
УДК 539.3

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ТРЕНИЕМ ДЛЯ ШТАМПА В ВИДЕ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ, КОНТАКТИРУЮЩЕГО СО СЛОИСТЫМ ОСНОВАНИЕМ

© 2025 г. В. А. Бабешко^{1,*}, О. В. Евдокимова^{2,**}, О. М. Бабешко^{1,***}, В. С. Евдокимов^{1,****}

¹Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: babeshko41@mail.ru, **e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

e-mail: babeshko49@mail.ru, *e-mail: evdok_vova@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2024 г.

После доработки 06.10.2024 г.

Принята к публикации 15.11.2024 г.

В работе построено точное решение статической контактной задачи о действии с трением жесткого клиновидного штампа, занимающего первый квадрант, на слой изотропного композитного материала.

В отличие от многочисленных, в основном безуспешных, попыток решения этой и подобных задач аналитическими или численными методами, позволявшими выявлять лишь частичные свойства решения этой задачи, метод блочного элемента дал возможность вскрыть полную структуру ее решения. В работе доказано, что полученное решение точно удовлетворяет двумерному уравнению Винера–Хопфа для произвольной правой части. Расчет показателя особенности концентрации контактных напряжений в этой точке близок к значениям, рассчитанным численными методами в ряде работ. Доказано, что зона вблизи вершины штампа имеет превосходящую податливость при внедрении штампа в среду, по сравнению с удаленными зонами. Развитый метод применим для линейно упругих материалов и кристаллов, допускающих построение функции Грина и сводящихся к двумерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа.

Установление общего вида решения рассмотренной контактной задачи открывает возможность изучения предвестников повышения сейсмичности в горных территориях, а также совершенствования численных методов для получения более точных решений усложненных контактных задач в инженерной практике.

Ключевые слова: контактные задачи с трением, изотропный композит, интегральное уравнение Винера–Хопфа, четверть плоскости, блочный элемент, факторизация

DOI: 10.31857/S0032823525010048, EDN: BOJHWI

1. Введение. Смешанные задачи, в том числе контактные задачи, играют важную роль в самых разных областях практики. Они возникают в проблемах прочности и разрушения [1], распространения волн в упругих телах [2], акустике [3], неразрушающих методах контроля [4], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [5], теории волн в жидкости [6, 7], геофизике [8], три-

бологии [9, 10]. Исследования различных контактных задач выполнялись как аналитическими, так и численными методами в работах [9–21].

Для случаев слоистых сред построение функций Грина осуществляется применением интегральных преобразований Фурье. Заметим, что символ $K(\alpha, \beta)$ двумерного интегрального уравнения в рассматриваемой контактной задаче является изотропным при кулоновском коэффициенте трения $p = 0$ и является анизотропным при $p > 0$, так как его вид зависит от вращения. Это открывает перспективу применения разработанного в статье метода в анизотропных материалах. Создание новых конструкционных материалов, в том числе с анизотропными символами в контактных задачах, приводит к необходимости применения решений с как можно большей близостью получаемых приближенных решений к точным. Например, аппроксимация решений сплайнами, граничными элементами, собственными функциями утрачивает в приближенных решениях некоторые важные свойства контактных напряжений. В ряде случаев они не описывают концентрации контактных напряжений на границах штампов, особенно в угловых точках. Не всегда обнаруживаются податливости среды при уменьшении размеров штампов. Особое место занимают контактные задачи в областях, границы которых имеют угловые множества. В работе [22] построено точное решение контактной задачи в четверти плоскости для изотропного случая. Этот подход оказался полезным для построения решения этой контактной задачи с трением для случая анизотропного символа. В основе исследования лежит метод блочного элемента в варианте применения для интегральных уравнений. Он позволил в двумерном интегральном уравнении Винера–Хопфа с анизотропным символом обойти и перенести их на задачи вычисления контурных интегралов, что уже достаточно просто реализуется численно, а что-то может изучаться асимптотически.

