ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2025, том 89, № 1, с. 7–16

УДК 531.36

О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Косов[1,*]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*

[*]*e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.10.2024 г.
После доработки 20.01.2025 г.
Принята к публикации 20.01.2025 г.

Рассматривается задача о гироскопической стабилизации положения равновесия нелинейных потенциальных систем с потенциалом специального вида. Получены условия стабилизации положения равновесия за счет присоединения гироскопических сил. Даны оценки снизу для больших параметров при матрицах гироскопических сил, гарантирующих устойчивость равновесия в замкнутой системе.

Ключевые слова: нелинейные потенциальные системы, устойчивость равновесия, гироскопическая стабилизация

DOI: 10.31857/S0032823525010011, **EDN:** BOQTTC

1. Введение. Задача о гироскопической стабилизации неустойчивого положения равновесия механической системы с потенциальными силами является давно известной классической проблемой, представляющей как теоретический, так и прикладной интерес. Теоретический интерес стимулируется тем фактом, что рассматриваемая система является консервативной и устойчивость равновесия при нелинейных потенциальных силах может быть достигнута только в заведомо критическом по Ляпунову случае, когда все корни характеристического уравнения системы линейного приближения лежат на мнимой оси. Это затрудняет анализ устойчивости и требует развития и применения специальных методов и подходов, учитывающих существенную нелинейность задачи. Прикладной интерес стимулируется тем, что управляющие гироскопические силы не совершают работы, поэтому стабилизация такими управлениями наиболее экономична по затратам энергии.

Для случая линейных систем условия, при которых гироскопическая стабилизация возможна, определяются теоремой Кельвина–Четаева [1]. Обзор наиболее изученного линейного случая с отрицательно определенной матрицей потенциальных сил приведен в [2]. Обычно рассматривают случай, когда гироскопические силы содержат большой параметр, достаточные условия гироскопической стабилизации для такого случая приведены в [1]. Интерес представляет получение оценок большого параметра снизу, гарантирующих гироскопическую стабилизацию [3].

Для существенно нелинейных потенциальных систем запрет на гироскопическую стабилизацию, формулируемый в терминах степени первой формы в разложении потенциала в ряд, был получен в [4]. Обобщение теоремы Кельвина на случай нелинейных потенциальных систем было дано в [5] на основе применения топологических методов, и нарушение условий этой теоремы В.В. Козлова о неустойчивости необходимо для возможности гироскопической стабилизации. Однако невыполнение условий упомянутой теоремы само по себе еще не гарантирует возможность гироскопической стабилизации.

Основная цель данной статьи заключается в получении достаточных условий гироскопической стабилизации для одного класса нелинейных потенциальных систем с потенциалом и кинетической энергией специального вида. Указывается способ выбора управляющих гироскопических сил и даются оценки больших параметров снизу. Результаты иллюстрируются примерами.

2. Случай линейной системы. Рассмотрим сначала уравнения движения механической системы с линейными потенциальными и гироскопическими силами, полагая, что матрица кинетической энергии приведена к единичной

$$\ddot{q} + hG\dot{q} + Cq = 0, \tag{2.1}$$

где $q,\ \dot{q} \in R^n$ – векторы обобщенных координат и скоростей четной размерности $n = 2m$, $C^T = C$ – симметрическая матрица потенциальных сил, $G^T = -G$ – кососимметрическая матрица гироскопических сил, $h > 0$ – большой положительный параметр. Здесь и далее верхний индекс T означает транспонирование. Возможность гироскопической стабилизации и условия на выбор матрицы G гироскопических сил, гарантирующих устойчивость положения равновесия системы (2.1), даются следующим утверждением.

Теорема 1. Пусть все собственные значения матрицы C кратные четной кратности, тогда существует невырожденная кососимметрическая матрица G, такая, что матрица $G^T C$ будет кососимметрической, и при использовании этой матрицы G гироскопических сил при всех значениях параметра

$$h^2 > h_0^2 = -4\frac{\lambda_{\min}(C)\lambda_{\max}(G^TG)}{\lambda_{\min}^2(G^TG)}$$

положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) будет устойчиво по Ляпунову.

