ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2025, том 89, № 1, с. 17–25

УДК 517.95

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Г. Я. Дынникова[1,*]

[1]*МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ Механики, Москва, Россия*

[*]*e-mail: dyn@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 28.06.2024 г.
После доработки 20.12.2024 г.
Принята к публикации 20.12.2024 г.

Показано, что при произвольном конформном отображении области двумерного течения вязкой сжимаемой жидкости циркуляция скорости и расход жидкости на любом замкнутом или незамкнутом контуре сохраняются. Выведены преобразованные нестационарные уравнения Навье–Стокса, неразрывности и баланса тепла, которым подчиняются аэродинамические параметры в отображенной области.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, конформное отображение, нестационарные двумерные течения, вязкая сжимаемая жидкость

DOI: 10.31857/S0032823525010023, **EDN:** BOLSMJ

1. Введение. Как известно, метод конформных отображений широко применяется при исследовании потенциальных течений идеальной жидкости [1–5]. Это обусловлено инвариантностью уравнения Лапласа при конформных отображениях и удобствами, связанными с переходом к простым геометрическим формам, для которых существуют аналитические решения через функции Грина или в виде разложений в ряды. Кроме того, в случае простых геометрических форм задача построения сеток упрощается.

В [6] конформное отображение использовано для моделирования стационарного плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости вокруг цилиндра произвольного сечения. При этом выведено соответствующее преобразование стационарных уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока – завихренность.

В работе [7] конформное отображение было применено для обобщения ранее разработанного в [8] эффективного алгоритма расчета нестационарного обтекания кругового цилиндра на случай цилиндрических тел произвольного сечения. При этом течение моделировалось бессеточным лагранжевым методом Вязких Вихревых Доменов. Переход в область конформного отображения осуществлялся на каждом шаге только для вычисления циркуляций вихревых частиц, образующихся на текущем шаге, тогда как перемещение частиц совершалось в соответствии с уравнениями Навье–Стокса в обычной плоскости. В работе [9] получено преобразование нестационарных уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости при конформном отображении. Это позволило усовершенствовать метод, предложенный в [7], и осуществлять перемещение частиц, не возвращаясь в физическую плоскость. Разработанный метод позволил многократно сократить время расчета с высоким разрешением пограничного слоя и воспроизвести кризис сопротивления эллиптического цилиндра.

Интересно, что преобразованное уравнение Навье–Стокса несжимаемой жидкости по форме незначительно отличается от обычного.

Обычное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)$$

Преобразованное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} - \mathbf{u}' \times J\boldsymbol{\omega}' + \nu \nabla' \times J\boldsymbol{\omega}' = -\nabla' \left(\frac{p}{\rho} + J\frac{u'^2}{2} \right)$$

Отличие состоит только в том, что в преобразованном уравнении в трех местах присутствует множитель J – Якобиан преобразования.

В данной работе впервые выведено преобразование нестационарных уравнений Навье–Стокса, включая уравнение неразрывности и баланса тепла, вязкой сжимаемой среды. Сложность этой задачи заключается в том, что ни комплексного потенциала, ни функции тока в данном случае не существует. Поэтому обычные методы теории функций комплексной переменной не применялись. Использовались методы векторного анализа.

2. Свойства вихревых несоленоидальных полей при конформном отображении

Рассмотрим конформное отображение области S, ограниченной кривой C, в область S' с границей C': $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x})$.

Пусть точка $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ отображается в точку $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1'(x_1, x_2) \\ x_2'(x_1, x_2) \end{pmatrix}$. Приращению $\Delta\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{x}$ соответствует приращение $\Delta\mathbf{x}'$ вектора $\mathbf{x}'$

$$\Delta\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2}\Delta x_2 \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2}\Delta x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{x}; \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{J}$ – матрица Якоби. Известно, что при конформном преобразовании справедливы условия Коши–Римана [1]

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = -\frac{\partial x_2'}{\partial x_1},$$

откуда следует, что матрица Якоби конформного преобразования представляет собой матрицу поворота $\mathbf{O}$, умноженную на положительный коэффициент, равный квадратному корню из якобиана J, т.е.