2. Постановка задачи. Рассматриваются контактные задачи о действии с кулоновским трением абсолютно жесткого штампа на многослойную среду в области четверти плоскости. Предполагается, что многослойная среда представляет собой изотропный композит, для которого построена функция Грина. С ее помощью получается интегральное уравнение контактной задачи с анизотропным символом. Методы построения функций Грина для сред разных реологий достаточно детально изложены в работах [12–17]. Их особенностью является сложность ядер интегральных уравнений контактных задач, приводящая к значительным трудностям их решения. Это вызвано новым характером концентрации контактных напряжений по сравнению с более простыми контактными задачами. В работах [12–14] изучено поведение поверхностных характеристик для различных слоистых сред, применяемых в инженерной практике. Также развиты приближенные методы решения смешанных задач для таких материалов. В то же время, как показывает практика, приближенные методы не всегда улавливают все особенности решений контактных задач. В связи с этим построение точных решений позволяет развивать приближенные методы таким образом, чтобы они правильно отражали все стороны поведения напряженно-деформированного состояния контактной задачи. Особенно это важно в контактных задачах, рассматриваемых в неклассических областях, когда границы штампов содержат угловые точки. С учетом сказанного рассматривается интегральное уравнение, свойства символа которого $K(\alpha, \beta)$ свойственны контактной задаче с кулоновским трением. Функция $K(\alpha, \beta)$ является аналитической функцией, обладающей определенным асимптотическим поведением на бесконечности и не имеющая особых точек на каждой из вещественных осей.

Рассматривается интегральное уравнение Винера–Хопфа, заданное в первом квадранте [22]. Оно имеет вид рис. 1.

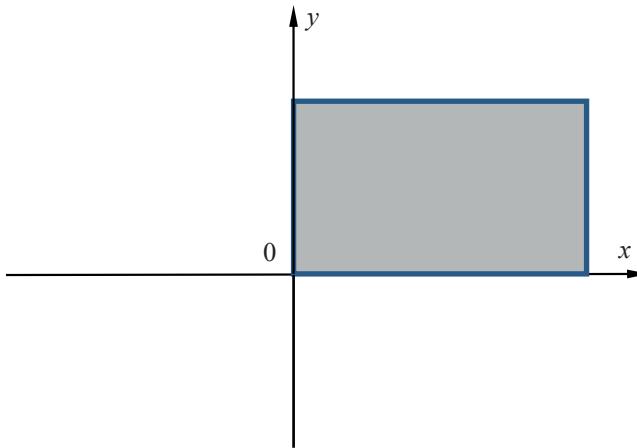


Рис. 1. На рисунке изображена часть неограниченной области первого квадранта, занятой деформируемым штампом

$$\mathbf{K}q = \int_0^\infty \int_0^\infty k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y); \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty$$

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad Q(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty q(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta$$

Функция $K(\alpha, \beta)$, является вещественной, порождается решением статической граничной задачи в многослойной среде, является непрерывной и без нулей на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1}), \quad K(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1}); \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad |\alpha|, |\beta| \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Для интегрального уравнения (2.1) справедливы теоремы единственности [17].

Теорема 1. Пусть функции $K(\alpha, \beta)$ знакопостоянна на вещественных осях α, β . Тогда интегральное уравнение (2.1) имеет единственное решение.

Принятые свойства функции $K(\alpha, \beta)$ вкладываются в требование теоремы.

Представление решения интегрального уравнения. Исследование, выполненное в работе [22], дало возможность методом факторизации и блочного элемента построить точное решение интегрального уравнения (2.1), которое дается теоремой.