Здесь и далее $\lambda_j(M)$ означают собственные числа соответствующей матрицы M, а $\lambda_{\min}(M)$ и $\lambda_{\max}(M)$ – наименьшее и наибольшее собственные числа симметричной матрицы. Предполагается, что $\lambda_{\min}(C) \le 0$, поскольку если $\lambda_{\min}(C) > 0$, то положение равновесия устойчиво и без гироскопических сил.

Доказательство. Симметричная вещественная матрица C потенциальных сил имеет четную размерность $n = 2m$ и приводится линейной заменой $q = Sy$ с ортогональной матрицей S к диагональному виду [6, стр. 279], который с учетом четной кратности собственных значений можно представить так

$$\Lambda = S^TCS = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix},\quad k = 1,\ldots,m\right)$$

Выберем невырожденную матрицу гироскопических сил следующим образом:

$$G = S\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -g_k \\ g_k & 0 \end{pmatrix},\quad k = 1,\ldots,m\right)S^T,$$

где все $g_k \ne 0$.

Тогда произведение матриц $G^T C$ будет кососимметрично

$$G^TC = S\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & g_k \\ -g_k & 0 \end{pmatrix}, k = 1,\ldots,m\right)S^TS\Lambda S^T =$$
$$= S\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_k g_k \\ -\lambda_k g_k & 0 \end{pmatrix}, k = 1,\ldots,m\right)S^T$$

Система (2.1) имеет интеграл энергии $J_1 = \dot{q}^T\dot{q} + q^T C q$ и, как легко проверить, при условиях теоремы 1 имеется еще один интеграл $J_2 = hq^T G^T G q + 2q^T G^T \dot{q}$. Для связки интегралов справедлива оценка снизу

$$J_1 + \mu J_2 \geq \left\|\dot{q}\right\|^2 + \lambda_{\min}\left(C\right)\left\|q\right\|^2 + h\mu\lambda_{\min}\left(G^T G\right)\left\|q\right\|^2 - 2\mu\sqrt{\lambda_{\max}\left(G^T G\right)}\left\|q\right\|\left\|\dot{q}\right\|$$

Здесь и далее через $\left\|\cdot\right\|$ обозначается евклидова норма вектора. Чтобы квадратичная форма от двух переменных $\left\|q\right\|$ и $\left\|\dot{q}\right\|$ была положительно определенной, положительный параметр $\mu > 0$ должен быть выбран так, чтобы выполнялось условие критерия Сильвестра $\lambda_{\min}\left(C\right) + h\mu\lambda_{\min}\left(G^T G\right) - \mu^2\lambda^2_{\max}\left(G^T G\right) > 0$. Для этого параметр следует брать между корнями квадратного трехчлена по μ, что всегда можно сделать, поскольку дискриминант $h^2\lambda^2_{\min}\left(G^T G\right) + 4\lambda_{\min}\left(C\right)\lambda_{\max}\left(G^T G\right) > 0$ положителен при выполнении неравенства $h^2 > h_0^2$, указанного в условиях теоремы 1. Существование положительно определенной функции Ляпунова в виде связки интегралов влечет устойчивость положения равновесия. Тем самым теорема доказана.

Пример 1. Гироскопическая стабилизация в случае вырожденной матрицы потенциальных сил. Пусть в системе (2.1) матрица потенциальных сил следующая:

$$C = C_1 = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda\left(C_1\right) = \left[-3, -3, 0, 0\right]$$

Для матрицы гироскопических сил

$$G = G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda\left(G_1^T G_1\right) = \left[1, 1, 4, 4\right],$$

произведение матриц кососимметрично:

$$G_1^T C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1 гарантирует устойчивость при $h^2 > h_0^2 = 48$, на самом деле устойчивость будет уже при $h^2 > h_*^2 = 3$.

Отметим, что теорема о достаточных условиях гироскопической стабилизации [1, стр. 190] в этом примере неприменима из-за вырожденности матрицы C_1.

Пример 2. Гироскопическая стабилизация в случае кратных корней прецессионной системы. Пусть в системе (2.1) матрица потенциальных сил следующая:

$$C = C_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda\left(C_2\right) = \left[-1, -1, 2, 2\right]$$

Для матрицы G_1 из примера 1 произведение матриц кососимметрично:

$$G_1^T C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 & -3/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 3/2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1 гарантирует устойчивость при $h^2 > h_0^2 = 16$, на самом деле устойчивость будет уже при $h^2 > h_*^2 = 4$.

