

---

---

УДК 539.3:534.1

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ

© 2025 г. Г. Р. Гулгазарян<sup>1,\*</sup>, Л. Г. Гулгазарян<sup>2,1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения

<sup>2</sup>Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения

\*e-mail:ghulghazaryangurgen08@aspu.am

\*\*e-mail:ghulghazaryanlusine08@aspu.am

Поступила в редакцию 05.09.2024 г.

После доработки 01.12.2024 г.

Принята к публикации 27.12.2024 г.

Используя систему уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, исследуются свободные колебания ортотропной тонкой упругой цилиндрической панели с шарнирно закрепленной граничной образующей. Для расчета собственных частот и идентификации соответствующих собственных мод используется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластины. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы краевых колебаний. На примере ортотропной цилиндрической панели получены приближенные значения безразмерной характеристики собственных частот колебаний.

*Ключевые слова:* свободные колебания, цилиндрическая панель, шарнирное закрепление

DOI: 10.31857/S0032823525010053, EDN: BOEOAW

**1. Введение.** Известно, что на свободном крае ортотропной пластины планарные и изгибные колебания могут возникать независимо друг от друга [1–6]. При искривлении пластинки эти колебания связываются, вызывая возникновение двух новых типов колебаний, локализованных на свободном крае: преимущественно тангенциальных и преимущественно изгибных. Преобразование одного вида колебаний в другой происходит на свободном крае тонкой цилиндрической упругой панели. Для этих колебаний возникает сложное распределение частот собственных колебаний в зависимости от геометрических и механических параметров конечных и бесконечных цилиндрических панелей [4–8]. С увеличением числа свободных краев цилиндрической панели распределение становится все более сложным [17–20]. В частности, собственные колебания ортотропных цилиндрических панелей, когда все края свободны исследованы в работе [17], а для консольных ортотропных цилиндрических панелей в работе [18]. Интерфейсные и краевые колебания ортотропных цилиндрических композитных панелей со свободными краями исследованы в работе [19].

В работе [20] рассмотрены собственные колебания ортотропных цилиндрических панелей с жестко закрепленной граничной образующей. Отметим, что задачи [17–20] не допускают разделения переменных. Исследование краевого резонанса цилиндрических панелей с шарнирно закрепленной граничной образующей, когда другие края свободны, является одной из сложнейших задач теории колебаний пластин и цилиндрических панелей [4]. Эти трудности решаются путем использования сочетания аналитической и асимптотической теорий, а также численных методов.

В настоящей работе впервые исследованы свободные колебания прямоугольных ортотропных пластин с шарнирно закрепленной стороной и цилиндрических ортотропных панелей с шарнирно закрепленной граничной образующей. Такие элементы являются важными составляющими современных конструкций и сооружений. Поэтому вопрос о свободных колебаниях этих элементов имеет большое значение и требует особого внимания.

Задачи не допускают разделения переменных. Можно доказать, что такие задачи для цилиндрических панелей из ортотропных материалов с простыми граничными условиями являются самосопряженными и неотрицательно определенными [6]. Поэтому к ним можно применить обобщенный метод Канторовича–Власова [9–13]. В качестве базисных функций используются собственные функции следующей задачи

$$w^{VIII} = \theta^8 w$$

$$w|_{\alpha=0,l} = w'|_{\alpha=0,l} = 0, \quad w''|_{\alpha=0,l} = w'''|_{\alpha=0,l} = 0; \quad 0 \leq \alpha \leq l \quad (1.1)$$

Задача (1.1) самосопряженная и имеет неотрицательный простой дискретный спектр с предельной точкой на бесконечности. Собственные функции задачи (1.1), соответствующие собственным значениям  $\theta_m^8$ ,  $m = 1, \infty$ , имеют вид:

$$w_m(\theta_m \alpha) = \frac{\Delta_1}{\Delta} x_1(\theta_m \alpha) + \frac{\Delta_2}{\Delta} x_2(\theta_m \alpha) + \frac{\Delta_3}{\Delta} x_3(\theta_m \alpha) + x_4(\theta_m \alpha)$$

$$0 \leq \alpha \leq l, \quad m = 1, \infty$$

$$x_1(\theta_m \alpha) = \operatorname{ch} \theta_m \alpha - \operatorname{ch} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \quad (1.2)$$

$$x_2(\theta_m \alpha) = \operatorname{sh} \theta_m \alpha - \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}}, \quad x_3(\theta_m \alpha) = \operatorname{sh} \theta_m \alpha - \sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}}$$

$$x_4(\theta_m \alpha) = \cos \theta_m \alpha - \operatorname{ch} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} + \operatorname{sh} \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1(\theta_m l) & x_2(\theta_m l) & x_3(\theta_m l) \\ x_1'(\theta_m l) & x_2'(\theta_m l) & x_3'(\theta_m l) \\ x_1''(\theta_m l) & x_2''(\theta_m l) & x_3''(\theta_m l) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = - \begin{vmatrix} x_4(\theta_m l) & x_2(\theta_m l) & x_3(\theta_m l) \\ x_4'(\theta_m l) & x_2'(\theta_m l) & x_3'(\theta_m l) \\ x_4''(\theta_m l) & x_2''(\theta_m l) & x_3''(\theta_m l) \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} x_1(\theta_m l) & x_4(\theta_m l) & x_3(\theta_m l) \\ x_1'(\theta_m l) & x_4'(\theta_m l) & x_3'(\theta_m l) \\ x_1''(\theta_m l) & x_4''(\theta_m l) & x_3''(\theta_m l) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = - \begin{vmatrix} x_1(\theta_m l) & x_2(\theta_m l) & x_4(\theta_m l) \\ x_1'(\theta_m l) & x_2'(\theta_m l) & x_4'(\theta_m l) \\ x_1''(\theta_m l) & x_2''(\theta_m l) & x_4''(\theta_m l) \end{vmatrix}$$

Эти собственные функции вместе со своими первыми и вторыми производными определяют ортогональный базис в гильбертовом пространстве  $L_2[0, l]$  [13]. Здесь  $\theta_m$ ,  $m = 1, \infty$  положительные нули определителя Вронского для функций (1.3) в точке  $\alpha = l$ . Обозначим

$$\beta'_m = \frac{\int_0^l (w'_m(\theta_m \alpha))^2 d\alpha}{\int_0^l (w_m(\theta_m \alpha))^2 d\alpha}, \beta''_m = \frac{\int_0^l (w''_m(\theta_m \alpha))^2 d\alpha}{\int_0^l (w'_m(\theta_m \alpha))^2 d\alpha} \quad (1.4)$$

Заметим, что производные в формулах (1.3)–(1.4) берутся по  $\theta_m \alpha$  и  $\beta'_m \rightarrow 1, \beta''_m \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ .

**2. Постановки задач и основные уравнения.** Предполагается, что образующие цилиндрических панелей ортогональны концам панелей. Криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$  определяются на срединной поверхности панелей, где  $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$  и  $\beta (0 \leq \beta \leq s)$  – длины образующей и направляющей окружности соответственно;  $l$  – длина панелей;  $s$  – длина направляющей окружности срединной поверхности (рис. 1).