Теорема 2. В условиях единственности решение интегрального уравнения (2.1) для суммируемой в четверти плоскости и имеющей непрерывные первые производные функции $f(x, y)$ по каждому параметру дается формулой

$$q(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.3)$$

$$Q(\alpha, \beta) = K^{-1} F - \frac{1}{2} \left[K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{-\alpha} + K_{+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\beta}^{-1} F \right\}_{-\beta} + \right. \\ \left. + K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} \right\}_{-\beta} + K_{+\beta+\alpha}^{-1} \left\{ K_{+\beta-\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\beta}^{-1} F \right\}_{+\beta} \right\}_{-\alpha} \right] \quad (2.4)$$

Операторы в фигурных скобках детально описаны в [14] и имеют вид

$$\begin{aligned} \{G(\alpha, \beta)\}_{+\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi; \quad \alpha \in \Pi_\alpha^+, \quad \{G(\alpha, \beta)\}_{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi; \quad \alpha \in \Pi_\alpha^- \\ \{G(\alpha, \beta)\}_{+\beta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta; \quad \beta \in \Pi_\beta^+, \quad \{G(\alpha, \beta)\}_{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta; \quad \beta \in \Pi_\beta^- \\ K_{+\alpha}(\alpha, \beta) &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi \right); \quad \alpha \in \Pi_\alpha^+ \\ K_{-\alpha}(\alpha, \beta) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi \right); \quad \alpha \in \Pi_\alpha^- \\ K_{+\beta}(\alpha, \beta) &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta \right); \quad \beta \in \Pi_\beta^+, \\ K_{-\beta}(\alpha, \beta) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta \right); \quad \beta \in \Pi_\beta^- \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь Π_α^+ , Π_α^- – комплексные области выше и ниже вещественной оси α комплексной плоскости параметра преобразования Фурье α . Аналогично Π_β^+ , Π_β^- – комплексные области выше и ниже вещественной оси β комплексной плоскости параметра преобразования Фурье β . Контуры Γ в приведенных формулах (2.5) расположены в полосах регулярности, разделяющих области Π_α^+ , Π_α^- и Π_β^+ , Π_β^- и содержащих вещественные оси [17]. Такие полосы всегда присутствуют в статических задачах.

Свойства решения (2.3) интегрального уравнения (2.1).

1. Докажем, что интегральное уравнение (2.1) точно удовлетворяется функцией (2.3), (2.4).

Внесем функцию $q(x, y)$ в интегральное уравнение (2.1), представленное в виде

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta) e^{-i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]} q(\xi, \eta) d\xi d\eta d\alpha d\beta = f(x, y)$$

После использования обозначений (2.1), получим представление

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y)$$

Внесем в эту формулу $Q(\alpha, \beta)$ из (2.4) и исследуем интеграл слева. В результате исключения членов, обращающихся интеграл в ноль, убеждаемся, что получается соотношение

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(\alpha x + \beta y)} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = f(x, y)$$

Применение метода факторизации доказывает, что носителем решения является первый квадрант.

2. Исследование концентрации контактных напряжений, даваемых полученным решением.

1) В этих решениях, представленных формулой (2.4), первый справа член формирует вырожденную составляющую решения, описывающую ее в удаленной от границ области. Поэтому оно не содержит концентраций контактных напряжений.

2) Второй и третий члены содержат граничные концентрации напряжений, свойственные одномерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа [17, 23].

Подобно одномерному случаю, они дают на прямолинейных границах штампа особенности вида $x^{-1/2}$ и $y^{-1/2}$.

Для получения этих и последующих оценок интегралов Фурье с малым параметром x , вычисляемых от непрерывных функций со свойством $S(u) = O(u^{-1})$; $u \gg 1$, имеющих вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{\lambda} e^{-iux} S(u) du; \quad m \gg 1, \quad S(u) = O(u^{-1}); \quad u \gg 1, \quad x \rightarrow 0$$

применяется замена параметра интегрирования $u = tx^{-1}$. Она дает оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} (tx^{-1})^{\lambda} e^{-it} S(tx^{-1}) x^{-1} dt \sim x^{-\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\lambda} e^{-it} O(t^{-1}) dt \sim O(x^{-\lambda}); \quad x \rightarrow 0$$

