15. *Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E.C.* Nonsingular solutions of GradEla models for dislocations: An extension to fractional GradEla // J. of Micromech.&Molec. Phys., 2018, vol. 03, no. 03n04, a. 1840013.
https://doi.org/ 10.1142/s2424913018400131
16. *Guzev M., Liu W., Qi C.* Non-Euclidean model for description of residual stresses in planar deformations // Appl. Math. Model., 2021, vol. 90, pp. 615–623.
17. *Godunov S.K.* Elements of Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1978. 304 p. (in Russian)
18. *Gurtin M.E.* A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics // Arch. for Rat. Mech.&Anal., 1963, vol. 13, no. 1, pp. 321–329.
https://doi.org/ 10.1007/BSF01262700
19. *Myasnikov V.P., Guzev M.A., Ushakov A.A.* Structure of the self-equilibrated stress field in a continuous medium // Far Eastern Math. J., 2002, no. 2, pp. 231–241.
20. *Kondo K.* On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding // Proc. Jap. Nat. Congr. Apll. Mech., 1952, vol. 2, pp. 41–47.
21. *Bilby B.A., Bullough R., Smith E.* Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry // Proc. Roy. Soc., 1955, vol. 231(1185), pp. 263–273.
https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171
22. *Novikov S.P., Taimanov I.A.* Modern Geometric Structures and Fields. Moscow: MCCME, 2005. 584 p. (in Russian)
23. *Guzev M.A.* The structure of the kinematic and force fields in the Riemannian model of a continuous medium // J. of Appl. Mech.&Tech. Phys., 2011, vol. 52, no. 5, pp. 39–48.
24. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. (in Russian)
25. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. of Appl. Mech., 1952, vol. 19, no. 4, pp. 526–528.