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания панелей, будем использовать уравнения, соответствующие классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1 \\ & -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left( 4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left( B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2 \\ & \mu^4 \left( B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \frac{\mu^4}{R} \left( B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + \right. \\ & \left. (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u_1, u_2$  и  $u_3$  – проекции вектора перемещений на направления  $\alpha, \beta$  и на нормаль к срединной поверхности панели соответственно;  $R$  – радиус направляющей окружности срединной поверхности;  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  – толщина панели);  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где

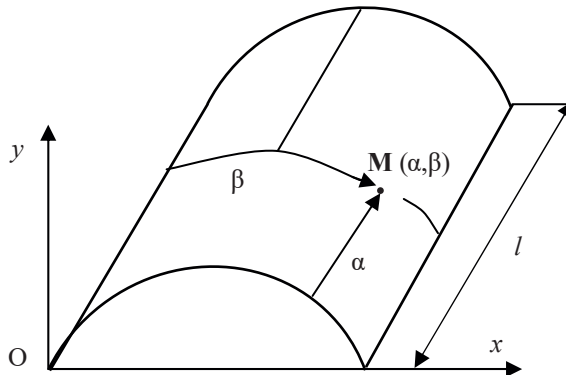


Рис. 1. Цилиндрическая панель с образующими ортогональными к концам панели

$\omega$  – угловая частота,  $\rho$  – плотность материала;  $B_j$  – коэффициенты упругости цилиндрической панели. Граничные условия имеют вид [14]:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left( \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0 \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right|_{\beta=0} = 0, \quad \left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha^2} \right|_{\beta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0 \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right|_{\beta=s} = 0, \quad u_1|_{\beta=s} = 0, \quad u_3|_{\beta=s} = 0, \quad \left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=s} = 0 \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2) являются условиями свободных торцов при  $\alpha = 0, l$  соответственно. Соотношения (1,3) являются условиями свободного образующего при  $\beta = 0$ , а условия (2.4) указывают на то, что граничная образующая  $\beta = s$  шарнирно закреплена.

**3. Вывод и анализ характеристических уравнений.** Формально заменим спектральный параметр  $\lambda$  на  $\lambda_1, \lambda_2$  в первом и втором, и на  $\lambda_3$  третьем уравнениях системы (2.1) соответственно. Решения системы (2.1) для задачи ищутся в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w'_m(\theta_m \alpha), v_m w_m(\theta_m \alpha), w_m(\theta_m \alpha)\} \exp(\theta_m \chi \beta); \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.1)$$

где  $w_m(\theta_m \alpha), m = \overline{1, \infty}$ , определяются из (1.2), а  $u_m, v_m$  и  $\chi$  – неизвестные константы. Для рассматриваемой задачи условия (2.2) выполняются автоматически. После подстановки (3.1) в уравнение (2.1), полученные уравнения скалярным образом умножаются на вектор-функции  $(w'_m(\theta_m \alpha), w_m(\theta_m \alpha), w_m(\theta_m \alpha))$  и интегрируются в пределах от 0 до  $l$ . Из первых двух уравнений получаются соотношения

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) u_m = \varepsilon_m \left\{ a_m + \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} a^2 \chi^2 l_m + \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} \varepsilon_m^2 a^2 d_m \right\} \quad (3.2)$$

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) v_m = \varepsilon_m \chi \{ b_m - a^2 g_m l_m \} \quad (3.3)$$

Из третьего уравнения с учетом соотношений (3.2) и (3.3) выводятся характеристические уравнения

$$R_{mm} c_m + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m - b_m \chi^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m a_m + a^2 [R_{mm} g_m d_m + 2l_m b_m \chi^2] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_m^2 a^2 d_m (b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m) - a^4 g_m l_m^2 \chi^2 \right\} = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.4)$$

$$a_m = - \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} (\eta_{2m}^2 - \beta'_m) \right), \quad b_m = \frac{B_{22}}{B_{11}} (\chi^2 + \eta_{1m}^2) - B_1, \quad d_m = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{22}} \beta'_m$$

$$c_m = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^4 - B_2\chi^2 + \left( \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2m}^2 \right)\chi^2 + (\beta'_m - \eta_{2m}^2)\left( \beta''_m - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1m}^2 \right)$$

$$B_1 = \frac{B_{11}B_{22}\beta'' - B_{12}^2\beta'_m - B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}B_{66}}, B_2 = \frac{B_{11}B_{22}\beta'' - B_{12}^2\beta'_m - 2B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}B_{66}} \quad (3.5)$$

$$g_m = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}}\beta''_m + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2, l_m = \chi^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}\beta'_m, \eta_{im}^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}\theta_m^2}; i = \overline{1,3}$$

$$R_{mm} = a^2 \left( \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}}\beta'_m\chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}}\beta'_m\beta''_m \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_{3m}^2; a^2 = \frac{h^2}{12}\theta_m^2, \varepsilon_m = \frac{1}{R\theta_m}$$

Пусть  $\chi_j, j = \overline{1,4}$  – попарно различные корни уравнения (3.4) с неположительными вещественными частями и  $\chi_{4+j} = -\chi_j; j = \overline{1,4}$ . Пусть  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}); j = \overline{1,8}$  – нетривиальные решения вида (3.1) системы (2.1) при  $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$  соответственно. Решение задачи ищется в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 u_i^{(j)} w_j; i = \overline{1,3} \quad (3.6)$$

Подставив уравнение (3.6) в граничные условия (2.3) и (2.4), каждое полученное уравнение, содержащее  $w(\theta_m \alpha)$ , умножается на  $w(\theta_m \alpha)$ , а уравнение, содержащее  $w'(\theta_m \alpha)$ , соответственно на  $w'(\theta_m \alpha)$ , а затем интегрируется в пределах от 0 до  $l$ . В результате получаются системы уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0; i = \overline{1,4}$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} \exp(\theta_m \chi_j \alpha) w_j}{c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0; i = \overline{5,8}, m = \overline{1, \infty} \quad (3.7)$$

$$M_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{22}} a_m^{(j)} \beta'_m - c_m^{(j)} - a^2 l_m^{(j)} \chi_j^2 b_m^{(j)} - \varepsilon_m^2 a^2 d_m^{(j)} \left( b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m \right)$$

$$M_{2j}^{(m)} = \chi_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 l_m^{(j)} \left( \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} \beta''_m - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} a^2 \varepsilon_m^2 d_m^{(j)} \right\}$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left( \chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m \right) c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 \left( b_m^{(j)} \chi_j^2 + a^2 \frac{4 B_{12} B_{66}}{(B_{22})^2} g_m^{(j)} (\beta'_m)^2 \right) \quad (3.8)$$

$$M_{4j}^{(m)} = \chi_j \left( l_m^{(j)} c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 d_m^{(j)} b_m^{(j)} \right)$$

$$M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)}, M_{6j}^{(m)} = a_m^{(j)} + \frac{B_{22}(B_{12} + B_{22})}{B_{11} B_{66}} a^2 \chi_j^2 l_m^{(j)} + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \varepsilon_m^2 a^2 d_m^{(j)}$$

$$M_{7j}^{(m)} = c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}, M_{8j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)}; j = \overline{1,8}, m = \overline{1, \infty}$$

Верхний индекс  $j$  в скобках означает, что соответствующая функция берется при  $\chi = \chi_j$ . Для того чтобы совокупность систем (3.7) имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = \exp\left(-\sum_{j=1}^4 z_j\right) \text{Det} \left\| T_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^2 = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^4, \quad T_{12} = \left\| (-1)^{i-1} M_{ij}^{(m)} \exp(z_j) \right\|_{i,j=1}^4; \quad z_j = \theta_m \chi_j s \\ T_{21} &= \left\| M_{ij}^{(m)} \exp(z_j) \right\|_{i=5, j=1}^{8,4}, \quad T_{22} = \left\| (-1)^{i-1} M_{ij}^{(m)} \right\|_{i=5, j=1}^{8,4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Численные вычисления показывают, что левая часть равенства (3.9) становится малой, когда любые два корня уравнения (3.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к ошибочным решениям. При детальном изучении уравнения (3.9) заметно, что при сближении корней можно выделить стремящийся к нулю множитель в левой части этого уравнения. Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [z_i z_j] &= \theta_m s (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j), \quad [z_i z_j z_k] = \theta_m s ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k) \\ [z_1 z_2 z_3 z_4] &= \theta_m s ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4) \\ \sigma_1 &= \sigma_1(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 \\ \sigma_2 &= \sigma_2(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_3 + \chi_1 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 + \chi_2 \chi_4 + \chi_3 \chi_4 \\ \sigma_3 &= \sigma_3(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_2 \chi_4 + \chi_1 \chi_3 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 \chi_4 \\ \sigma_4 &= \sigma_4(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \\ \bar{\sigma}_k &= \sigma_k(\chi_1, \chi_2, \chi_3, 0), \quad \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(\chi_1, \chi_2, 0, 0); \quad k = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