3) Четвертый и пятый члены описывают концентрацию напряжений в окрестности угловой точки штампа. Она формируется в результате оценки интеграла

$$q_0(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} \right\}_{-\beta} + K_{+\beta+\alpha}^{-1} \left\{ K_{+\beta-\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\beta}^{-1} F \right\}_{+\beta} \right\}_{-\alpha} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.6)$$

при одновременном предельном переходе $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Пока получена асимптотически точная оценка двумерного интеграла с двумя дважды факторизованными в виде произведения анизотропными функциями $K(\alpha, \beta)$. Скорее всего, оценку интеграла предстоит выполнять численно. Однако для случая достаточно простой изотропной функции $K(\alpha, \beta)$, аппроксимирующей на бесконечности некоторые общие функции, доказывается, что формула содержит наличия особенности более высокого порядка, чем на гладкой границе, что свойственно контактным задачам в угловой точке [17].

В качестве примера покажем правило построения первого члена подынтегральной функции для случая, когда простейший анизотропный символ $K(\alpha, \beta)$, обладающий свойством (2.2), имеет вид

$$K(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + B^2 \beta^2 + A^2)^{-1/2}; \quad A, B > 0 \quad (2.7)$$

При осуществлении факторизации по какому-нибудь параметру остальные находятся на вещественной оси, хотя для точности также должны стремиться к бесконечности. Факторизовав функцию $K(\alpha, \beta)$ по параметру α на верхнюю полуплоскость, получаем

$$K_{+\alpha}(\alpha, \beta) = \left[\alpha + i(B^2 \beta^2 + A^2)^{1/2} \right]^{-1/2} = O(\alpha^{-1/2}); \quad A > 0$$

Факторизацию функции $K_{+\alpha}(\alpha, \beta)$ по параметру β на верхнюю комплексную полу平面 можно выполнить точно, в интегральном виде, нормализовав $K_{+\alpha}(\alpha, \beta)$ по β на бесконечности. Для этого рассмотрим функцию, стремящуюся к единице при $|\beta| \rightarrow \infty$. Имеем

$$G(\alpha, \beta) = \sqrt{i(B^2 \beta^2 + c^2)^{1/4}} K_{+\alpha}(\alpha, \beta) \rightarrow 1; \quad |\beta| \rightarrow \infty, \quad c = \text{const}$$

отсюда

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta) = (B\beta + ic)^{-1/4} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta; \quad \beta \in \Pi_\beta^+$$

Отсюда получаем оценку

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta) \rightarrow C(B\beta + ic)^{-1/4} = O(\beta^{-1/4}); \quad |\beta| \rightarrow \infty$$

Совершенно аналогично оцениваются

$$K_\beta(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1/2}), \quad K_{+\beta+\alpha}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1/2})$$

Внося эти оценки в (2.6), получим, в результате

$$q_0(x, y) = O(r^{-3/4}); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Однако эти оценки являются грубыми, поскольку в них не учитывается одновременность стремления к бесконечности параметров α, β . Тем не менее, полученный результат позволяет на рассмотренном примере делать сравнение с ранее исследованным изотропным случаем. Приняв в формуле (2.7) $B = 1$, переходим к изотропному случаю, рассмотренному в [17, 24].

На рис. 2 приводится график особенностей в вершине клина для разных его растворов 20° ; $0 < \theta < \pi$, вычисленного в [17]. На рис. 2 необходимо рассматривать случай $\theta / \pi = 0.25$. При $\varepsilon = 0$ трение штампа с основанием отсутствует. Для оценки в [17] использованы асимптотические приближения функций Бесселя. Из него видно, что полученное в настоящей работе значение $r^{-3/4}$ концентрации контактных напряжений в угловой точке близко к вычисленному в [17].