Теорема Д.Р. Меркина [1, стр. 190] в этом примере неприменима из-за наличия кратных корней характеристического уравнения прецессионной системы $\det\left(\lambda h G_1 + C_2\right) = 4\left(h^2\lambda^2 + 1\right)^2 = 0.$

Пример 3. Этот пример показывает, что если у матрицы потенциальных сил C имеются собственные значения нечетной кратности, то кососимметрическая матрица G, для которой произведение $G^T C$ кососимметрично, также может существовать. Однако в таком случае нельзя гарантировать, что $\det G \neq 0$, поэтому связка интегралов, указанная в доказательстве теоремы 1, уже не будет положительно определенной.

Матрица

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения нечетной кратности $\lambda\left(C_3\right) = \left[8, -8, -8, -8\right]$. Для кососимметрической матрицы

$$G_2^T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\big/8 & -3\sqrt{2}/16 & \sqrt{6}/8 \\ -\left(3\sqrt{2}-1\right)\big/8 & 0 & \sqrt{3}/4 & -\left(3\sqrt{2}+1\right)\big/8 \\ 3\sqrt{2}/16 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 3\sqrt{6}/16 \\ -\sqrt{6}/8 & \left(3\sqrt{2}+1\right)\big/8 & -3\sqrt{6}/16 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем кососимметричное произведение

$$G_2^T C_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3} & 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6} \\ \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}+1 \\ -3\sqrt{2}/2 & 2\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{6}/2 \\ \sqrt{6} & -3\sqrt{2}-1 & 3\sqrt{6}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

В данном случае $\det G_2 = 0$, и теорема 1 не работает. Характеристическое уравнение системы (2.1) с матрицами из данного примера приводится к виду $\det\left(\lambda^2 E + \lambda h G_2 + C_3\right) = \left(\lambda^2 - 8\right)\left(\lambda^2 + 8\right)\left(\lambda^4 + \left(h^2 - 16\right)\lambda^2 + 64\right) = 0$ и имеет положительный корень $\lambda = 2\sqrt{2}$, поэтому при всех значениях параметра h состояние равновесия неустойчиво. Более того, так как степень неустойчивости в данном примере нечетная, то по теореме Кельвина гироскопическая стабилизация невозможна ни при каком выборе матрицы гироскопических сил.

Пример 4. Обратная задача гироскопической стабилизации. Пусть в системе (2.1) задана невырожденная матрица гироскопических сил G, и требуется определить множество матриц потенциальных сил C, для которых положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ будет устойчиво при достаточно большом значении параметра $h > 0$. Из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. Для любой невырожденной матрицы G положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ любой системы из семейства

$$\ddot{q} + hG\dot{q} + \left(\alpha_0 E + \alpha_2 G^2 + \alpha_4 G^4 + \ldots + \alpha_{n-2} G^{n-2}\right) q = 0, \tag{2.2}$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}$ – произвольные вещественные числа, устойчиво при всех достаточно больших значениях параметра $h > 0$.

Отметим, что в (2.2) в скобках стоит симметричная матрица при любых значениях коэффициентов $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}$. Рассмотрим частный случай системы (2.2), когда $\alpha_2 = 1$, все остальные коэффициенты равны нулю, и матрица G вырождена (это заведомо так при нечетном n). Этот случай интересен тем, что для системы $\ddot{q} + hG\dot{q} + G^2 q = 0$ гироскопическая стабилизация обеспечивается только относительно части переменных. Для этой системы, как следует из доказательства теоремы 1, первым интегралом будет функция

$$\begin{aligned} V &= \dot{q}^T \dot{q} + q^T G^2 q + hq^T G^T G q + 2q^T G^T \dot{q} = \\ &= \left(\dot{q} + Gq\right)^T \left(\dot{q} + Gq\right) + \left(h - 2\right) q^T G^T G q \end{aligned}$$

Эта функция при $h > 2$ является положительно определенной по переменным $y_1 = \dot{q} + Gq$ и $y_2 = Gq$, поэтому, на основании теоремы В.В. Румянцева об устойчивости относительно части переменных [7, стр. 29], положение равновесия устойчиво относительно y_1, y_2, а значит, и относительно их разности $y_1 - y_2 = \dot{q}$, т.е. относительно скоростей. Устойчивость по отношению ко всем координатам при этом не гарантирована.