В этом случае  $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$ . Пусть  $f_n$ ;  $n = \overline{1, 6}$  – симметричный многочлен  $n$ -го порядка от переменных  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ . Известно, что оно однозначно выражается через элементарные симметрические многочлены. Введя обозначения

$$f_n = f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \quad \bar{f}_n = f_n(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0), \quad \bar{\bar{f}}_n = f_n(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0); \quad n = \overline{1, 6} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma_1, \quad f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, \quad f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3, \quad f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4 \\ \bar{f}_5 &= \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \quad \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_3^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

и производя элементарные действия над столбцами определителя (3.9), получается совокупность уравнений

$$\text{Det} \left\| T_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^2 = K^2 \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.14)$$

$$K = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4) \quad (3.15)$$

Выражения для  $m_{ij}$  приведены в приложении. Уравнения (3.9) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0; m = \overline{1, \infty} \quad (3.16)$$

Учитывая возможные соотношения между  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ , приходим к выводу, что уравнения (3.16) определяют частоты соответствующих видов колебаний. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ , уравнения (3.4) являются характеристическими уравнениями системы (2.1), а уравнения (3.16) – дисперсионными уравнениями задач (2.1)–(2.4) соответственно.

В разд. 6 исследованы асимптотики дисперсионных уравнений (3.16) при  $\varepsilon_m = 1/\theta_m R \rightarrow 0$  (переход к колебаниям, локализованным на трех свободных сторонах прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной четвертой стороной, или к колебаниям, локализованным на свободных краях цилиндрической панели с шарнирно закрепленной граничной образующей), и при  $\theta_m s \rightarrow \infty$  (переход к достаточно широкой цилиндрической панели с шарнирно закрепленной граничной образующей или к колебаниям, локализованным на свободных краях цилиндрической панели с шарнирно закрепленной граничной образующей). Для проверки достоверности асимптотических соотношений, найденных в разд. 6, в следующих двух пунктах исследуются свободные планарные и изгибные колебания прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной.

**4. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной.** Рассмотрим ортотропную прямоугольную пластину отнесенную к триортogonalной системе прямолинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  с началом в свободной торцевой плоскости таким образом, что координатная плоскость  $\alpha\beta$  совпадает со срединной плоскостью пластины, а главные направления упругости материала пластинки совпадают с координатными линиями (рис. 2). Пусть  $s, l$  являются шириной и длиной пластины соответственно. Исследуются вопросы существования свободных планарных колебаний прямоугольных пластин с шарнирно закрепленной стороной. В качестве исходных уравнений принимаются уравнения малых планарных колебаний, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [14]

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} &= \lambda u_1 \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} &= \lambda u_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

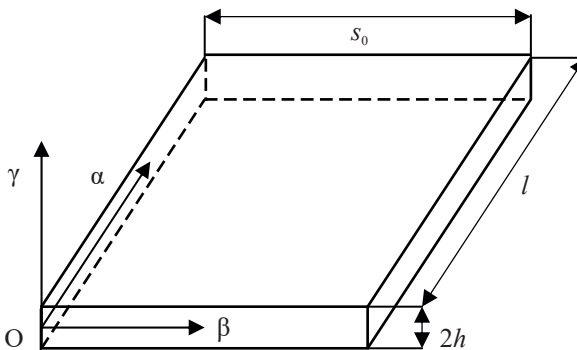


Рис. 2. Прямоугольная пластина с шарнирно закрепленной стороной

Здесь  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq l$ ) и  $\beta$  ( $0 < \beta < s$ ) ортогональные прямолинейные координаты точки на средней плоскости;  $u_1, u_2$  – проекции вектора перемещений в направлениях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $B_{ik}, i, k = 1, 2, 6$  коэффициенты упругости;  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала. Граничные условия имеют вид [14]

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0, l} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0, l} = 0 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0 \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=s_0} = 0, \quad u_1 \Big|_{\beta=s_0} = 0 \quad (4.4)$$

Соотношения (4.2), (4.3) это условия свободных сторон при  $\alpha = 0, l$  и  $\beta = 0$  соответственно. Соотношения (4.4) являются условиями шарнирного закрепления стороны при  $\beta = s_0$ .

Задача (4.1)–(4.4) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий этой задаче, самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм колебаний можно использовать обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [9–13].

Решения системы (4.1) ищутся в виде

$$(u_1, u_2) = \{u_m w'_m(\theta_m \alpha), v_m w_m(\theta_m \alpha)\} \exp(\theta_m y \beta); \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (4.5)$$

Здесь,  $w_m(\theta_m \alpha), m = \overline{1, \infty}$  определяются из (1.2)–(1.3).  $u_m, v_m, y$  – неизвестные константы. Для этой задачи, граничные условия (4.2) выполняются автоматически. Подставив (4.5) в уравнение (4.1), полученные уравнения умножаются на вектор-функцию  $(w'_m(\theta_m \alpha), w_m(\theta_m \alpha))$  скалярным образом и интегрируются в пределах от 0 до  $l$ . В результате получаются системы уравнений

$$\begin{aligned} \left( \beta_m'' - \frac{B_{66}}{B_{11}} (y^2 + \eta_m^2) \right) u_m - \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y v_m &= 0 \\ \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{22}} \beta_m' u_m - \left( y^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}} (\beta_m' - \eta_m^2) \right) v_m &= 0; \quad m = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\eta_m^2 = \lambda / (\theta_m^2 B_{66})$ , и  $\beta_m', \beta_m''$  определяются из (1.4). Приравнявая нулю определитель системы (4.6), находятся характеристические уравнения системы уравнений (4.1):

$$c_m = \frac{B_{22}}{B_{11}} y^4 - B_2 y^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 + (\beta_m' - \eta_m^2) \left( \beta_m'' - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0; \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (4.7)$$

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – различные корни уравнения. (4.7) с неположительными действительными частями и  $y_{2+j} = -y_j; j = 1, 2$ . В качестве решений систем (4.6) при  $y = y_j; j = \overline{1, 4}$  возьмем

$$u_m^{(j)} = y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}} (\beta_m' - \eta_m^2), \quad v_m^{(j)} = \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{22}} \beta_m' y_j; \quad j = \overline{1, 4}, m = \overline{1, \infty} \quad (4.8)$$

Решение задачи (4.1)–(4.4) можно представить в виде



$$(u_1, u_2) = \left( \sum_{j=1}^4 u_m^{(j)} w_m'(\theta_m \alpha) \exp(\theta_m y_j \beta) w_j, \sum_{j=1}^4 v_m^{(j)} w_m(\theta_m \alpha) \exp(\theta_m y_j \beta) w_j \right), \quad (4.9)$$

где  $w(\theta_m \alpha)$  определены в (1.2). Граничные условия (4.2) выполняются автоматически.