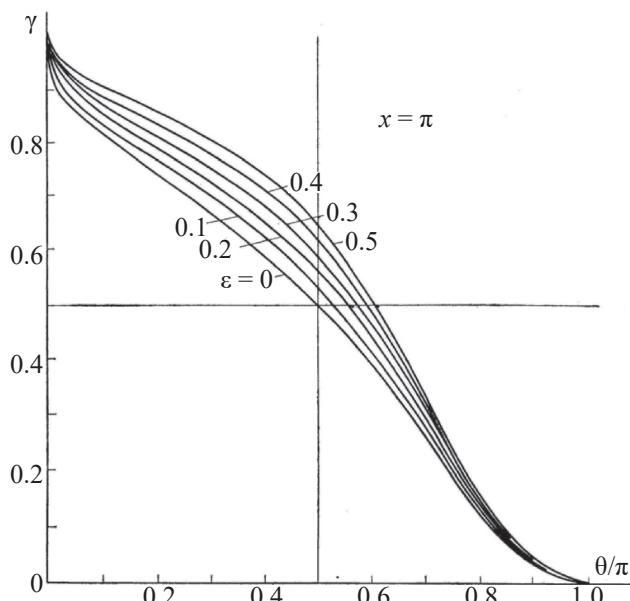


Рис. 2. Поведение параметра особенности γ в угловой точке штампа для разных коэффициентов трения ε . Для сравнения с результатом статьи необходимо брать $\varepsilon = 0$, $\theta / \pi = 0.25$.

В случае анизотропии символа $K(\alpha, \beta)$, вызванной движением штампа с кулоновским трением p по поверхности основания против направления оси α , плюс, и по направлению оси α , минус, символ $K(\alpha, \beta)$ на бесконечности, при $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow \infty$, описывается функцией [14]

$$K(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2)^{-1/2} [1 \pm \varepsilon \operatorname{sgn} \alpha]; \quad \varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} p$$

Очевидно, при $p > 0$ он анизотропен благодаря числителю. Здесь ν – коэффициент Пуассона, p – коэффициент Кулоновского трения.

Выполним факторизацию символа по параметру α . Тогда имеем [14, стр. 139, 23, стр. 41]

$$K_{+\alpha}(\alpha, \beta) = [\alpha + i(\beta^2 + A^2)^{1/2}]^{-1/2 \mp 0} = O(\alpha^{-1/2 \mp 0}); \quad A > 0, \quad \theta = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \varepsilon$$

Применяя к этому символу факторизацию по параметру β , получаем асимптотическое поведение решения в угловой точке штампа в виде

$$q_0(x, y) = O(r^{-\frac{3}{4} \mp \frac{1}{2} \theta}); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Полученные результаты охватывают все кривые, представленные на рис. 2, и, как видно, близки к ним. В будущем предстоит окончательно выяснить, какому подходу принадлежит более высокая точность.

3. Поведение решения в зоне, удаленной от угловой точки четверти плоскости. При удалении от угловой точки, оставаясь вблизи одной из границ, в формуле (2.4) в связи с наличием экспоненциально убывающих членов в статических задачах исчезают вторая и четвертая или третья и пятая функции, а также половина вырожденной составляющей. Оставшаяся составляющая решения после сокращения коэффициента $1/2$ у решения и правой части представляет решение одномерного уравнения Винера–Хопфа, соответствующего полубесконечному штампу.

4. Податливость разных зон штампа при внедрении в деформируемый материал. При рассмотрении зон вблизи угловой точки и вдали от нее обнаруживается разница в возникающих контактных напряжениях, необходимых для одинакового вертикального внедрения штампа в деформируемое основание. В зоне вблизи угловой точки контактные напряжения на границе имеют коэффициент $1/2$. Носитель этой зоны мал, и он легче внедряется в основание, как происходит и с полосовыми штампами, ширина которых уменьшается. При переходе в удаленную от угловой точки зону коэффициент $1/2$ исчезает, решение отвечает большему носителю – полуплоскости. Таким образом, подтверждено у решения (2.3), (2.4) наличие отдельных, ранее выявленных свойств точного решения интегрального уравнения (2.1).