3. Случай нелинейной системы. Рассмотрим теперь механическую систему с потенциальными и гироскопическими силами, описываемую уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + h_k G_k \dot{q}_k + C_k q_k + \frac{\partial f\left(q\right)}{\partial q_k} = 0; \; k = \overline{1,m} \tag{3.1}$$

Здесь $h_k > 0$ – положительные параметры; $q_k \in R^{n_k}$, $q = \left(q_1^T, q_2^T \ldots, q_m^T\right)^T \in R^n$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ – отдельные выделенные векторные компоненты и полный вектор обобщенных координат системы; кинетическая энергия имеет вид

$$T = T\left(q, \dot{q}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \varphi_k\left(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\right) \left\|\dot{q}\right\|_k^2 \tag{3.2}$$

$$s_k = \left\|q\right\|_k^2, \; \sigma_k = q_k^T C_k q_k; \; k = \overline{1,m},$$

а все функции $\varphi_k\left(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\right)$ ограниченные строго положительные $\underline{\varphi}_k \geq \varphi_k\left(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\right) \geq \overline{\varphi}_k > 0$ и непрерывно дифференцируемые; потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi\left(q\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} q_k^T C_k q_k + f\left(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\right), \tag{3.3}$$

где C_k – постоянные симметричные квадратные матрицы размера $n_k \times n_k$ с вещественными элементами, а $f\left(s_1,\ldots,s_m,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\right)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, производные которой обращаются в нули при обращении всех аргументов в ноль. Если среди матриц C_k имеется хотя бы одна, которая имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение, то при отсутствии гироскопических сил (т.е. когда все матрицы G_k нулевые) положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ будет неустойчиво.

Задача гироскопической стабилизации для нелинейной системы (3.1) состоит в том, что постоянные кососимметрические матрицы G_k должны быть выбраны так, чтобы гарантировать устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$. Отметим, что несмотря на то, что в уравнениях (3.1) выделены в явном виде блочно-диагональные матрицы линейных потенциальных и гироскопических сил, система уравнений (3.1) является взаимосвязанной. Связи между подсистемами обусловлены тем, что функции $\varphi_k\left(s_1,\ldots,s_m,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\right)$ и $f\left(s_1,\ldots,s_m,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\right)$ зависят в общем случае от всех обобщенных координат.

Теорема 2. Пусть все размерности n_k – четные, кинетическая и потенциальная энергия имеют соответственно вид (3.2) и (3.3), причем все матрицы C_k имеют только кратные собственные значения четной кратности.

Тогда существуют кососимметрические невырожденные матрицы G_k, такие, что произведения $G_k^T C_k$ будут кососимметрическими матрицами, и при использовании таких матриц G_k в качестве матриц гироскопических сил в (3.1) положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ будет устойчиво по Ляпунову при

$$h_k^2 > h_{k0}^2 = -4\frac{\lambda_{\max}\left(G_k^{\ T} G_k\right)\overline{\overline{\varphi}}_k^2}{\lambda_{\min}^2\left(G_k^{\ T} G_k\right)\overline{\varphi}_k}\min\left\{0,\lambda_{\min}\left(C_k\right)\right\};\ k = \overline{1,m}$$

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 1, существуют кососимметрические невырожденные матрицы G_k, такие, что произведения $G_k^T C_k$ будут кососимметрическими матрицами. Замкнутая система (3.1), (3.2), (3.3) при условиях теоремы имеет первые интегралы:

$$J_0 = T\left(q,\dot{q}\right) + \Pi\left(q\right) \text{ – интеграл энергии}$$

$$J_k = h_k q_k^T G_k^T G_k q_k + 2q_k^T G_k^T\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k};\ h_k > 0,\ k = \overline{1,m}$$