Подставим уравнение (4.9) в граничные условия (4.3)–(4.4). Каждое полученное уравнение умножается на  $w(\theta_m \alpha)$  или на  $w'(\theta_m \alpha)$ , а затем интегрируется в пределах от 0 до  $l$ . В результате получаются системы уравнений

$$\sum_{j=1}^4 R_{1j}^{(m)} w_j = 0, \sum_{j=1}^4 R_{1j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0, \sum_{j=1}^4 R_{2j}^{(m)} w_j = 0, \sum_{j=1}^4 R_{4j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0; m = \overline{1, +\infty} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} R_{1j}^{(m)} &= y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}(\beta'_m - \eta_m^2), \quad R_{2j}^{(m)} = y_j \left( y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m + \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 \right) \\ R_{4j}^{(m)} &= y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}}(\beta'_m - \eta_m^2), \quad z_j = \theta_m y_j s; \quad j = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Приравнивая нулю определитель  $\Delta_e^{(m)}$  системы (4.10) и производя элементарные действия со столбцами определителя, получаем следующие дисперсионные уравнения

$$\Delta_e = \exp(-z_1 - z_2)(y_2 - y_1)^2 \text{Det} \left\| l_{ij} \right\|_{i,j}^4 = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= R_{11}^{(m)}, \quad l_{12} = y_1 + y_2, \quad l_{13} = l_{11} \exp(z_1), \quad l_{14} = l_{12} \exp(z_2) + l_{11}[z_1 z_2] \\ l_{21} &= R_{21}^{(m)}, \quad l_{22} = y_1 y_2 + (B_{11} B_{22} \beta_m'' - B_{12}^2 \beta_m' - B_{12} B_{66} \beta_m') / (B_{22} B_{66}) - \eta_m^2 \\ l_{23} &= -l_{21} \exp(z_1), \quad l_{24} = -l_{22} \exp(z_2) - l_{21}[z_1 z_2] \\ n_{31} &= l_{11}, \quad n_{32} = l_{12} \\ l_{31} &= n_{31} \exp(z_1), \quad l_{32} = n_{32} \exp(z_2) + n_{31}[z_1 z_2], \quad l_{33} = n_{31}, \quad l_{34} = n_{32} \\ n_{41} &= y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}}(\beta_m' - \eta_m^2), \quad n_{42} = y_1 + y_2 \\ l_{41} &= n_{41} \exp(z_1), \quad l_{42} = n_{42} \exp(z_2) + n_{41}[z_1 z_2], \quad l_{43} = n_{41}, \quad l_{44} = n_{42} \\ [z_1 z_2] &= \theta_m s (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнения (4.12) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \left\| l_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = (B_{12} + B_{66} / B_{22})^2 (y_1 + y_2) (\beta'_m - \eta_m^2) \left\{ K_{2m}(\eta_m^2) (1 - \exp(2(z_1 + z_2))) + (y_1 + y_2) K_{4m}(\eta_m^2) (\exp(z_2) + \exp(z_1)) [z_1 z_2] \right\} = 0; m = \overline{1, \infty} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} K_{2m}(\eta_m^2) &= (\beta'_m - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} \beta_m'' - B_{12}^2 \beta_m'}{B_{22} B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 \\ K_{4m}(\eta_m^2) &= (\beta'_m - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} \beta_m'' - B_{12}^2 \beta_m'}{B_{22} B_{66}} - \eta_m^2 \right) + \eta_m^2 y_1 y_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Если  $y_1$  и  $y_2$  являются корнями уравнения (4.9) с отрицательными действительными частями, то при  $\theta_m s \rightarrow \infty$  корни уравнения (4.14) аппроксимируются корнями уравнений

$$K_{2m}(\eta_m^{(2)}) = (\beta'_m - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m}{B_{22} B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (4.16)$$

Уравнения (4.16) являются аналогом уравнений Рэлея для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластинки со свободными тремя сторонами. Таким образом, собственные частоты задач (4.1)–(4.4) можно найти из (4.14).

Для нахождения соответствующих собственных мод коэффициенты  $w_j$ ;  $j = \overline{1, 4}$  необходимо определить из систем уравнений (4.10) и подставить в (4.9). Можно взять, например

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{R_{12}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(z_1 + 2z_2) + R_2^{(m)} \exp(z_1) - 2R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} \exp(z_2)}{R_{11}^{(m)} R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)} \\ w_2 &= \frac{R_2^{(m)} \exp(z_2) - R_1^{(m)} \exp(2z_1 + z_2) - 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1)}{R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)} \\ w_3 &= \frac{R_{12}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(z_1) + R_2^{(m)} \exp(z_1 + 2z_2) - 2R_{12}^{(m)} R_{22}^{(m)} \exp(2z_1 + z_2)}{R_{11}^{(m)} R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_4 &= \exp(z_2), \quad R_1^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} - R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}, \quad R_2^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} + R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

как решения систем уравнений (4.12) при заданной безразмерной характеристике  $\eta_m$  собственной частотной.

**5. Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно крепленной стороной.** Рассматривается ортотропная прямоугольная пластина толщиной  $h$ , шириной  $s_0$  и длиной  $l$  (рис. 2). Исследуется задача о существовании свободных изгибных колебаний прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной. В качестве исходного уравнения, принимаются уравнения малоамплитудных изгибных колебаний классической теории ортотропных пластин [16]

$$\mu^4 \left( B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3, \quad (5.1)$$

где  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq l$ ) и  $\beta$  ( $0 < \beta < s$ ) – ортогональные прямолинейные координаты точки срединной плоскости пластины;  $u_3$  – нормальная составляющая вектора перемещения точки срединной плоскости;  $B_{ik}$ ;  $i, k = \overline{1, 2, 6}$  – коэффициенты упругости материала;  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  – толщина пластинки);  $\lambda = \omega^2 \rho$  где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала. Граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right|_{\alpha=0, l} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \bigg|_{\alpha=0, l} = 0 \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right|_{\beta=0} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \bigg|_{\beta=0} = 0 \quad (5.3)$$

$$u_3 \big|_{\beta=s_0} = \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \bigg|_{\beta=s_0} = 0 \quad (5.4)$$

Соотношения (5.2), (5.3) являются условиями свободных сторон при  $\alpha = 0, l$  и  $\beta = 0$  соответственно, а условия (5.4) указывают на то, что сторона  $\beta = s_0$  шарнирно закреплена.

Задача (5.1)–(5.4) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий этой задаче, самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому для нахождения собственных частот и собственных мод колебаний можно использовать обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [9–13]. Решение уравнения (5.1) ищется в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \alpha) \exp(\theta_m y \beta); \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (5.5)$$

где  $w(\theta_m \alpha)$  определены в (1.2), а  $y$  – неизвестная константа. Граничные условия (5.2) выполняются автоматически. Подставив (5.5) в уравнение (5.1), умножив полученные уравнения на  $w(\theta_m \alpha)$  и проинтегрировав их в пределах от 0 до  $l$ , получаются характеристические уравнения

$$R_{mm} = a^2 \left( y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta'_m y^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} \beta'_m \beta''_m \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0; \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (5.6)$$

$$\eta_m^2 = \frac{\lambda}{\theta_m^2 B_{66}}, \quad a^2 = \theta_m^2 h^2 / 12, \quad (5.7)$$

где  $\theta_m$  и  $\beta'_m, \beta''_m$  определены в (1.3)–(1.4) соответственно. Пусть  $y_3$  и  $y_4$  различные корни уравнения (5.6) с неположительными действительными частями и  $y_{2+j} = -y_j, j = 3, 4$ . Решения задачи (5.1)–(5.4) ищутся в виде

$$u_3 = \sum_{j=3}^6 w_m(\theta_m \alpha) \exp(\theta_m y_j \beta) w_j; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (5.8)$$

Вставив уравнение (5.8) в граничные условия (5.3)–(5.4) и после умножения полученных уравнений на  $w(\theta_m \alpha)$  и их интегрирования в пределах от 0 до  $l$  получаются системы уравнений

$$\sum_{j=3}^6 R_{3j}^{(m)} W_j = 0, \quad \sum_{j=3}^6 R_{4j}^{(m)} W_j = 0, \quad \sum_{j=3}^6 R_{7j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0, \quad \sum_{j=3}^6 R_{8j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (5.9)$$

$$R_{3j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m, \quad R_{4j}^{(m)} = y_j^3 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \beta'_m y_j \quad (5.10)$$

$$R_{7j}^{(m)} = 1, \quad R_{8j}^{(m)} = R_{3j}^{(m)}, \quad z_j = \theta_m y_j s; \quad j = \overline{3, 6}$$