$$\mathbf{J} = \sqrt{J}\mathbf{O}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad J = \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} \right)^2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}$$

Оператор Гамильтона $\nabla = \mathbf{e}_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ связан с оператором $\nabla' = \mathbf{e}_1\dfrac{\partial}{\partial x'_1} + \mathbf{e}_2\dfrac{\partial}{\partial x'_2}$ формулой

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1'} + \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2'} \\ \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1'} + \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2'} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^T \cdot \nabla' = \sqrt{J}\mathbf{O}^{-1} \cdot \nabla' \tag{2.2}$$

Пусть в области S задано поле скорости $\mathbf{u}$, ротор и дивергенция которого не равны нулю. Обычно конформные преобразования применяют в случае потенциальных соленоидальных полей, для которых существует комплексный потенциал $\varsigma = \varphi + i\psi$. Из равенства потенциалов в точках физической и отображенной областей и определения скорости как $\mathbf{u} = \nabla\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}' = \nabla'\varphi(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$ следует

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sqrt{J}\mathbf{O}^{-1} \cdot \mathbf{u}' \\ \mathbf{u}' &= \frac{1}{\sqrt{J}}\mathbf{O} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{2.3}$$

В случае, когда ротор и дивергенция поля скорости не равны нулю, комплексный потенциал не существует. В этом случае мы используем равенство (2.3) как определение скорости $\mathbf{u}'$ в отображенной области.

Покажем, что циркуляция скорости $\mathbf{u}'$ по произвольной кривой в S' равна циркуляции скорости $\mathbf{u}$ по соответствующей кривой в S. Используя (2.1) и (2.3), запишем:

$$\int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{x}' = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \left(\frac{1}{\sqrt{J}}\mathbf{O} \cdot \mathbf{u}\right) \cdot \left(\sqrt{J}\mathbf{O} \cdot d\mathbf{x}\right)$$

Поскольку скалярное произведение инвариантно относительно поворота $\left(\mathbf{O} \cdot \mathbf{u}\right) \cdot \left(\mathbf{O} \cdot d\mathbf{x}\right) = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$, получаем

$$\int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{x}' = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

Рассмотрим бесконечно малую область $\Delta s'$, ограниченную контуром c'. Согласно теореме Стокса циркуляция скорости по этому контуру равна интегралу $\oint_{c'} \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{x}' = \int_{\Delta s'} \omega' ds'$, который в случае непрерывной функции $\omega' = \nabla' \times \mathbf{u}'$ при $\Delta s' \to 0$ равен $\omega'\Delta s'$. С другой стороны, аналогичный интеграл в физической плоскости равен $\oint_{c} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Delta s} \omega ds = \omega\Delta s$. Из равенства (2.4) и отношения площадей $\Delta s'/\Delta s = J$ вытекает соотношение

$$\nabla \times \mathbf{u} = J\nabla' \times \mathbf{u}' \tag{2.5}$$

Докажем равенство расходов жидкости по соответствующим криволинейным отрезкам в физической и отображенной областях

$$\int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}' dl' = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой $\mathbf{n}dl = \mathbf{e}_z \times d\mathbf{x}$. Используя (2.1) и (2.3), запишем:

$$\int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}' dl' = \int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \mathbf{u}' \cdot \left(\mathbf{e}_z \times d\mathbf{x}'\right) = \mathbf{e}_z \cdot \int_{\mathbf{x}_1'}^{\mathbf{x}_2'} \left(d\mathbf{x}' \times \mathbf{u}'\right) = \mathbf{e}_z \cdot \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \left(\sqrt{J}\mathbf{O} \cdot d\mathbf{x}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{J}}\mathbf{O} \cdot \mathbf{u}\right)$$

Очевидно, что векторное произведение $\left(\mathbf{O}\cdot d\mathbf{x}\right)\times\left(\mathbf{O}\cdot\mathbf{u}\right)$ равно $d\mathbf{x}\times\mathbf{u}$, так как векторы d**x** и **u** повернуты в плоскости на один и тот же угол, откуда следует (2.6). Применяя формулу Стокса к интегралам (2.6), взятым по замкнутым контурам вокруг бесконечно малых площадок, получим