Выводы. В настоящей работе факторизационным методом построено точное решение двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для контактной задачи с трением в четверти плоскости. Такая контактная задача сводится к двумерному интегральному уравнению свертки и просто решается применением двумерного интегрального преобразования Фурье. Предложенный в работе подход позволяет решать широкий круг контактных задач с трением для изотропных композитных материалов и получать доступные для дальнейшего численного анализа решения в интегральном виде.

В работе приведены самые общие свойства решения этого интегрального уравнения, которые, несомненно, обогатятся при исследованиях конкретных задач. Решение может быть использовано как в сейсмологии для выявления новых предвест-

ников роста сейсмичности в горных территориях, так и в инженерной практике при конструировании изделий с применением конструкционных материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1998. 520 p.
2. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids / North-Holland Ser. in Appl. Math.&Mech. Amsterdam: North-Holland, 1973. 480 p.
3. *Abrahams I.D., Wickham G.R.* General Wiener–Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // *J. of Appl. Math.* 1990. V. 50. P. 819–838.
4. *Norris A.N., Achenbach J.D.* Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material // *J. of Appl. Math.&Mech.* 1984. V. 37. P. 565–580.
5. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Иностр. лит-ра, 1962. 280 с.
6. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 5 (273). С. 136–145.
7. *Chakrabarti A., George A.J.* Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // *Appl. Math. Lett.* 1994. V. 7. P. 43–47.
8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // *Geophys., Astrophys., Fluid Dyn.* 1987. V. 39. P. 25–55.
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
10. *Горячева И.Г., Мещерякова А.Р.* Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений и изнашивания в контакте неидеально гладких поверхностей // Физич. мезомех. 2022. Т. 25. № 4. С. 44–53.
11. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
12. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
13. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
14. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. *Ватулян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
16. *Колесников В.И., Беляк О.А.* Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов. М.: Физматлит, 2021. 265 с.
17. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
18. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
19. *Kushch V.I.* Micromechanics of Composites: Multipole Expansion Approach. Oxford; Waltham: Elsevier, 2013. 489 p.
20. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite materials // *Int. J. of Engng. Sci.* 1977. V. 15. P. 237–244.
21. *Garces G., Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // *Acta Mater.* 2007. V. 55. P. 5389–5400.
22. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 628–637
23. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
24. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 257. № 2. С. 289–294.

About the Properties of Static Contact Solutions Problems for Anisotropic Composites in the Quarter Plane