Приравнявая нулю определители  $\Delta_b^{(m)}$  систем (5.9) и производя элементарные действия над столбцами определителя, получаются дисперсионные уравнения

$$\Delta_b^{(m)} = \exp(-z_3 - z_4) (y_4 - y_3)^2 F \left\| b_{ij} \right\|_{i,j}^4 = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \quad (5.11)$$

$$b_{11} = R_{33}^{(m)}, \quad b_{12} = y_3 + y_4, \quad b_{13} = b_{11} \exp(z_3), \quad b_{14} = b_{12} \exp(z_4) + b_{11} [z_3 z_4]$$

$$b_{21} = R_{43}^{(m)}, \quad b_{22} = y_3 y_4 + \beta'_m B_{12} / B_{22}, \quad b_{23} = -b_{21} \exp(z_3), \quad b_{24} = -b_{22} \exp(z_4) - b_{21} [z_3 z_4] \quad (5.12)$$

$$b_{31} = \exp(z_3), \quad b_{32} = [z_3 z_4], \quad b_{33} = 1, \quad b_{34} = 0; \quad b_{41} = b_{13}, \quad b_{42} = b_{14}$$

$$b_{43} = b_{11}, \quad b_{44} = b_{12}; \quad [z_3 z_4] = \theta_m s (\exp(z_4) - \exp(z_3)) / (z_4 - z_3)$$

Уравнения (5.11) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = (y_3 + y_4) \left\{ K_{1m}(\eta_m^2) (1 - \exp(2(z_3 + z_4))) + \right. \quad (5.13)$$

$$\left. + (y_3 + y_4) K_{5m}(\eta_m^2) (\exp(z_3) + \exp(z_4)) [z_3 z_4] \right\} = 0; \quad m = \overline{1, \infty}$$

$$\begin{aligned}
 K_{1m}(\eta_m^2) &= y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} \beta'_m y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) (\beta'_m)^2 \\
 K_{5m}(\eta_m^2) &= y_3^2 y_4^2 - 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} \beta'_m y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) (\beta'_m)^2
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Если  $y_3$  и  $y_4$  являются корнями уравнения (5.6) с отрицательными действительными частями, то при  $\theta_m s \rightarrow \infty$  корни уравнения (5.13) аппроксимируются корнями уравнений

$$K_{1m}(\eta_m^2) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{22}} \beta'_m y_3 y_4 - \left( \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2 \beta_m'^2 = 0; \quad m = \overline{1, \infty} \tag{5.15}$$

Уравнения (5.15) являются аналогами уравнений Коненкова для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластины со свободными тремя сторонами (ср. с [7, 8, 17–20]). Таким образом, собственные частоты задачи (5.1)–(5.4) можно найти из (5.13). Для нахождения соответствующих собственных мод коэффициенты  $w_j, j = \overline{3, 6}$  необходимо определить из систем уравнений (5.9) и подставить в уравнения (5.8). В качестве решения системы уравнений (5.9) при заданной безразмерной характеристике  $\eta_m$  собственной частотной, можно принять

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \frac{R_{34}^{(m)} R_3^{(m)} \exp(z_3 + 2z_4) + R_4^{(m)} \exp(z_3) - 2R_{34}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(z_4)}{R_{33}^{(m)} R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)} \\
 W_4 &= \frac{R_4^{(m)} \exp(z_4) - R_3^{(m)} \exp(2z_3 + z_4) - 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3)}{R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)} \\
 W_5 &= \frac{R_{34}^{(m)} \exp(z_3) [R_3^{(m)} + R_4^{(m)} \exp(2z_4) - 2R_{34}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)]}{R_{33}^{(m)} R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)} \\
 W_6 &= \exp(z_4); \quad R_3^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} - R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}, \quad R_4^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} + R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

**6. Асимптотика дисперсионных уравнений (3.16) при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .** Используя предыдущие формулы, предполагается, что  $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$ . Тогда при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  уравнения (3.4) преобразуются в совокупность уравнений

$$c_m = \frac{B_{22}}{B_{11}} y^4 - B_2 y^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 + (\beta'_m - \eta_m^2) \left( \beta_m'' - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0; \quad m = \overline{1, +\infty} \tag{6.1}$$

$$R_{mm} = a^2 \left( y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta'_m y^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} \beta'_m \beta_m'' \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0; \quad m = \overline{1, +\infty} \tag{6.2}$$

Здесь предельный переход  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  понимается в том смысле, что при фиксированном радиуса  $R$  и  $b = s_0$  – расстояния между граничными образующими цилиндрической панели, можно перейти к цилиндрической панели радиуса  $R' = nR$  и к пределу  $\varepsilon'_m = 1 / (n\theta_m R) = \varepsilon_m / n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Уравнения (6.1) и (6.2) являются характеристическими уравнениями уравнений планарных и изгибных колебаний ортотропных пластин со свободными противоположными сторонами соответственно. Корни уравнений (6.1) и (6.2) с неположительными действительными частями, как в разд. 3 и 4, обозначаются  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  соответственно. Так же, как и в [16], доказывается, что при

$$\varepsilon_m \ll 1; \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j \quad (6.3)$$

Корни  $\chi^2$  уравнений (3.4) можно представить в виде

$$\chi_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon_m^2 + \beta_i^{(m)} \varepsilon_m^4 + \dots; \quad i = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (6.4)$$

При условии (6.3), учитывая соотношения (3.8), (3.14) и (6.4) и тот факт, что

$$M_{3j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} = M_{7j}^{(m)} = M_{8j}^{(m)} = O(\varepsilon_m^2); \quad j = 1,2, \quad (6.5)$$

уравнение (3.16) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = N^2(\eta_m^2) K_{3m}^2(\eta_m^2) \text{Det} |l_{ij}|_{i,j=1}^4 \text{Det} |b_{ij}|_{i,j=1}^4 + O(\varepsilon_m^2) = 0; \quad m = \overline{1,+\infty}, \quad (6.6)$$

где  $\text{Det} |l_{ij}|_{i,j=1}^4$  и  $\text{Det} |b_{ij}|_{i,j=1}^4$  определяются из формул (4.14) и (5.13) соответственно, и

$$N(\eta_m^2) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2)$$

$$\begin{aligned} K_{3m}(\eta_m^2) = & \left\{ (\beta'_m - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11} \beta''_m - B_{66} \eta_m^2}{B_{22}} \right) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} + a^2 \left( \frac{B_{66} \eta_m^2}{B_{11}} + \frac{B_{12}^2 + 3B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{66}} \right) \right)^2 + \right. \\ & + \left( \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m - 2B_{12} B_{66} \beta'_m}{B_{22} B_{66}} - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 \right) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} + a^2 \left( \frac{B_{66} \eta_m^2}{B_{11}} + \frac{B_{12}^2 + 3B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{66}} \right) \right) \Bigg\} + \\ & + \left( \frac{B_{22} \eta_m^2}{B_{11}} - \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m - B_{12} B_{66} \beta'_m}{B_{11} B_{66}} + a^2 \left( \frac{B_{66} \eta_m^2 - \beta''_m}{B_{11}} \right) \left( \eta_m^2 + \frac{B_{12} + 3B_{66} \beta'_m}{B_{66}} \right) \right) \Bigg\} + \\ & + \left( \frac{B_{22} \eta_m^2}{B_{11}} - \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m - B_{12} B_{66} \beta'_m}{B_{11} B_{66}} + a^2 \left( \frac{B_{66} \eta_m^2 - \beta''_m}{B_{11}} \right) \left( \eta_m^2 + \frac{B_{12} + 3B_{66} \beta'_m}{B_{66}} \right) \right)^2 \Bigg\} \left( \frac{B_{22}}{(B_{12} + B_{66}) \beta'_m} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.6) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  уравнения (3.16) распадаются на совокупность уравнений

$$\text{Det} |l_{ij}|_{i,j=1}^4 = 0, \quad \text{Det} |b_{ij}|_{i,j=1}^4 = 0, \quad K_{3m}(\eta_m^2) = 0; \quad m = \overline{1,+\infty} \quad (6.8)$$

Здесь первые два уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных собственных колебаний для ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной соответственно.