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = J\nabla'\cdot\mathbf{u}' \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) также справедливо для любого вектора **w**, если $\mathbf{w} = \sqrt{J}\mathbf{O}^{-1}\cdot\mathbf{w}'$:

$$\nabla\cdot\mathbf{w} = \left(\sqrt{J}\mathbf{O}^{-1}\nabla'\right)\cdot\left(\sqrt{J}\mathbf{O}^{-1}\mathbf{w}'\right) = J\nabla'\cdot\mathbf{w}' \tag{2.8}$$

3. Преобразование Уравнений Навье–Стокса при конформном отображении

Пусть в плоской области S, ограниченной кривой C, имеется нестационарное течение вязкой сжимаемой жидкости, удовлетворяющее уравнениям Навье–Стокса

$$\begin{gathered}\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\cdot p + \rho\mathbf{F} + \nabla\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}\right) - \nabla\left(\left(\frac{2}{3}\mu - \varsigma\right)\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\\ \dot{S}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где p, ρ – давление и плотность жидкости соответственно, μ, ζ – коэффициенты вязкости.

Будем полагать, что в области конфрормного отображения S', ограниченной кривой C', функции p, ρ, μ, ζ равны аналогичным функциям в соответствующих точках области S, а скорость **u'** определена формулой (2.3).

При конформном отображении полная производная скорости с учетом формулы (2.5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\frac{u^2}{2} - \mathbf{u}\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right) =\\ &= \hat{\mathbf{A}}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}}\cdot\nabla'\frac{Ju'^2}{2} - \left(\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}'\right)\times\left(J\nabla\times\mathbf{u}'\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\hat{\mathbf{A}} = \sqrt{J}\mathbf{O}^{-1}$.

Последнее слагаемое в правой части равно $\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{u}'\times\left(J\nabla'\times\mathbf{u}'\right)\right)$, так как для любого вектора **A** в плоскости XY поворот его на любой угол в этой плоскости приводит к повороту векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{e}_z$ на тот же угол, т.е. $\left(\mathbf{O}^{-1}\cdot\mathbf{a}\right)\times\mathbf{e}_z = \mathbf{O}^{-1}\cdot\left(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_z\right)$. В результате, выражение (3.2) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla'\frac{Ju'^2}{2} - \mathbf{u}'\times\left(J\nabla'\times\mathbf{u}'\right)\right) = \hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} + J\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla'\right)\mathbf{u}' + \frac{u'^2}{2}\nabla' J\right) \tag{3.3}$$

Градиент давления при переходе в область S' имеет вид

$$\nabla p = \hat{\mathbf{A}}\cdot\nabla' p \tag{3.4}$$

Если сила **F** является потенциальной $\mathbf{F} = \nabla H$, то

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\nabla' H = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{F}' \tag{3.5}$$

В противном случае будем считать, что $\mathbf{F}' = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\cdot\mathbf{F}$ по определению.

Рассмотрим преобразование выражения $\nabla\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}\right)$:

$$\nabla\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right)=\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\quad(3.6)$$

Первое слагаемое в правой части (3.6) запишем в векторном виде и используем формулу двойного векторного произведения

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\mu\left(\nabla\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\mu\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)=-\mu\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right)+2\mu\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\quad(3.7)$$

Используя при переходе в область конформного отображения равенства (2.5) и (2.7), получим

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\mu\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(-\nabla'\times\left(J\nabla'\times\mathbf{u}'\right)+2\nabla'\left(J\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)\right)\quad(3.8)$$

Выражение в скобке в правой части (3.8) представим в виде суммы двух векторных функций, одна из которых линейно зависит от J, а вторая от ∇J.