Действительно, вычисляя производную функции J_k в силу системы (3.1), получаем

$$\begin{aligned}\dot{J}_k &= 2h_k q_k^T G_k^T G_k \dot{q}_k - \left\|\dot{q}\right\|_k^2 q_k^T G_k^T\left(2\frac{\partial\varphi_k}{\partial s_k}q_k + 2\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma_k}C_k q_k\right) - \\ &-2h_k q_k^T G_k^T G_k \dot{q}_k - 2q_k^T G_k^T\left(C_k q_k + 2\frac{\partial f}{\partial s_k}q_k + 2\frac{\partial f}{\partial\sigma_k}C_k q_k\right) \equiv 0\end{aligned}$$

Будем рассматривать в качестве функции Ляпунова связку интегралов

$$V = 2J_0 + \sum_{k=1}^{m}\mu_k J_k;\ \mu_k > 0, k = \overline{1,m} \tag{3.4}$$

В малой окрестности положения равновесия $q = 0$ потенциальная энергия представима в виде $\Pi\left(q\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}q_k^T C_k q_k + o\left(\left\|q\right\|^2\right)$, поэтому для связки интегралов (3.4) справедлива оценка снизу

$$V \geq \sum_{k=1}^{m}\Big(\overline{\varphi}_k \left\|\dot{q}\right\|_k^{\,2} + \lambda_{\min}\left(C_k\right)\left\|q\right\|_k^{\,2} + \mu_k h_k \lambda_{\min}\left(G_k^T G_k\right)\left\|q\right\|_k^{\,2} -$$
$$-2\mu_k \overline{\overline{\varphi}}_k \lambda_{\max}^{1/2}\left(G_k^T G_k\right)\left\|q\right\|_k \left\|\dot{q}\right\|_k\Big) + o\left(\left\|q\right\|^2\right)$$

Рассмотрим k-ую компоненту квадратичной части оценки снизу для функции Ляпунова:

$$V_{2k} = \overline{\varphi}_k \left\|\dot{q}\right\|_k^{\,2} + \lambda_{\min}\left(C_k\right)\left\|q\right\|_k^{\,2} + \mu_k h_k \lambda_{\min}\left(G_k^T G_k\right)\left\|q\right\|_k^{\,2} -$$

$$-2\mu_k \overline{\overline{\varphi}}_k \lambda_{\max}^{1/2}\left(G_k^T G_k\right)\left\|q\right\|_k \left\|\dot{q}\right\|_k$$

Чтобы квадратичная форма V_{2k} от двух переменных $\left\|q\right\|_k$ и $\left\|\dot{q}\right\|_k$ была положительно определенной, положительный параметр $\mu_k > 0$ должен быть выбран так, чтобы выполнялось условие критерия Сильвестра

$$\overline{\varphi}_k\left(\lambda_{\min}\left(C_k\right) + h_k \mu_k \lambda_{\min}\left(G_k{}^T G_k\right)\right) - \mu_k^2 \overline{\overline{\varphi}}_k^2 \lambda_{\max}\left(G_k{}^T G_k\right) > 0$$

Для этого параметр μ_k следует брать между корнями квадратного трехчлена по μ_k, что всегда можно сделать, поскольку дискриминант

$$D_k = \overline{\varphi}_k^2 h_k^2 \lambda_{\min}^2\left(G_k{}^T G_k\right) + 4\overline{\varphi}_k \overline{\overline{\varphi}}_k^2 \lambda_{\min}\left(C_k\right)\lambda_{\max}\left(G_k{}^T G_k\right) > 0$$

положителен при выполнении неравенства $h_k^2 > h_{k0}^2$, указанного в условиях теоремы 2. Существование положительно определенной функции Ляпунова в виде связки интегралов влечет устойчивость положения равновесия. Тем самым теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если при некотором k матрица C_k положительно определена, то можно положить соответствующую матрицу $G_k = 0$, т.е. гироскопические силы в данной подсистеме можно не применять. Размерность n_k при этом может быть и нечетной.

Замечание 2. Если при некотором k матрица C_k знакопостоянная положительная (в частности, нулевая), то соответствующее значение $h_{k0} = 0$, т.е. гироскопические силы в данной подсистеме можно брать сколь угодно малыми.

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 останется в силе, если функция $f\left(s_1,\ldots,s_m,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\right)$ зависит еще и от аргументов вида $r_k = q_k^T L_k q_k$ где матрицы L_k обладают свойством $G_k^T L_k$ кососимметрична, например $L_k = G_k^2$.