Корни третьего уравнения соответствуют планарным колебаниям цилиндрической панели. Третье уравнение возникает в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если  $y_1, y_2$  и  $y_3, y_4$  являются корнями уравнений (6.1) и (6.2) соответственно с отрицательными действительными частями, то при  $\theta_m s \rightarrow \infty$ , уравнения (3.16) и (6.6) преобразуются в уравнения

$$\begin{aligned} \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = & \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{22}} \right)^2 (\beta'_m - \eta_m^2) N(\eta_m^2) N_0(\eta_m^2) Q(\eta_m^2) K_{1m}(\eta_m^2) K_{2m}(\eta_m^2) K_{3m}^2(\eta_m^2) + \\ & + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0; \quad m = \overline{1,+\infty} \\ & N_0(\eta_m^2) = N(\eta_m^2)(y_1 + y_2)(y_3 + y_4) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Заметим, что  $\eta_m = 1$  принадлежит предельному спектру безмоментного оператора, соответствующего задаче (2.1)–(2.4). Этот факт оправдывает существование множителя  $(\beta'_m - \eta_m^2)$  в формулах (4.14) и (6.9) (ср. [8]).

Из уравнений (6.9) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $\theta_m s \rightarrow \infty$  корни дисперсионных уравнений (3.16) аппроксимируются корнями уравнений

$$K_{1m}(\eta_m^2) = 0, K_{2m}(\eta_m^2) = 0, K_{3m}(\eta_m^2) = 0; m = \overline{1, +\infty} \quad (6.10)$$

Первые два уравнения (6.10) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний достаточно широкой ортотропной прямоугольной пластины со свободными тремя сторонами (см. уравнения (4.14) и (5.13)). Следовательно, для малых  $\varepsilon_m$  и больших  $\theta_m s$  приближенные значения корней уравнений (3.16) соответствуют корням уравнений (6.8) и уравнения (6.10).

**7. Численные результаты.** В табл. 1 приведены значения некоторых  $\eta_m$  корней уравнений (6.8) для ортотропной прямоугольной пластины из боропластика с шарнирно закрепленной стороной с параметрами [15]

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; E_1 = 2.646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \\ E_2 &= 1.323 \cdot 10^{10}; G = 9.604 \cdot 10^9; \nu_1 = 0.2, \nu_2 = 0.01 \end{aligned} \quad (7.1)$$

и геометрическими параметрами:  $l = 4; s_0 = 5, s_0 = 15$ .

**Таблица 1.** Корни уравнений  $K_{3m}(\eta_m^2) = 0$  и характеристики собственных частот прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной

$m$	$\theta_m$	$K_{3m}(\eta_m^2) = 0$	$\text{Det} b_{ij} _{i,j=1}^4 = 0, s_0 = 5$	$\text{Det} l_{ij} _{i,j=1}^4 = 0, s_0 = 5$
			$\text{Det} b_{ij} _{i,j=1}^4 = 0, s_0 = 15$	$\text{Det} l_{ij} _{i,j=1}^4 = 0, s_0 = 15$
1	1.95473	4.25538	0.04885 0.04873	— —
2	2.74891	4.94711	0.08583 0.08576	— —
3	3.52957	4.81097	0.10927 0.10922	— —
4	4.27693	4.75564	0.12794 0.12789	— —
5	5.04581	4.80318	0.15356 0.15352	— —
6	6.09849	4.78770	0.18491 0.18488	0.98694 0.98694
12	12.7680	4.78787	0.38733 0.38731	0.98696 0.98696
13	13.8782	4.78717	0.42100 0.42099	0.98696 0.98696
14	14.9887	4.78640	0.45469 0.45468	0.98696 0.98696
15	16.0962	4.78555	0.48828 0.48827	0.98696 0.98696
16	17.1935	4.78465	0.52157 0.52157	0.98696 0.98696

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений  $\eta_m$  для преимущественно изгибных, преимущественно планарных и несимметричных колебаний ортотропных цилиндрических панелей из боропластика с шарнирно закрепленной граничной образующей с параметрами (7.1) и геометрическими параметрами:  $R = 40, l = 4, s = 5.00326, s = 15.0893$ .

*Замечание.* Собственные значения  $\eta_m$ , соответствующие корням уравнений  $K_{3m}(\eta_m^2) = 0; m = 1, \infty$ , имеют другие значения порядка  $10^8$ , которые не приведены.

В табл. 2 после характеристик собственных частот указан тип колебаний: “*b*” – преимущественно изгибный, “*e*” – преимущественно планарный и “*n*” – для нового типа колебаний. Модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей соответственно [15].

**Таблица 2.** Характеристики собственных частот преимущественно изгибных, преимущественно планарных и несимметричных колебаний цилиндрической панели

$m$	$\theta_m$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0,$ $\eta_{3m} = \eta_m$ $s = 5.00326$ $s = 15.0893$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m$ $\eta_{3m} = 0$ $s = 5.00326$ $s = 15.0893$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$ $s = 5.00326$ $s = 15.0893$
1	1.95391	0.05340 <i>b</i> 0.05117 <i>b</i>	– – 4.25538 <i>n</i>	0.05006 <i>b</i> – 0.05006 <i>b</i> – 4.25538 <i>n</i>
2	2.74776	0.08690 <i>b</i> 0.08630 <i>b</i>	– – 4.94711 <i>n</i>	0.08690 <i>b</i> – 0.08630 <i>b</i> – 4.94711 <i>n</i>
3	3.52810	0.10990 <i>b</i> 0.10937 <i>b</i>	– – 4.81097 <i>n</i>	0.10990 <i>b</i> – 0.10937 <i>b</i> – 4.81097 <i>n</i>
4	4.27542	0.12807 <i>b</i> 0.12803 <i>b</i>	– – 4.75564 <i>n</i>	0.12805 <i>b</i> – 0.12803 <i>b</i> – 4.75564 <i>n</i>
5	5.04581	0.15360 <i>b</i> 0.15363 <i>b</i>	– – 4.80318 <i>n</i>	0.15360 <i>b</i> – 0.15360 <i>b</i> – 4.80318 <i>n</i>
6	6.09849	0.18497 <i>b</i> 0.18494 <i>b</i>	0.98694 <i>e</i> 0.98691 <i>e</i> 4.78770 <i>n</i>	0.18494 <i>b</i> 0.98695 <i>e</i> 0.18494 <i>b</i> 0.98692 <i>e</i> 4.78770 <i>n</i>
12	12.7679	0.38733 <i>b</i> 0.38732 <i>b</i>	0.98696 <i>e</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78787 <i>n</i>	0.38733 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 0.38732 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78787 <i>n</i>
13	13.8785	0.42102 <i>b</i> 0.42101 <i>b</i>	0.98696 <i>e</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78717 <i>n</i>	0.42102 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 0.42100 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78717 <i>n</i>
14	14.9864	0.45462 <i>b</i> 0.45461 <i>b</i>	0.98696 <i>e</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78640 <i>n</i>	0.45462 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 0.45461 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78640 <i>n</i>
15	16.1102	0.48871 <i>b</i> 0.48870 <i>b</i>	0.98696 <i>e</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78555 <i>n</i>	0.48871 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 0.48870 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78555 <i>n</i>
16	17.2065	0.52197 <i>b</i> 0.52196 <i>b</i>	0.98696 <i>e</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78465 <i>n</i>	0.52197 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 0.52196 <i>b</i> 0.98696 <i>e</i> 4.78465 <i>n</i>

Случай  $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$  в табл. 2 соответствует задаче (2.1)–(2.4). Случай  $\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0$ ,  $\eta_{3m} = \eta_m$  соответствует задаче (2.1)–(2.4), где отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. мы имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Случай  $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m$ ,  $\eta_{3m} = 0$  соответствует преимущественно планарному типу колебаний.

Для изотропных материалов справедливы следующие равенства:

$$\frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \nu, \quad \frac{B_{66}}{B_{11}} = \frac{B_{66}}{B_{22}} = \frac{1 - \nu}{2} \quad (7.2)$$

Следовательно, в дисперсионных уравнениях и расчетах характеристик можно положить

$$B_{11} = B_{22} = 1, \quad B_{12} = \nu, \quad B_{66} = (1 - \nu)/2$$

**Заключение.** Численные расчеты показывают, что первые собственные частоты, локализованные на свободной образующей цилиндрических панели с шарнирно закрепленным краевым образующим, являются частотами преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами квазипоперечных колебаний существуют частоты незатухающих квазитангенциальных колебаний, которые не приведены в таблицах.