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{V}^{(1)}+\mathbf{V}^{(2)}\right)\\&\mathbf{V}^{(1)}=\mu J\left(-\nabla'\times\left(\nabla'\times\mathbf{u}'\right)+2\nabla'\left(\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)\right)\\&\mathbf{V}^{(2)}=-\mu\left(\nabla'J\right)\times\left(\nabla'\times\mathbf{u}'\right)+2\left(\nabla'J\right)\left(\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)\end{aligned}\quad(3.9)$$

По аналогии с (3.6) и (3.7) получим

$$\mathbf{V}^{(1)}=\mu J\frac{\partial}{\partial x'_k}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k}+\frac{\partial u'_k}{\partial x'_i}\right)=2\mu J\nabla'\cdot\dot{\mathbf{S}}'\quad(3.10)$$

Вектор $\mathbf{V}^{(2)}$ можно записать в виде

$$\mathbf{V}^{(2)}=\mu\left(\frac{\partial J}{\partial x'_k}\frac{\partial u'_l}{\partial x'_m}\xi_{ik}\xi_{lm}+2\frac{\partial J}{\partial x'_i}\frac{\partial u'_l}{\partial x'_l}\right),\quad\xi_{11}=\xi_{22}=0,\quad\xi_{12}=-\xi_{21}=1\quad(3.11)$$

Второе слагаемое в правой части (3.6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\right)-u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}=\\&=\left(\left(\nabla\mu\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\nabla\left(\mathbf{u}\cdot\left(\nabla\mu\right)\right)-\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\left(\nabla\mu\right)\end{aligned}\quad(3.12)$$

Введем обозначение $\mathbf{g}=\nabla\mu$ и используем формулу ротора векторного произведения $\nabla\times\left(\mathbf{u}\times\mathbf{g}\right)=\left(\mathbf{g}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\mathbf{u}\left(\nabla\cdot\mathbf{g}\right)-\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{g}-\mathbf{g}\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)$ получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\left(\mathbf{g}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\nabla\left(\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\right)-\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{g}=\\&=\nabla\times\left(\mathbf{u}\times\mathbf{g}\right)-\mathbf{u}\left(\nabla\cdot\mathbf{g}\right)+\mathbf{g}\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\nabla\left(\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\right)=\\&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\nabla'\times\left(J\mathbf{u}'\times\mathbf{g}'\right)-\mathbf{u}'\left(J\nabla'\cdot\mathbf{g}'\right)+\mathbf{g}'\left(J\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)+\nabla'\left(J\mathbf{g}'\cdot\mathbf{u}'\right)\right)\end{aligned}\quad(3.13)$$

Так же, как и в предыдущем случае, представим выражение в скобке в правой части в виде суммы двух слагаемых

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{V}^{(3)}+\mathbf{V}^{(4)}\right)\\
&\mathbf{V}^{(3)}=J\left(\nabla'\times\left(\mathbf{u}'\times\mathbf{g}'\right)-\mathbf{u}'\left(\nabla'\cdot\mathbf{g}'\right)+\mathbf{g}'\left(\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)+\nabla'\left(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{u}'\right)\right)=\\
&=J\frac{\partial \mu}{\partial x_k'}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k'}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_i'}\right)=2J\left(\nabla'\mu\right)\cdot\dot{\mathbf{S}}'\\
&\mathbf{V}^{(4)}=\left(\nabla'J\right)\times\left(\mathbf{u}'\times\mathbf{g}'\right)+\left(\nabla'J\right)\left(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{u}'\right)=\\
&=\frac{\partial J}{\partial x_k'}u_l'\frac{\partial \mu}{\partial x_m'}\xi_{ik}\xi_{lm}+\frac{\partial J}{\partial x_i'}u_l'\frac{\partial \mu}{\partial x_l'}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Подставляя (3.9) и (3.14) в (3.6), получим

$$
\nabla\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}\right)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{V}^{(1)}+\mathbf{V}^{(2)}+\mathbf{V}^{(3)}+\mathbf{V}^{(4)}\right)
\tag{3.15}
$$