V. A. Babeshko^{a,*}, O. V. Evdokimova^{b,##}, O. M. Babeshko^{a,###}, V. S. Evdokimov^{a,####}

^aKuban State University, Krasnodar, Russia

^bSouthern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia

*e-mail: babeshko41@mail.ru, ##e-mail: evdokimova.olga@mail.ru,

###e-mail: babeshko49@mail.ru, ####e-mail: evdok_vova@mail.ru

In this work, for the first time, an exact solution of the static contact problem of the action of a rigid wedge-shaped die occupying the first quadrant on a layer of composite material having arbitrary anisotropy is constructed using the block element method. Unlike numerous, mostly unsuccessful attempts to solve this and similar problems by analytical or numerical methods, which allowed us to identify only partial properties of the solution to this problem, the block element method made it possible to reveal a richer set of properties of its solutions. The solution is obtained in both coordinate and Fourier transforms. This makes it especially convenient to further study it by numerical analysis using standard computer programs. They will allow us to identify certain properties of composites as structural materials dictated by different types of anisotropies. It is shown that the obtained solution exactly satisfies the two-dimensional Wiener–Hopf equation for an arbitrary right-hand side. A number of previously unknown properties of the solution have been revealed. In particular, the obtained representation of the solution of the contact problem in a wedge gave it a general appearance. In comparison with strip stamps, it contains an additively additional term describing the concentration of contact stresses at the angular point, that is, at the top of the stamp. The calculation of the indicator of the peculiarity of the concentration of contact stresses at this point is close to the values performed by numerical methods in a number of works. The paper shows that the zone near the top of the stamp has superior malleability when the stamp is inserted into the medium, compared with remote zones. This corresponds to the estimates obtained by the example of the introduction of strip stamps narrowing in width into the layer. In the zone considered away from the top of the stamp, the exact solution turns into a solution for the case of a semi-infinite stamp. The developed method is applicable to composites of arbitrary anisotropies arising in linearly elastic materials and crystals of any cross-sections that allow the construction of the Green function, and hence the two-dimensional Wiener–Hopf integral equations. The establishment of a general type of solution to the considered contact problem opens up the possibility of studying the precursors of increased seismicity in mountainous areas, as well as improving numerical methods to obtain more accurate solutions to complicated contact problems in engineering practice.

Keywords: contact problems, anisotropy, composite, Wiener–Hopf integral equation, wedge-shaped domain, block element, factorization

REFERENCES

1. Freund L.B. Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1998. p. 520
2. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids / North-Holland Ser. in Appl. Math. & Mech. Amsterdam: North-Holland, 1973. 480 p.
3. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener–Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // J. of Appl. Math., 1990, vol. 50, pp. 819–838.
4. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material // J. of Appl. Math.&Mech., 1984, vol. 37, pp. 565–580.
5. Noble B. The Wiener–Hopf Method. Moscow: Inostr. Lit-ra, 1962. 280 p. (in Russian)
6. Tkacheva L.A. The planar problem of vibrations of a floating elastic plate under the action of periodic external load // Appl. Mech.&Tech. Phys., 2004, vol. 45, no. 5 (273), pp. 136–145. (in Russian)
7. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // Appl. Math. Lett., 1994, vol. 7, pp. 43–47.

8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // *Geophys., Astrophys., Fluid Dyn.*, 1987, vol. 39, pp. 25–55.
9. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
10. *Goryacheva I.G.*, Modeling of accumulation of contact fatigue damage and wear in contact of imperfectly smooth surfaces // *Phys. Mesomech.*, 2022, vol. 25, no. 4, pp. 44–53. (in Russian)
11. *Bazhenov V.G., Igumnov L.A.* Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements. Moscow: Fizmatlit, 2008. 352 p. (in Russian)
12. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dynamics of the Surface of Inhomogeneous Media. Moscow: Fizmatlit, 2009. 312 p. (in Russian)
13. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dynamic Contact Problems for Prestressed Bodies. Moscow: Fizmatlit, 2002. 240 p. (in Russian)
14. *Vorovich I.I., Babeshko V.A., Prakhina O.D.* Dynamics of Massive Bodies and Resonant Phenomena in Deformable Media. Moscow: Nauka, 1999. 246 p. (in Russian)
15. *Vatulyan A.O.* Contact problems with coupling for an anisotropic layer // *PMM*, 1977, vol. 41, iss. 4. (in Russian)
16. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A.* Mathematical Models and Experimental Studies – The Basis for the Design of Heterogeneous Antifriction Materials. Moscow: Fizmatlit, 2021. 265 p. (in Russian)
17. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)
18. *Christensen R.* Introduction to the Mechanics of Composites. Moscow: Mir, 1982. 335 p.
19. *Kushch V.I.* Micromechanics of Composites: Multipole Expansion Approach. Oxford; Waltham: Elsevier, 2013. 489 p.
20. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite materials // *Int. J. of Engng. Sci.*, 1977, vol. 15, pp. 237–244.
21. *Garces G., Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // *Acta Mater.*, 2007, vol. 55, pp. 5389–5400.
22. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Exact solution to the contact problem in a quarter-plane of a multilayer medium by the universal simulation method // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 2058–2065.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422080039>