С увеличением  $m$  эти колебания становятся рэлеевского типа. Анализ численных результатов показывает, что при  $\epsilon_m \rightarrow 0$  свободные колебания цилиндрической панели с шарнирно закрепленным краевым образующим распадаются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания, а их частоты стремятся к частотам прямоугольной пластины с шарнирно закрепленной стороной.

Из численных результатов следует, что асимптотические формулы (6.6) дисперсионного уравнения (3.16) и представленный здесь механизм являются хорошими ориентирами для нахождения собственных частот задачи (2.1)–(2.4). Первые собственные частоты колебаний цилиндрической панели с шарнирно закрепленным образующим зависят от выбранных базисных функций, удовлетворяющих условиям свободных краев на торцах.

При  $\theta_m \rightarrow 0$  частоты колебаний свободной образующей конечной цилиндрической панели с шарнирно закрепленным краевым образующим становятся практически независимыми от базисных функций и типа закрепления другой концевой образующей [20].

Заметим, что безразмерные характеристики  $\eta_m^1$  и  $\eta_m^2$  задач с жестко закрепленной граничной образующей и шарнирно закрепленной граничной образующей соответственно, удовлетворяют неравенствам  $\eta_m^1 \geq \eta_m^2$ ;  $m = 1, \infty$ , т.е. в цилиндрической панели с шарнирно закрепленной граничной образующей могут распространяться волны с большей длиной волны по свободной образующей, чем в цилиндрической панели с жестко заземленной граничной образующей [20].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Norris A.N. Flexural edge waves // J. of Sound&Vibr. 1994. V. 171(4). P. 571–573.
2. Thompson I., Abrahams I.D. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 112(5). P. 1756–1765.
3. Grinchenko V.T. Wave motion localization effects in elastic waveguides // Int. Appl. Mech. 2005. V. 41(9). P. 988–994.
4. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
5. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292 с.



6. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
7. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Srapiomyan D.L.* Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators // *ZAMM. Z. Math. Mech.* 2013. V. 93. № 4. P. 269–283.
8. *Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Саакян Р.Д.* Собственные колебания тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленном концами // *ПММ.* 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 453–465.
9. *Власов В.З.* Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // *Строит. промышл.* 1932. № 11. С. 33–38; № 12. С. 21–26.
10. *Канторович Л.В.* Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // *Изв. АН СССР. Отд. мат. и ест. наук.* 1933. № 5. С. 647–653.
11. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В.* Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // *ИФЖ.* 1982. Т. 42. № 6. С. 1007–1013.
12. *Беспалова Е.И.* К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова // *Прикл. мех.* 2008. Т. 44. № 11. С. 99–111.
13. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510 с.
14. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
15. *Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б.* Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1982. № 3. С. 171–174.
16. *Gulghazaryan G.R.* Vibrations of semi-infinite, orthotropic cylindrical shells of open profile // *Int. Appl. Mech.* 2004. V. 40(2). P. 199–212.
17. *Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Кудиш И.И.* Собственные колебания тонкой упругой ортотропной цилиндрической панели со свободными краями // *Мех. композ. матер.* 2019. Т. 55. № 5. С. 813–836.  
<https://doi.org/10.1007/s11029-019-09834-9>
18. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.* Free Vibrations of thin elastic orthotropic cantilever cylindrical panel // in: *Advanced Problem in Mechanics II. APM 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / ed. by *Indeitsev D.A., Krivtsov A.M.* Cham: Springer, 2022. P. 441–462.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-92144-6\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-92144-6_34)
19. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.* Free localized vibrations of a thin elastic composite panel // in: *Mechanics of High-Contrast Elastic Solids. Advanced Structured Materials. Vol. 187* / ed. by *Altenbach H., Prikazchikov D., Nobili A.* Cham: Springer, 2023. P. 91–118.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-031-24141-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24141-3_7)
20. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.* Free vibrations of Thin Elastic orthotropic cylindrical panel with rigid-clamped edge generator // *ASPU after Kh. Abovyan. Sci. Bull.* 2023. V. 2. № 45. P. 46–72.  
<https://doi.org/10.24234/scientific.v2i45.93>

## Free Vibrations of Thin Elastic Orthotropic Cylindrical Panel with Hinge-Mounted Edge Generator

**G. R. Ghulghazaryan<sup>a,#</sup>, L. G. Ghulghazaryan<sup>a,b,##</sup>**

<sup>a</sup>*Armenian State Pedagogical University, Yerevan, Armenia*

<sup>b</sup>*Institute of Mechanics of NAS Armenia, Yerevan, Armenia*

<sup>#</sup>*e-mail: ghulghazaryangurgen08@aspu.am*

<sup>##</sup>*e-mail: ghulghazaryanlusine08@aspu.am*

Using the system of equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells, the free vibrations of a thin elastic orthotropic cylindrical panel with hinge-mounted edge generator are investigated. To calculate the natural frequencies and to identify the respective natural modes, the generalized Kantorovich–Vlasov method of

reduction to ordinary differential equations is used. Dispersion equations for finding the natural frequencies of possible types of vibrations are derived. An asymptotic relation between the dispersion equations of the problems at hand and the analogous problem for a rectangular plate is established. A mechanism is given by which possible types of edge oscillations are distinguished. As examples, the values of dimensionless characteristics of natural frequencies are derived for an orthotropic cylindrical panels.

*Keywords:* free vibrations, cylindrical panel, hinged fastening

## REFERENCES

1. *Norris A.N.* Flexural edge waves // *J. of Sound&Vibr.*, 1994, vol. 171(4), pp. 571–573.
2. *Thompson I., Abrahams I.D.* On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1994, vol. 112(5), pp. 1756–1765.
3. *Grinchenko V.T.* Wave motion localization effects in elastic waveguides // *Int. Appl. Mech.*, 2005, vol. 41(9), pp. 988–994.
4. *Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kassovich L.Yu.* Boundary and Interface Resonant Phenomena in Elastic Bodies. Moscow: Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian)
5. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic Methods. Moscow: Fizmatlit, 2009. 292 p. (in Russian)
6. *Gol'denveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E.* Free Vibrations of Thin Elastic Shells. Moscow: Nauka, 1979. 383 p. (in Russian)
7. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Srapiionyan D.L.* Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators // *ZAMM. Z. Math. Mech.*, 2013, vol. 93, no. 4, pp. 269–283.
8. *Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Saakyan R.D.* The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges // *JAMM*, 2008, vol. 72, pp. 312–322.
9. *Vlasov V.Z.* A new practical method to design folded-plate structures and shells // *Stroit. Promysl.*, 1932, no. 11, pp. 33–38; no. 12, pp. 21–26. (in Russian)
10. *Kantorovich L.V.* A direct method for approximate solution of a problem on the minimum of a double integral // *Izv. AN SSSR, Separ. Math.&Nat. Sci.*, 1933, no. 5, pp. 647–653. (in Russian)
11. *Prokopov V.G., Bespalov E.I., Sherenkovskii Yu.V., Kantorovich L.V.* Method of reduction to ordinary differential equations and a general method for solving multidimensional problems of heat transfer // *Inzh. Fiz. zh.*, 1982, vol. 42(6), pp. 1007–1013. (in Russian)
12. *Bespalova E.I.* Solving stationary problems for shallow shells by a generalized Kantorovich–Vlasov method // *Int. Appl. Mech.*, 2008, vol. 44, pp. 1283–1293. <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0138-2>
13. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1970. 510 p. (in Russian)
14. *Ambartsumyan S.A.* General Theory of Anisotropic Shells. Moscow: Nauka, 1974. 446 p. (in Russian)
15. *Ghulghazaryan G.R., Lidskii V.B.* Density of free vibrations frequencies of a thin anisotropic shell with anisotropic layers // *Izv. AN.SSSR. MTT*, 1982, no. 3, pp. 171–174.
16. *Gulgazaryan G.R.* Vibrations of semi-infinite, orthotropic cylindrical shells of open profile // *Int. Appl. Mech.*, 2004, vol. 40(2), pp. 199–212.
17. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Kudish I.I.* Free vibrations of a thin elastic orthotropic cylindrical panel with free edges // *Mech. of Compos. Mater.*, 2019, vol. 55(5), pp. 557–574. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09834-9>
18. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.* Free vibrations of thin elastic orthotropic cantilever cylindrical panel // in: *Advanced Problem in Mechanics II. APM 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / ed. by *Indeitsev D.A., Krivtsov A.M.* Cham: Springer, 2022. pp. 441–462. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-92144-6\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-92144-6_34)
19. *Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.* Free localized vibrations of a thin elastic composite panel // in: *Mechanics of High-Contrast Elastic Solids. Advanced Structured Materials. Vol. 187* / *Altenbach H., Prikazhnikov D., Nobili A.* Cham: Springer, 2023. pp. 91–118. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-24141-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24141-3_7)

20. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G. Free vibrations of thin elastic orthotropic cylindrical panel with rigid-clamped edge generator // ASPU after Kh. Abovyan. Sci. Bull., 2023, vol. 2, no. 45, pp. 46–72.  
<https://doi.org/10.24234/scientific.v2i45.93>

**Приложение.** Аналитические выражения для  $m_{ij}$  приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= H\chi_1^6 + d_1\chi_1^4 + d_2\chi_1^2 + d_3, \quad m_{12} = H\bar{f}_5 + d_1\bar{f}_3 + d_2\bar{f}_1 \\
 m_{13} &= H\bar{f}_4 + d_1\bar{f}_2 + d_2; \quad m_{14} = Hf_3 + d_1f_1 \\
 m_{21} &= T\chi_1^5 + d_4\chi_1^3 + d_5\chi_1, \quad m_{22} = T\bar{f}_4 + d_4\bar{f}_2 + d_5, \quad m_{23} = T\bar{f}_3 + d_4\bar{f}_1, \quad m_{24} = Tf_2 + d_4 \\
 m_{31} &= F\chi_1^6 + d_6\chi_1^4 + d_7\chi_1^2 + d_8, \quad m_{32} = F\bar{f}_5 + d_6\bar{f}_3 + d_7\bar{f}_1 \\
 m_{33} &= F\bar{f}_4 + d_6\bar{f}_2 + d_7, \quad m_{34} = Ff_3 + d_6f_1 \\
 m_{41} &= F\chi_1^7 + d_9\chi_1^5 + d_{10}\chi_1^3 + d_{11}\chi_1, \quad m_{42} = F\bar{f}_6 + d_9\bar{f}_4 + d_{10}\bar{f}_2 + d_{11} \\
 m_{43} &= F\bar{f}_5 + d_9\bar{f}_3 + d_{10}\bar{f}_1, \quad m_{44} = Ff_4 + d_9f_2 + d_{10} \\
 m_{i5} &= (-1)^{i-1}m_{i1}\exp(z_1), \quad m_{i6} = (-1)^{i-1}(m_{i2}\exp(z_2) + m_{i1}[z_1z_2]) \\
 m_{i7} &= (-1)^{i-1}(m_{i3}\exp(z_3) + m_{i2}[z_2z_3] + m_{i1}[z_1z_2z_3]) \\
 m_{i8} &= (-1)^{i-1}(m_{i4}\exp(z_4) + m_{i3}[z_3z_4] + m_{i2}[z_2z_3z_4] + m_{i1}[z_1z_2z_3z_4]); \quad i = \overline{1,4} \\
 n_{5j} &= m_{1j}; \quad j = \overline{1,4} \\
 n_{61} &= S\chi_1^4 + g_1\chi_1^2 + g_2, \quad n_{62} = S\bar{f}_3 + g_1\bar{f}_1, \quad n_{63} = Sf_2 + g_1, \quad n_{64} = Sf_1 \\
 n_{71} &= F(1 + a^2\varepsilon_m^2)\chi_1^4 + g_3\chi_1^2 + g_4, \quad n_{72} = F(1 + a^2\varepsilon_m^2)\bar{f}_3 + g_3\bar{f}_1 \\
 n_{73} &= F(1 + a^2\varepsilon_m^2)\bar{f}_2 + g_3, \quad n_{74} = F(1 + a^2\varepsilon_m^2)f_1, \quad n_{8j} = m_{3j}; \quad j = \overline{1,4} \\
 m_{i1} &= n_{i1}\exp(z_1), \quad m_{i2} = n_{i2}\exp(z_2) + n_{i1}[z_1z_2] \\
 m_{i3} &= n_{i3}\exp(z_3) + n_{i2}[z_2z_3] + n_{i1}[z_1z_2z_3] \\
 m_{i4} &= n_{i4}\exp(z_4) + n_{i3}[z_3z_4] + n_{i2}[z_2z_3z_4] + n_{i1}[z_1z_2z_3z_4]; \quad i = \overline{5,8} \\
 m_{5,4+j} &= n_{5,j}, \quad m_{6,4+j} = n_{6,j}, \quad m_{7,4+j} = n_{7,j}, \quad m_{8,4+j} = n_{8,j}; \quad j = \overline{1,4} \\
 H &= -a^2 \frac{B_{22}}{B_{11}}, \quad T = \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}a^2, \quad F = \frac{B_{22}}{B_{11}}, \quad S = \frac{(B_{12} + B_{66})B_{22}}{B_{11}B_{66}}a^2 \\
 d_1 &= a^2 \left( \frac{B_{11}B_{22}\beta'' - B_{12}^2\beta'_m + 4B_{66}^2\beta'_m}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}(\eta_{1m}^2 + \varepsilon_m^2) \right) \\
 d_2 &= -\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2m}^2 + a^2\beta'_m \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left( \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2 - B_1 \right) - \\
 &\quad - \varepsilon_m^2 a^2 \left( \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2 - \frac{B_{11}B_{22}\beta'' - B_{12}^2\beta'_m + 4B_{66}^2\beta'_m}{B_{11}B_{22}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{П.1}$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= -(\delta_m \beta'_m - \eta_{2m}^2) \left( \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right), \quad \delta_m = 1 + 4\varepsilon_m^2 a^2 \\
d_4 &= a^2 \left( \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} \varepsilon_m^2 + B_2 - \frac{2B_{12}}{B_{11}} \beta'_m - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) \\
d_5 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{66}} + \\
&+ a^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \beta'_m \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} \beta''_m \right) - \frac{4B_{12}}{B_{11}} \beta'_m \varepsilon_m^2 a^2 \\
d_6 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - B_1 \\
d_7 &= (\eta_{2m}^2 - \beta'_m) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right) + \frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m \left( B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) + \\
&+ \varepsilon_m^2 \left( 4a^2 \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} (\beta'_m)^2 - B_1 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) \\
d_8 &= -\frac{B_{12}}{B_{22}} \beta'_m (\eta_{2m}^2 - \beta'_m \delta_m) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right) \\
d_9 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - B_1 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m \\
d_{10} &= (\eta_{2m}^2 - \beta'_m) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right) + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \beta'_m \left( B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) - \\
&+ \varepsilon_m^2 \left( B_1 + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) \\
d_{11} &= 4\varepsilon_m^2 \beta'_m \left( \frac{B_{66}}{B_{22}} B_1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \beta'_m (\eta_{2m}^2 - \beta'_m) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right) \\
g_1 &= \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} a^2 \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} - a^2 \frac{(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11} B_{66}} \beta'_m, \quad g_2 = -\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m (\delta_m - \eta_{2m}^2) \\
g_3 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 + \varepsilon_m^2 a^2) \eta_{1m}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 - B_2 - a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m + 4B_{66}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{66}} \\
g_4 &= (\eta_{2m}^2 - \beta'_m) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right) - 4a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \beta'_m \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - \beta''_m \right)
\end{aligned}$$