Из (3.10), (3.11) и (3.14) следует

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{V}^{(1)}+\mathbf{V}^{(3)}=2J\left(\mu\nabla'\cdot\dot{\mathbf{S}}'+\left(\nabla'\mu\right)\cdot\dot{\mathbf{S}}'\right)=J\nabla'\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}'\right)\\
&\mathbf{V}^{(2)}+\mathbf{V}^{(4)}=\frac{\partial J}{\partial x_k'}\left(u_l'\frac{\partial \mu}{\partial x_m'}+\mu\frac{\partial u_l'}{\partial x_m'}\right)\xi_{ik}\xi_{lm}+\\
&+\frac{\partial J}{\partial x_i'}\left(\mu\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}+u_l'\frac{\partial \mu}{\partial x_l'}\right)+\mu\frac{\partial J}{\partial x_i'}\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}=\\
&=\frac{\partial J}{\partial x_k'}\left(\frac{\partial\left(\mu u_l'\right)}{\partial x_m'}\xi_{ik}\xi_{lm}+\delta_{ik}\frac{\partial\left(\mu u_l'\right)}{\partial x_l'}\right)+\mu\frac{\partial J}{\partial x_i'}\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Последнее слагаемое в правой части (3.1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)=\\
&=-\nabla\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\nabla\cdot\mathbf{u}\right)=-\hat{\mathbf{A}}\cdot\nabla'\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)J\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)=\\
&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(\mathbf{V}^{(5)}+\mathbf{V}^{(6)}\right)\\
&\mathbf{V}^{(5)}=-J\nabla'\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)\\
&\mathbf{V}^{(6)}=-\left(\nabla'J\right)\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\nabla'\cdot\mathbf{u}'
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Подставляя выражения (3.3)–(3.5), (3.16), (3.17) в уравнение Навье–Стокса (3.1) и вынося за скобки оператор $\hat{\mathbf{A}}$, получаем

$$
\hat{\mathbf{A}}\cdot\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}+J\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla'\right)\mathbf{u}'+\frac{u'^2}{2}\nabla'J\right)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\left(-\nabla'p+\mathbf{F}'+\sum_{j=1}^{6}\mathbf{V}^{(j)}\right)
$$

Если матрица $\hat{\mathbf{A}}$ является невырожденной, т.е. $J\neq 0$ (отметим, что при отображении профиля в круг Якобиан в угловой точке обращается в бесконечность), то умножая обе части уравнения на обратную ей матрицу $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$, а также используя выражения (3.16) и (3.17) для функций $\mathbf{V}^{(j)}$, получим преобразованное уравнение Навье–Стокса, справедливое в области S'.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}+J\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla'\right)\mathbf{u}'+\frac{u'^2}{2}\nabla' J\right)=-\nabla' p+\mathbf{F}'+J\left(\nabla'\cdot\left(2\mu\dot{\mathbf{S}}'\right)-\nabla'\left(\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)\right)+\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D}=-\left(\nabla' J\right)\times\left(\nabla'\times\left(\mu\mathbf{u}'\right)\right)+\left(\nabla' J\right)\left(\nabla'\cdot\left(\mu\mathbf{u}'\right)+\left(\frac{1}{3}\mu+\varsigma\right)\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)=$$

$$=\frac{\partial J}{\partial x_k'}\frac{\partial\left(\mu u_l'\right)}{\partial x_m'}\left(\xi_{ik}\xi_{lm}+\delta_{ik}\delta_{lm}\right)+\left(\frac{1}{3}\mu+\varsigma\right)\frac{\partial J}{\partial x_i'}\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}$$

4. Преобразование уравнений неразрывности и баланса тепла

Из (2.8) следует, что $\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{u}\right)=J\nabla'\cdot\left(\rho\mathbf{u}'\right)$. Следовательно, уравнение неразрывности в отображенной области имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-J\nabla'\cdot\left(\rho\mathbf{u}'\right)$$

Уравнение баланса тепла запишем в виде [10]

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(h+\frac{u^2}{2}\right)+\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\left(h+\frac{u^2}{2}\right)=\\&=\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}+\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\mu\nabla u^2-\mu\mathbf{u}\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right)-\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\mathbf{u}\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\frac{\mu}{\sigma}\nabla h\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где h – энтальпия.