Пример 5. Гироскопическая стабилизация сильно вырожденного равновесия [5]. Рассмотрим систему с однородным потенциалом четной степени $2p$ и гироскопическими силами, уравнения движения которой имеют вид

$$\ddot{q} + G\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \tag{3.5}$$

$$\Pi\left(q\right) = \left(q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_j^2\right)^p - \left(q_{j+1}^2 + q_{j+2}^2 + \ldots + q_n^2\right)^p;\ p \geq 2$$

Как установлено в [5], если j нечетно и $\det G \neq 0$ (значит, n четно, и $n - j$ нечетно), то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.5) неустойчиво. Таким образом, при нечетном числе j “положительных квадратов” в потенциале гироскопическая стабилизация при любой невырожденной матрице G невозможна.

Если же $n-j$ четно, то из теоремы 2 следует, что гироскопическая стабилизация положения равновесия системы (3.5) обеспечивается при выборе матрицы G в виде

$$G=\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

где G_1 – любая кососимметрическая $j\times j$ матрица, а G_2 – любая невырожденная кососимметрическая $(n-j)\times(n-j)$ матрица. При этом j может быть и нечетным, а матрица G_1 нулевой.

Пример 6. Гироскопическая стабилизация системы с положительно однородным потенциалом нечетного порядка. Рассмотрим систему с положительно однородным потенциалом нечетного порядка $2p+1$ и гироскопическими силами, уравнения движения которой имеют вид

$$\ddot{q}+hG\dot{q}+\frac{\partial\Pi}{\partial q}=0, \Pi(q)=-\left(q_1^2+q_2^2+\ldots+q_n^2\right)^{\frac{2p+1}{2}} \tag{3.6}$$

Здесь p – некоторое натуральное число, а число координат n считается четным. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, приходим к заключению, что для любой невырожденной кососимметрической матрицы G при $h>\dfrac{\lambda_{\max}\left(G^TG\right)}{\lambda_{\min}\left(G^TG\right)}\mu$, где μ – произвольно малое положительное число, положение равновесия $q=\dot{q}=0$ системы (3.6) будет устойчиво. Отметим, что в этом примере потенциал является положительно однородной функцией нечетного порядка $2p+1$, поскольку для любого числа $c>0$ удовлетворяет равенству $\Pi(cq)=c^{2p+1}\Pi(q)$. Однако этот потенциал не является однородной формой нечетной степени, для которых в [4] доказана невозможность гироскопической стабилизации ни при каком выборе невырожденной матрицы G. Таким образом, свойства устойчивости для потенциалов, задаваемых однородными формами, могут существенно отличаться от аналогичных свойств потенциалов, заданных положительно однородными функциями.

Пример 7. Гироскопическая стабилизация неустойчивого равновесия материальной точки на вершине симметричного холма. Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\ddot{x}+g\dot{y}-x\left(x^2+y^2\right)=0, \quad \ddot{y}-g\dot{y}-y\left(x^2+y^2\right)=0, \tag{3.7}$$

где $g>0$ и потенциал $\Pi(x,y)=-\left(x^2+y^2\right)^2/4$ является отрицательно определенным, поэтому потенциальные силы отталкивают движущую точку от положения равновесия. Из теоремы 2 следует, что положение равновесия системы (3.7) устойчиво.

Теперь рассмотрим аналогичную систему, но уже с тремя степенями свободы, уравнения движения которой имеют вид

$$\ddot{x}+a\dot{y}+b\dot{z}+\frac{\partial\Pi}{\partial x}=0, \quad \ddot{y}-a\dot{x}+c\dot{z}+\frac{\partial\Pi}{\partial y}=0, \quad \ddot{z}-b\dot{x}-c\dot{y}+\frac{\partial\Pi}{\partial z}=0, \tag{3.8}$$

где потенциал $\Pi(x,y,z)=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2/4$ аналогичен потенциалу для системы (3.7), а параметры a,b,c определяют 3×3 матрицу гироскопических сил G.

Для системы (3.8) имеются два интеграла, но указанная в доказательстве теоремы 2 связка при любых значениях параметров a,b,c не будет положительно определенной из-за вырожденности матрицы гироскопических сил G. Поэтому теорема 2 здесь не применима и не позволяет установить возможность гироскопической стабилизации равновесия для системы (3.8). Численное интегрирование для множества фиксированных наборов параметров показало наличие траекторий, “уходящих” от состояния равновесия. Однако строго доказать неустойчивость равновесия системы (3.8) пока не удалось. Теорема 1 из [5] здесь не применима, во-первых, из-за вырожденности матрицы G, и, во-вторых, из-за того, что потенциал является отрицательно определенной формой.

Заключение. В заключение отметим кратко некоторые возможные направления развития полученных в статье результатов. В статье получены (теорема 1) условия существования дополнительного квадратичного интеграла специального вида для линейной системы с потенциальными и гироскопическими силами. Представляет интерес выяснить условия на слагаемые третьей и более высоких степеней в разложении потенциала в ряд, которые обеспечивают принципиальную возможность продолжения дополнительного квадратичного интеграла в аналитический интеграл полной системы Подобный случай аналитического продолжения интеграла линейной системы отмечался в [3], где использовалась другая конструкция квадратичного интеграла, предложенная в [8]. Поскольку вопрос о положительной определенности связки решается квадратичными слагаемыми интегралов, то для установления факта устойчивости строить реально такое продолжение интеграла не обязательно.

В теореме 2 явно указаны условия на потенциальную и кинетическую энергию, обеспечивающие существование дополнительного интеграла для полной нелинейной системы, а гироскопические силы используются линейные. Если рассматривать нелинейные управляющие гироскопические силы с матрицей $G\left(q,\dot{q}\right)$, зависящей от состояния, то возможно удастся расширить условия на нелинейные потенциальные силы, гарантирующие существование дополнительного интеграла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 121032400051-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Bulatovic R.M.* On stability criteria for gyroscopic systems with negative definite stiffness // Univ. of Niš. The Sci. J. Facta Universitatis. Ser. Mech., Autom. Control&Robotics. 2000. V. 2. № 10. P. 1081–1087.
3. *Карапетян А.В.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Teorijska i Primenjena Mehanika. 1994. V. 20. P. 89–93.
4. *Болотин С.В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1993. № 6. С. 66–75.
5. *Козлов В.В.* Гироскопическая стабилизация вырожденных равновесий и топология вещественных алгебраических многообразий // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 4. С. 447–450.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
7. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
8. *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.

On Gyroscopic Stabilization of Equilibria of Nonlinear Potential Systems

A. A. Kosov[a,#]

[a] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia*

[#] *e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

The problem of gyroscopic stabilization of the equilibrium position of nonlinear potential systems with a potential of a special kind is considered. The conditions of stabilization of the equilibrium position by attaching gyroscopic forces are obtained. Estimates from below for large parameters with matrices of gyroscopic forces guaranteeing stability of equilibrium in a closed system are given.

Keywords: nonlinear potential systems, equilibrium stability, gyroscopic stabilization

REFERENCES

1. *Merkin D.R.* Gyroscopic Systems. Moscow: Nauka, 1974. 344 p. (in Russian).
2. *Bulatovic R.M.* On stability criteria for gyroscopic systems with negative definite stiffness // Univ. of Niš. The Sci. J. Facta Universitatis. Ser. Mech., Autom. Control & Robotics, 2000, vol. 2, no. 10, pp. 1081–1087.
3. *Karapetyan A.V.* To the question of gyroscopic stabilization // Teorijska i Primenjena Mehanika, 1994, vol. 20, pp. 89–93.
4. *Bolotin S.V., Negrini P.* Asymptotic trajectories of gyroscopic systems // MSU Bull. Ser. 1. Matem. Mech., 1993, no. 6, pp. 66–75.
5. *Kozlov V.V.* Gyroscopic stabilization of degenerate equilibria and the topology of real algebraic varieties // Dokl. Math., 2008, vol. 77, iss. 3, pp. 412–415. https://doi.org/10.1134/S1064562408030253
6. *Gantmakher F.R.* The Theory of Matrices. N.Y.: Chelsea, 1989–1990.
7. *Rumyantsev V.V., Oziraner A.S.* Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of Variables. Moscow: Nauka, 1987. 256 p. (in Russian).
8. *Lakhadanov V.M.* On stabilization of potential systems // JAMM, 1975, vol. 39, iss. 1, pp. 45–50.