Выражение в левой части уравнения преобразуем с учетом равенства $\mathbf{u}\cdot\nabla=\left(\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}'\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{A}}\cdot\nabla'\right)=J\mathbf{u}'\cdot\nabla'$. Получим

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(h+\frac{u^2}{2}\right)+\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\left(h+\frac{u^2}{2}\right)=\\&=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(h+J\frac{u'^2}{2}\right)+\rho J\mathbf{u}'\cdot\nabla'\left(h+J\frac{u'^2}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}=\left(\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{F}'\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}'\right)=J\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'$

Выражение в правой части (4.1)

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left(\mu\nabla u^2-\mu\mathbf{u}\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right)-\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\mathbf{u}\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\frac{\mu}{\sigma}\nabla h\right)=\\&=J\nabla'\cdot\left(\mu\nabla'\left(Ju'^2\right)-\mu\mathbf{u}'\times J\left(\nabla'\times\mathbf{u}'\right)-\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\mathbf{u}'J\left(\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)+\frac{\mu}{\sigma}\nabla' h\right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Здесь использованы равенства (2.5), (2.7) и (2.8)

В результате, подставляя выражения (4.2) и (4.3) в (4.1), получаем уравнение баланса тепла в области конформного отображения, которое отличается от исходного только наличием множителя J в некоторых слагаемых.

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(h+J\frac{u'^2}{2}\right)+\rho J\mathbf{u}'\cdot\nabla'\left(h+J\frac{u'^2}{2}\right)=\\&=\rho J\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'+\frac{\partial p}{\partial t}+J\nabla'\cdot\left(\mu\nabla'\left(Ju'^2\right)-\mu\mathbf{u}'\times J\left(\nabla'\times\mathbf{u}'\right)-\left(\frac{2}{3}\mu-\varsigma\right)\mathbf{u}'J\left(\nabla'\cdot\mathbf{u}'\right)+\frac{\mu}{\sigma}\nabla' h\right)\end{aligned}$$

5. Граничные условия

Условию прилипания на неподвижном теле соответствуют условия

$$\mathbf{u}\Big|_C = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{u}'\Big|_{C'} = 0$$

$$\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)p\Big|_C = 0 \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{n}'\cdot\nabla'\right)p\Big|_{C'} = 0$$

В общем случае, если заданы тангенциальная u_t и нормальная u_n скорости

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_l\Big|_C = u_t \;\Rightarrow\; \mathbf{u}'\cdot\mathbf{e}'_l\Big|_{C'} = \sqrt{J}u_t$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\Big|_C = u_n \;\Rightarrow\; \mathbf{u}'\cdot\mathbf{n}'\Big|_{C'} = \sqrt{J}u_n$$

Условия на бесконечности определяются равенством $\mathbf{u}_\infty = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}'_\infty$.

Заключение

Выведены преобразованные уравнения Навье–Стокса, неразрывности и баланса тепла, справедливые при произвольном невырожденном конформном отображении. Решая эти уравнения в отображенной области, можно получить поля давления, плотности и температуры, которые равны давлению, плотности и температуре в соответствующих точках физической области. Легко показать, что линии тока в физической плоскости при конформном отображении переходят в линии тока в отображенной плоскости. В самом деле, если линия тока описывается функцией $\mathbf{x}(\tau)$, где τ – параметр, то $\dfrac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{u} = 0$, и в отображенной области будет справедливо аналогичное равенство $\dfrac{d\mathbf{x}'(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{u}' = 0$, т.к. $\dfrac{d\mathbf{x}'(\tau)}{d\tau} = \sqrt{J}\mathbf{O}\cdot\dfrac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}$, $\mathbf{u}' = \dfrac{1}{\sqrt{J}}\mathbf{O}\cdot\mathbf{u}$, т.е. оба вектора поворачиваются на один и тот же угол.

Полученные преобразованные уравнения отличаются от исходных только наличием зависимости от Якобиана преобразования. При решении этих уравнений сеточными методами значение Якобиана может быть предварительно вычислено на сетке и использовано на каждом шаге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
2. *Rabinovich B.I., Tyurin Y.V.* Numerical Conformal Mapping in Two-dimensional Hydrodynamics & Related Problems of Electrodynamics and Elasticity Theory. Moscow: Space Res. Inst. of the RAS, 2000. 312 p.
3. *Титова А.А.* Задача о потоке идеальной жидкости с сингулярным стоком во впадине на дне // Сиб. ж. Индустр. матем. 2021. Т. 24. № 3. С. 101–121.
4. *Шамин Р.В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Соврем. матем. Фундам. направл. 2008. Т. 28. С. 3–144.
5. *Дьяченко А.И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 27–29.
6. *Mizumoto H.* A note on the numerical treatment of Navier–Stokes equations. I // J. of the Phys. Soc. of Japan. 1973. V. 34. № 5. P. 1452–1456.
7. *Dynnikova G.Y., Guvernyuk S.V., Demchenko Y.V. et al.* An efficient algorithm for calculating boundary elements in vortex methods // Engng. Anal. with Boundary Elements. 2023. V. 151. P. 394–399.
8. *Дынникова Г.Я.* Расчет обтекания кругового цилиндра на основе двумерных уравнений Навье–Стокса при больших числах Re с высоким разрешением в пограничном слое // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 6. С. 755–757.
9. *Dynnikova G.* Simulation of two-dimensional flow around an elliptical cylinder at high Reynolds numbers // Phys. of Fluids. 2024. V. 36. № 023109. P. 1–6.
10. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

Transformation of Nonstationary Navier–Stokes Equations of a Viscous Compressible Fluid under an Arbitrary Conformal Mapping

G. Ya. Dynnikova[a,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Research Institute of Mechanics, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: dyn@imec.msu.ru*

It is shown that, the circulation of velocity and fluid flow on any closed or open contour are preserved under an arbitrary conformal mapping of the two-dimensional viscous compressible flow region. The transformed unsteady Navier–Stokes, continuity and heat balance equations, which govern the aerodynamic parameters in the mapped region, are derived.

Keywords: Navier–Stokes equations, conformal mapping, unsteady two-dimensional flows, viscous compressible fluid

REFERENCES

1. *Lavrentyev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Functions of Complex Variable. Moscow: Nauka, 1965. (in Russian)
2. *Rabinovich B.I., Tyurin Y.V.* Numerical Conformal Mapping in Two-dimensional Hydrodynamics & Related Problems of Electrodynamics and Elasticity Theory. Moscow: Space Res. Inst. of the RAS, 2000. 312 p.
3. *Titova A.A.* A Problem of an ideal fluid flow with a singular sink at a depression on the bottom // J. Appl. Ind. Math., 2021, vol. 15, pp. 513–530.
4. *Shamin R.V.* Dynamics of an ideal fluid with a free surface in conformal variables // Modern Math. Fundam. Directions, 2008, vol. 28. pp. 3–144. (in Russian)
5. *Dyachenko A.I.* On the dynamics of an ideal fluid with a free surface // Dokl. Math., 2001, vol. 63, no. 1, pp. 115–117.
6. *Mizumoto H.* A note on the numerical treatment of Navier–Stokes equations. I // J. of the Phys. Soc. of Japan, 1973, vol. 34, no. 5, pp. 1452–1456.
7. *Dynnikova G.Y., Guvernyuk S.V., Demchenko Y.V. et al.* An efficient algorithm for calculating boundary elements in vortex methods // Engng. Anal. with Boundary Elements, 2023, vol. 151, pp. 394–399.
8. *Dynnikova G.Y.* Calculation of flow around a circular cylinder on the basis of two-dimensional Navier–Stokes equations at large Reynolds numbers with high resolution in a boundary layer // Dokl. Phys., 2008, vol. 53, no. 10, pp. 544–547.
9. *Dynnikova G.* Simulation of two-dimensional flow around an elliptical cylinder at high Reynolds numbers // Phys. of Fluids, 2024, vol. 36, no. 023109, pp. 1–6.
10. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966.